АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Н. Н. ЛУЗИН

СОБРАНИЕ СОЧИНЕНИЙ

ТОМ

III

РАБОТЫ ПО РАЗЛИЧНЫМ ВОПРОСАМ МАТЕМАТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА
1959

ОТ КОМИССИИ ПО ИЗДАНИЮ ТРУДОВ АКАДЕМИКА Н. Н. ЛУЗИНА

Настоящий, третий том собраний сочинений Н. Н. Лузина состоит из двух частей. В первую часть входят исследования по различным вопросам математического анализа и геометрии и работы по истории математики, во вторую часть — биография Н. Н. Лузина и статьи различных авторов, посвященные разбору математических исследований Н. Н. Лузина.

В конце тома приведен полный библиографический указатель работ Н. Н. Лузина и, кроме того, список вопросов, поставленных Н. Н. Лузиным при написании им его знаменитой книги «Интеграл и тригонометрический ряд».

I

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ *

С. П. Фиников недавно обратил внимание на необходимость строгого доказательства для одного предложения, касающегося систем уравнений с частными производными. Рассматриваемое в себе предложение это не представляет, может быть, выдающегося теоретического интереса. Практически же оно очень важно. Достаточно указать на роль этого предложения в различных вопросах анализа и геометрии, где оно является ценным инструментом (как мы это покажем на примерах) и где его должно рассматривать как средство для установления существований. В дальнейшем мы констатируем это обстоятельство, давая полное решение одного вопроса классической дифференциальной геометрии, поставленного теорией поверхностей уже давно, ответ на который, казалось, представлял значительные трудности.

Теорема. *Для всякой данной системы уравнений с частными производными, написанной в нормальной форме Коши-Ковалевской:*

$$\frac{\partial^{r_1} U_1}{\partial {x_1}^{r_1}} = \Phi_1, \quad \frac{\partial^{r_2} U_2}{\partial {x_1}^{r_2}} = \Phi_2, \ldots, \quad \frac{\partial^{r_m} U_m}{\partial {x_1}^{r_m}} = \Phi_m, \tag{1}$$

где $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ — *голоморфные функции независимых переменных* x_1, $x_2, \ldots, x_n$, *неизвестных функций* $U_1, U_2, \ldots, U_m$ *и их частных производных до соответственных порядков* $r_1, r_2, \ldots, r_m$ *включительно* (*производные, написанные в левых частях, в правые части не входят*), *рассматриваемых как независимые переменные, — можно найти такую фиксированную систему многочленов* $P_1, P_2, \ldots, P_m$ с целыми коэффициентами *от букв* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *что будут справедливы одновременные точные неравенства:*

$$|P_1 - U_1| > 0, \ |P_2 - U_2| > 0, \ldots, \ |P_m - U_m| > 0$$

в области D измерений n, зависящей от $U_1, U_2, \ldots, U_m$, каково бы ни было голоморфное решение $U_1, U_2, \ldots, U_m$ данной системы (1) *уравнений с частными производными.*

Доказательство. Известно, что каждая система уравнений с частными производными, написанная в нормальной форме Коши-Ковалевской

---

* Докл. АН СССР, 1938, 18, № 8, 529—532.

Цифрами обозначены подстрочные примечания Н. Н. Лузина, звездочками—примечания Редакции.

(1), может быть приведена к линейному однородному виду:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_1} = \sum_{k,\,l} A^i_{kl} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \quad \begin{array}{l}(i,\ k = 1,\ 2,\ 3, \ldots \mu), \\ (l = 2,\ 3, \ldots, n),\end{array} \tag{2}$$

где коэффициенты A^i_{kl} обозначают голоморфные функции одних лишь букв $U_1, U_2, \ldots, U_\mu$. Важно заметить, что редукция данной системы (1) к линейному однородному виду (2) осуществляется путем введения вспомогательных неизвестных функций, которые, будучи присоединены к прежним, составляют систему функций $U_1, U_2, \ldots, U_\mu$, $\mu \geqslant m$, удовлетворяющую приведенной системе (2). Поэтому можно ограничиться доказательством предложенной теоремы лишь для случая линейных однородных систем (2).

Если теперь мы возьмем за начальные условия

$$U_1 = \omega_1,\ U_2 = \omega_2, \ldots, U_\mu = \omega_\mu \text{ для } x_1 = x_1{}^0,$$

где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu$ суть произвольные функции от $x_2, x_3, \ldots, x_n$, разложимые в ряд Тэйлора в точке $x_2{}^0, x_3{}^0, \ldots, x_n{}^0$, тогда искомые функции $U_1, U_2, \ldots, U_\mu$, будучи разложимы по степеням $x_1 - x_1{}^0$, $x_2 - x_2{}^0, \ldots$ $x_n - x_n{}^0$, имеют вид:

$$U_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \omega_i + \frac{\omega_{i1}}{1!}(x_1 - x_1{}^0) + \frac{\omega_{i2}}{2!}(x_1 - x_1{}^0)^2 + \ldots + \\ + \frac{\omega_{ik}}{k!}(x_1 - x_1{}^0)^k + \ldots, \tag{3}$$

где ω_{ik} есть частная производная $\frac{\partial^k U_i}{\partial x_1{}^k}$, вычисленная для $x_1 = x_1{}^0$.

С другой стороны, если мы будем последовательно брать производные $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}, \frac{\partial^3}{\partial x_1{}^3}$ от каждого уравнения системы (2), исключая при этом всякий раз посредством этих уравнений и уравнений, выведенных из них предыдущими дифференцированиями, производные $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}, \frac{\partial^3}{\partial x_1{}^3}, \ldots$ от неизвестных функций $U_1, U_2, \ldots, U_\mu$, то мы придем к уравнениям:

$$\frac{\partial^k U_i}{\partial x_1{}^k} = \Omega_{ik}\left(U_1, \ldots, U_\mu, \frac{\partial U_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k U_\mu}{\partial x_n{}^k}\right), \quad (k = 1,\ 2,\ 3, \ldots), \tag{4}$$

в которых Ω_{ik} обозначают функции одних лишь переменных $U_1, U_2, \ldots, U_\mu$ и их частных производных до порядка k, взятых по переменным $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Следует заметить, что Ω_{ik} суть голоморфные функции от букв $U_1, U_2, \ldots, U_\mu$ и многочлены от их частных производных по переменным $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Полагая $x_1 = x_1{}^0$ в равенстве (4), мы будем иметь равенства:

$$\omega_{ik} = \Omega_{ik}\left(\omega_1, \ldots, \omega_\mu, \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k \omega_\mu}{\partial x^k_n}\right), \quad \begin{array}{l}(i = 1,\ 2,\ 3, \ldots, \mu), \\ (k = 1,\ 2,\ 3 \ldots).\end{array} \tag{5}$$

Пусть теперь i есть какое-нибудь фиксированное число из чисел 1, 2, 3, ..., μ, и сделаем в равенствах (5) $k = 1, 2, 3, \ldots, \nu$. Если к полученным таким образом ν равенствам мы присоединим их последовательные частные производные по переменным $x_2, x_3, \ldots, x_n$ до порядка ν включительно, то необходимо наступит такой момент ν_0, когда число всех полученных таким образом уравнений превзойдет число функций ω и их частных производных, которые там содержатся. Действительно, когда мы берем частные производные порядка $\leqslant \nu$ от равенств (5), $1 \leqslant k \leqslant \nu$, мы получаем $\nu \frac{n(n+1)\ldots(n+\nu-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots \nu}$ новых и прежних равенств; с другой стороны, функции $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu$ и их частные производные, там содержащиеся, имеются в числе

$$\mu \frac{n(n+1)\ldots(n+2\nu-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2\nu)}.$$

А это последнее число будет, очевидно, меньше предыдущего, лишь только ν превзойдет произведение $\mu\cdot 2^n$. Начиная с этого момента ν_0, число полученных равенств превзойдет число произвольных функций ω и их частных производных. Так как Ω_{ik} суть голоморфные функции переменных ω и многочлены от их частных производных, то существует непременно по крайней мере одна голоморфная функция $F(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ независимых переменных $t_1, t_2, \ldots, t_s$, которая не есть тождественно равная нулю и такая, что если мы заменим в ней переменные t количествами ω_{ik} $(k = 1, 2, 3\ldots, \nu_0)$ и их частными производными до порядка ν_0 по переменным $x_2, x_3, \ldots, x_n$, то получим выражение, тождественно равное нулю, каковы бы ни были произвольные начальные функции $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu$.

Пусть теперь $t_1^0, t_2^0, \ldots, t_s^0$ — какая-нибудь система значений переменных $t_1, t_2, \ldots, t_s$, для которой функция F есть голоморфная и заведомо отличная от нуля. Так как всякий многочлен от $x_2, x_3, \ldots, x_n$ вполне определяется своей величиной и величинами его частных производных, вычисленными в фиксированной точке $x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0$ и могущими быть взятыми произвольно, мы можем заменить количества ω_{ik} многочленами p_{ik} от букв $x_2, x_3, \ldots, x_n$ таким образом, чтобы результат подстановки многочленов p_{ik} и их частных производных в функцию F был заведомо отличным от нуля в фиксированной точке $x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0$. Приняв это во внимание, мы немедленно усматриваем, что система многочленов P_i от букв $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определенная равенствами:

$$P_i = p_i + \frac{p_{i1}}{1!}(x_1 - x_1^0) + \frac{p_{i2}}{2!}(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + \frac{p_{i\nu_0}}{\nu_0!}(x_1 - x_1^0)^{\nu_0}.$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots, \mu), \tag{6}$$

удовлетворяет условиям предложенной теоремы, каковы бы ни были многочлены p_i от букв $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Нам остается лишь показать, что коэффициенты многочленов P_i можно выбрать целыми числами. В самом деле, согласно исследованиям И. Н. Хлодовского, всякая голоморфная функция $f(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ может быть аппроксимирована, так же как и ее частные производные, до наперед заданного порядка, многочленом $\pi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, имеющим целые коэффициенты, и его соответствующими частными производными в каждой области D, которая не содержит никакой точки $x_2, x_3, \ldots, x_n$ с целой координатой, причем эта аппроксимация может быть сделана столь точной, как это заранее задано. Отсюда следует, что мы можем заменить в равенствах (6) многочлены $\frac{p_{i1}}{1!}, \ldots, \frac{p_{i\nu_0}}{\nu_0!}$ многочленами $q_{i1}, \ldots, q_{i\nu_0}$ с целыми коэффициентами так, чтобы результат подстановки в функцию F многочленов $1!\, q_{i1}, \ldots, \nu_0!\, q_{i\nu_0}$ и их частных производных продолжал оставаться отличным от нуля для фиксированной точки $x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0$. Ясно, что, беря за p_i произвольные многочлены с целыми коэффициентами, мы оканчиваем доказательство предложенной теоремы.

Примечание. Мы предположили, что решение $U_1, U_2, \ldots, U_m$ системы (1) есть голоморфное. Однако рассуждение распространяется само собой и на такие решения $U_1, U_2, \ldots, U_m$, которые, не будучи аналитическими, обладают непрерывными частными производными до порядка ν_0 (зависящего только от натуральных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_m, n$). В самом деле, уравнения (4) и равенства (5) сохраняют силу, как и определение функции F. В этих условиях многочлены (6) продолжают удовлетворять условиям предложенной теоремы. Но для того, чтобы еще далее уменьшить число предполагаемых частных производных у функций U_i, необходимо уже изменить метод.

О СУЩЕСТВОВАНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, НЕ ИМЕЮЩИХ ГЛАВНОГО ОСНОВАНИЯ. I, II*

I. Проблема главного основания. Начало этой проблемы положено знаменитым мемуаром[1] московского геометра Карла Михайловича Петерсона об отношениях и сродствах между кривыми поверхностями, вышедшим в свет в 1866 г. Этот мемуар, а также позднейшая заметка(2) французского геометра Рибокура (A. Ribaucour), напечатанная в 1891 г. и содержащая найденное им независимым образом понятие сопряженной сети, общей двум поверхностям[2], послужили источником ряда дальнейших исследований, из которых все отчетливее и отчетливее стала выступать важность понятия главного основания. При наличии взаимно однозначного соответствия точек двух наложимых друг на друга поверхностей S и S', происходящего от наложения одной на другую, всегда существует на поверхности S одна и только одна сопряженная сеть R, образованная двумя различными семействами действительных или мнимых кривых, переходящая на поверхности S' также в сопряженную сеть R' (Петерсон, Рибокур). По терминологии Петерсона(1), сеть R есть простое основание поверхности S. Но если одна и та же сопряженная сеть R, лежащая на S, переходит в сопряженные сети R' и R'', лежащие на двух нетождественных поверхностях S' и S'', наложимых на S, тогда сеть R переходит в сопряженные сети R_t бесчисленного множества поверхностей S_t, наложимых на S и образующих непрерывное семейство F, $F = \{S_t\}$, зависящее от произвольного параметра t и содержащее все три данные поверхности S, S' и S'' (Петерсон). Можно рассматривать это семейство F как образованное в пространстве непрерывной деформацией поверхности S, проходящей через оба заданных положения S' и S''; это

---

* Докл. АН СССР, 1938, 19, № 1—2, 21—26.

[1] Не зная ничего о предшествовавших работах К. М. Петерсона, Рибокур считал это важное понятие новым, когда печатал в 1891 г. свою заметку в «Comptes rendus», датированную 17 августа. В действительности понятие это было встречено и изучено К. М. Петерсоном еще в 1866 г. (дата опубликования русского мемуара); немецкий перевод(3) работ К. М. Петерсона был издан в 1868 г., а французский перевод(4) их появился только в 1905 г.

[2] Мы пренебрегаем здесь теми исключительными случаями, когда асимптотические линии являются соответственными; известно, что в этом случае поверхности S и S' суть либо тождественные (до положения в пространстве), либо симметричные, либо линейчатые, причем прямолинейные образующие их соответствуют друг к другу.

и есть «изгибание на главном основании»; по терминологии Петерсона, такая сеть R есть главное основание поверхности S. Среди геометров, работы которых содействовали расширению или углублению наших сведений о свойствах главного основания, были: Бианки, Б. К. Млодзеевский, Фосс, Раццабони, Гишар, Е. Коссера, Раффи, Гурса, Адам, Штеккель, Цицейка, Дарбу, Д. Ф. Егоров, Демулен, Сервант, Драх, Тахауер, Смит, Эйзенхарт, Сегре, С. П. Фиников, С. С. Бюшгенс, Руже, Лагалли, Террачини, Либман, Шур, Шафф, Фрейданк и в последнее время Гамбье, А. Ф. Маслов, Вассер, Ловетт, С. Д. Россинский, Лёбель, Винченсини.

В дальнейшем мы будем обозначать через R всякую сеть, начерченную на заданной поверхности S и образованную двумя различными семействами действительных или мнимых кривых.

Согласно самому определению, сеть R есть главное основание поверхности S, если, во-первых, сеть R есть сопряженная на поверхности S и, во-вторых, если среди всех поверхностей, наложимых на S, имеются две такие различные поверхности S' и S'', отличающиеся от S, на которых сети R' и R'', соответствующие сети R, будут также сопряженные [Петерсон (1)].

Если рассматриваемая поверхность S нам дана в криволинейных координатах и притом вполне определенным образом, мы будем писать ее линейный элемент ds в виде:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

В этом случае каждая сеть R, начерченная на S, может быть рассматриваема как происходящая от плоской сети r, начерченной на плоскости UOV и определенной двумя дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u,\ v),\ \ \frac{dv}{du} = \psi(u,\ v), \tag{1}$$

где φ и ψ суть две различные друг от друга функции независимых переменных u и v, непрерывные до частных производных 3-го порядка включительно. В дальнейшем мы будем обозначать такую плоскую сеть r через $(\varphi,\ \psi)$.

Плоская сеть $(\varphi,\ \psi)$ называется главным основанием данного линейного элемента ds, когда среди всех поверхностей, принадлежащих этому линейному элементу, имеется поверхность S, на которой сеть R, определенная сетью $(\varphi,\ \psi)$, является главным основанием в смысле Петерсона [С. П. Фиников (5) и также С. С. Бюшгенс (6)].

Теперь естественно возникает интересный вопрос: является ли условие аналитичности данной поверхности S достаточным для того, чтобы она имела главное основание? И если этого условия еще недостаточно, то не имеется ли среди всех аналитических поверхностей S', наложимых на S, такой, которая обладает главным основанием?

На эти трудные вопросы тщетно пытаются отвечать в отрицательном смысле, приводя следующее обычное упрощенное рассуждение: «Две функции φ и ψ, определяющие главное основание (φ, ψ) данного линейного элемента ds, должны одновременно удовлетворять системе (Σ) трех уравнений с частными производными 2-го порядка:

$$\Phi\left(E, F, G, \ldots | \varphi, \psi, \frac{d\varphi}{du}, \ldots, \frac{d^2\psi}{dv^2}\right) = 0, \ \Phi_1 = 0, \ \Phi_2 = 0. \quad (\Sigma)$$

Следовательно, вообще говоря, линейный элемент не имеет главного основания».

В действительности этот способ рассуждения весьма затруднительно поддерживать при современном состоянии науки: уравнения с частными производными $\Phi = 0$, $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ настолько сложны, что нельзя и думать, чтобы можно было строгим образом доказать, путем прямого исключения функций φ, ψ и их частных производных, существование одного или нескольких результатов $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0, \ldots$, связывающих функции E, F, G и их частные производные, таких, которые заведомо не были бы тождественными нулю, и, следовательно, со всей строгостью установить несовместность системы уравнений (Σ) даже при произвольных функциях E, F и G. Тем более указанные трудности возрастают в сильнейшей степени, когда имеют дело с каким-нибудь важным частным семейством поверхностей, например, когда дело идет о поверхностях постоянной кривизны, для которых E, F и G уже нельзя взять произвольными.

В сложившейся обстановке становится ясной точка зрения таких геометров, как Б. К. Млодзеевский и Д. Ф. Егоров, которые никогда не рассматривали приведенное выше рассуждение как убедительное. Я ограничусь здесь приведением двух цитат из диссертации (1917) и монографии (1937) С. П. Финикова, неоднократно настаивавшего на необходимости иметь научно строгое доказательство существования аналитической поверхности, не имеющей главного основания: «Возникает интересный вопрос, существует ли поверхность, не имеющая главных оснований, и, с другой стороны, может ли быть на поверхности бесконечное множество главных оснований. Первый вопрос до сих пор остается открытым (1917)»[6]. «Мы не знаем примера, который бы подтвердил эту мысль (1937)»[7].

К тому же здесь необходимо различать три совершенно разные проблемы:

1) узнать, существует ли аналитическая или даже алгебраическая поверхность S, не имеющая главного основания;

2) узнать существует ли аналитическая поверхность S, не имеющая главного основания, так же как и все аналитические поверхности S', наложимые на S;

3) узнать, существует ли аналитическая поверхность S, имеющая главное основание, так же как и все аналитические поверхности S', наложимые на S.

Мы ответим на первый и второй вопросы в утвердительном смысле, а на третий вопрос — отрицательно.

II. Уравнения, определяющие главное основание (φ, ψ). Прежде, всего мы напишем систему уравнений с частными производными, которым должны удовлетворять функции φ и ψ. Аналогичные системы были составлены С. П. Финиковым [(5)] в почти явном виде и С. С. Бюшгенсом [(6)] в неявном виде [1], обе в 1917 г.

Мы отправляемся от двух уравнений Кодацци с частными производными:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\delta}{\partial v}-\frac{\partial\delta'}{\partial u}+p\delta+p'\delta'+p''\delta''=0,\\ &\frac{\partial\delta''}{\partial u}-\frac{\partial\delta'}{\partial v}+q\delta+q'\delta'+q''\delta''=0\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и от конечного уравнения Гаусса:

$$\delta\delta''-\delta'^2=K, \tag{3}$$

где

$$p=\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix},\quad p'=-2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix},\quad p''=\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix},$$
$$q=\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix},\quad q'=-2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix},\quad q''=\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}$$

и где K есть полная кривизна поверхности S.

Таким образом, p, p', p'', q, q', q'' суть (до коэффициента) символы Кристоффеля, и поэтому все они, как и полная кривизна K, суть дифференциальные выражения, зависящие только от букв E, F, G и их частных производных. Что же касается δ, δ', δ'', то это суть приведенные коэффициенты

$$\frac{D}{\sqrt{EG-F^2}},\quad \frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}},\quad \frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}}$$

второй квадратичной формы $D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''dv^2$ поверхности S. Известно, что поверхность S вполне определяется (до положения в пространстве) знанием шести функций E, F, G, δ, δ', δ'' независимых переменных u, v; такая поверхность будет нами обозначаться через $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$. Известно наконец, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы какая-нибудь сеть R, начерченная на поверхности S и определяющаяся плоской сетью $r=(\varphi, \psi)$, была сопряженной сетью на S, является наличие равенства

$$\delta\varphi\psi+\delta'(\varphi+\psi)+\delta''=0. \tag{4}$$

---

[1] Весьма вероятно, что эта неявность вида системы уравнений, определяющих (φ, ψ), и явилась причиной, помешавшей автору вывести из своей системы существование аналитической поверхности, не имеющей главного основания. В самом деле, с одной стороны, было невозможно принимать всерьез в 1917 г. указанное выше упрощенное рассуждение, которое в конечном счете является лишь эффектом рутины, не соответствуя нисколько современному состоянию науки. С другой стороны, самое отсутствие в то время теоремы относительно системы уравнений с частными производными, которая была дана в моем предыдущем сообщении (Докл. АН СССР, 18, № 8, 1938), не могло послужить препятствием для столь сильного геометра.

Переходя теперь к выводу уравнений главного основания (φ, ψ) данного линейного элемента $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, мы начинаем с выполнения подстановки[1]:

$$\delta = ax + \frac{b}{x}, \quad \delta' = -ax\varphi - \frac{b}{x}\psi, \quad \delta'' = ax\varphi^2 + \frac{b}{x}\psi^2, \tag{5}$$

где a, b, x, φ, ψ суть какие-нибудь функции независимых переменных u, v, причем две функции a и b постоянно связаны соотношением

$$ab = \frac{K}{(\psi - \varphi)^2}. \tag{6}$$

Тотчас же убеждаемся в том, что уравнение (3) Гаусса и условие (4) удовлетворены тождественно, каковы бы ни были a, b, x, φ и ψ, лишь бы a и b были связаны соотношением (6). Отсюда следует, что если оба уравнения (2) Кодацци будут удовлетворены выражениями (5) для δ, δ' и δ'', то сеть R, начерченная на поверхности $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$ и определенная плоской сетью $r = (\varphi, \psi)$, окажется сопряженной.

Но результат подстановки (5) в уравнения (2) Кодацци имеет вид:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = A_0X^2 + A_1X + A_2, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = B_0X^2 + B_1X + B_2, \tag{7}$$

где $X = x^2$ и $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$ суть дифференциальные выражения, содержащие только буквы $E, F, G, \varphi, \psi, a$ и b и их частные производные. Ясно, что необходимым (но не достаточным) условием для того, чтобы система (7) допускала своим решением X, является требование, чтобы X было корнем квадратного уравнения:

$$\left\{\frac{\partial A_0}{\partial v} - \frac{\partial B_0}{\partial u} + \begin{vmatrix} A_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix}\right\} X^2 + \left\{\frac{\partial A_1}{\partial v} - \frac{\partial B_1}{\partial u} + 2\begin{vmatrix} A_0 & A_2 \\ B_0 & B_2 \end{vmatrix}\right\} X + \\ + \left\{\frac{\partial A_2}{\partial v} - \frac{\partial B_2}{\partial u} + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}\right\} = 0, \tag{8}$$

которое можно написать в сокращенном виде:

$$\Phi X^2 + \Phi_1 X + \Phi_2 = 0. \tag{8*}$$

Лемма. *Если линейный элемент ds дан, то необходимым и достаточным условием для того, чтобы сеть* (φ, ψ) *была* главным основанием *линейного элемента ds, является наличие трех одновременных равенств*

$$\Phi = 0, \quad \Phi_1 = 0 \text{ и } \Phi_2 = 0.$$

В самом деле, если (φ, ψ) есть главное основание для ds, мы имеем бесчисленное множество поверхностей $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$, на которых соответствующая сеть R будет главным основанием; поэтому должно иметь-

[1] Ср. С. С. Бюшгенс. Диссертация (6), стр. 16.

ся бесконечное множество различных решений X системы (7); отсюда тотчас же следует, что $\Phi = 0$, $\Phi_1 = 0$ и $\Phi_2 = 0$. Значит это условие есть необходимое. С другой стороны, если мы имеем $\Phi = 0$, $\Phi_1 = 0$ и $\Phi_2 = 0$, интегрирование одного только уравнения Риккати нам дает бесконечное множество решений $X = \dfrac{c\alpha + \beta}{c\gamma + 1}$, зависящих от произвольного параметра c, причем α, β и γ суть вполне определенные функции независимых переменных u и v. Отсюда мы заключаем, что формулы (5) нам дают бесконечное множество поверхностей S, на которых соответствующая сеть R есть сопряженная. Следовательно, (φ, ψ) есть главное основание линейного элемента ds. Таким образом, это условие есть достаточное, что и требовалось доказать.

Чтобы получить уравнения, определяющие главное основание (φ, ψ), в окончательно явной форме, мы вводим оператор $\Delta_f z$, определяемый равенством:

$$\Delta_f z = \frac{\partial z}{\partial v} + f\frac{\partial z}{\partial u}, \tag{9}$$

где z и f суть какие-нибудь функции независимых переменных u, v. Надо заметить, что этот оператор обладает свойствами обыкновенной производной:

$$\Delta_f(z_1 + z_2) = \Delta_f z_1 + \Delta_f z_2, \quad \Delta_f(z_1 z_2) = z_2\Delta_f z_1 + z_1\Delta_f z_2,$$
$$\Delta_f \ln z = \frac{\Delta_f z}{z}$$

и, кроме того,

$$\Delta_g\Delta_f z - \Delta_f\Delta_g z = \frac{\Delta_g f - \Delta_f g}{g - f}(\Delta_g z - \Delta_f z). \tag{10}$$

Наконец, для сокращения, мы полагаем:

$$p(z) = p - p'z + p''z^2, \quad q(z) = q - q'z + q''z^2.$$

Теперь детальное вычисление дифференциальных выражений Φ, Φ_1 и Φ_2 приводит нас к уравнениям, определяющим обе функции φ и ψ главного основания (φ, ψ), написанным в окончательной явной форме:

$$\Delta_\varphi \ln\left\{\frac{\Delta_\varphi\varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \varphi \end{vmatrix}}{K}\right\} + \frac{3\Delta_\varphi\varphi - \Delta_\psi\varphi - 2\begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \psi \end{vmatrix}}{\psi - \varphi} = 0; \tag{I}$$

$$\Delta_\varphi\left\{\Delta_\psi \ln\sqrt{K} + \frac{\Delta_\psi\varphi - \Delta_\varphi\psi}{\psi - \varphi} + \frac{\Delta_\psi\psi - \begin{vmatrix} p(\psi) & 1 \\ q(\psi) & \varphi \end{vmatrix}}{\psi - \varphi}\right\} +$$

$$+ \frac{\Delta_\psi\varphi - \Delta_\varphi\psi}{\psi - \varphi}\left\{\Delta_\psi \ln\sqrt{K} + \frac{\Delta_\psi\varphi - \Delta_\varphi\psi}{\psi - \varphi} + \frac{\Delta_\psi\psi - \begin{vmatrix} p(\psi) & 1 \\ q(\psi) & \varphi \end{vmatrix}}{\psi - \varphi}\right\} +$$

$$+ \Delta_\psi\left\{\Delta_\varphi \ln\sqrt{K} + \frac{\Delta_\psi\varphi - \Delta_\varphi\psi}{\psi - \varphi} - \frac{\Delta_\varphi\varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \varphi \end{vmatrix}}{\psi - \varphi}\right\} +$$

$$+ \frac{\Delta_\psi\varphi - \Delta_\varphi\psi}{\psi - \varphi}\left\{\Delta_\varphi \ln\sqrt{K} + \frac{\Delta_\psi\varphi - \Delta_\varphi\psi}{\psi - \varphi} - \frac{\Delta_\varphi\varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \psi \end{vmatrix}}{\psi - \varphi}\right\} +$$

$$+2\,\frac{\Delta_\varphi\varphi-\begin{vmatrix}p(\varphi) & 1\\ q(\varphi) & \varphi\end{vmatrix}}{\psi-\varphi}\cdot 2\,\frac{\Delta_\psi\psi-\begin{vmatrix}p(\psi) & 1\\ q(\psi) & \psi\end{vmatrix}}{\psi-\varphi}=0; \qquad \text{(II)}$$

$$\Delta_\psi \ln\left\{\frac{\Delta_\varphi\psi-\begin{vmatrix}p(\psi) & 1\\ q(\psi) & \psi\end{vmatrix}}{K}\right\}-\frac{3\Delta_\psi\psi-\Delta_\varphi\psi-2\begin{vmatrix}p(\psi) & 1\\ q(\psi) & \varphi\end{vmatrix}}{\psi-\varphi}=0. \qquad \text{(III)}$$

В дальнейшем мы будем писать систему (Σ) этих уравнений в сжатой форме

$$\Phi=0\ \text{(I)};\quad \Phi_1=0\ \text{(II)};\quad \Phi_2=0\ \text{(III)}.\quad (\Sigma)$$

Из этих уравнений мы извлечем решение поставленных проблем.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. М. Петерсон, Математич. сборник, 1866, **1**, 391—438.
2. Ribaucour. «Comptes Rendus», 1891, **113**, 304, 324—326.
3. K. Peterson. Ueber Kurven und Flächen, 1868.
4. K. Peterson. Ann. de Toulouse, Série 2, 1905, **7**, 5—107.
5. С. П. Фиников. Общая задача изгибания на главном основании. Диссертация. М., 1917.
6. С. С. Бюшгенс. Об изгибании поверхностей на главном основании. Диссертация. М., 1917.
7. С. П. Фиников. Изгибание на главном основании. 1937.

О СУЩЕСТВОВАНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, НЕ ИМЕЮЩИХ ГЛАВНОГО ОСНОВАНИЯ. III, IV*

III. Строение уравнений, определяющих главные основания. Мы отсылаем читателя к нашим предыдущим сообщениям. Уравнение (I), $\Phi = 0$ не содержит производных функции ψ; оно содержит вторые производные функции φ заключенными в члене $\Delta_\varphi \Delta_\varphi \varphi$; оно содержит третьи производные функций E, F, G заключенными в члене $\Delta_\varphi K$. Уравнение (III), $\Phi_2 = 0$, имеет точно такое же строение: здесь только функции φ и ψ меняются ролями. Уравнение (II), $\Phi_1 = 0$, содержит вторые производные функций φ и ψ заключенными в разности $\Delta_\psi \Delta_\psi \varphi - \Delta_\varphi \Delta_\varphi \psi$, так как, согласно формуле (10), разность $\Delta_g \Delta_f z - \Delta_f \Delta_g z$ содержит только производные 1-го порядка функции z; наконец, оно содержит четвертые производные функций E, F, G заключенными в сумме $\Delta_\varphi \Delta_\psi K + \Delta_\psi \Delta_\varphi K$.

Но очевидно, что

$$\left.\begin{aligned} \Delta_\varphi \Delta_\varphi \varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + 2\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} + \varphi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \ldots; \\ \Delta_\psi \Delta_\psi \psi &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + 2\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial u\, \partial v} + \psi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \Delta_\psi \Delta_\psi \varphi - \Delta_\varphi \Delta_\varphi \psi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + 2\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} + \psi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \\ - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + 2\varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial u\, \partial v} + \varphi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}\right) + \ldots, \end{aligned} \tag{12}$$

$$K = M \left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right) + \ldots,$$

где $M = -\frac{1}{2}\sqrt{EG - F^2}$ и где мы удерживаем лишь производные 2-го порядка. Следовательно, если мы будем сохранять лишь старшие производные, опуская из них смешанные производные, то получим:

$$\Delta_\varphi \Delta_\psi K + \Delta_\psi \Delta_\varphi K = 2M \left(\frac{\partial^4 E}{\partial v^4} + \varphi\psi \frac{\partial^4 G}{\partial u^4}\right) + \ldots. \tag{13}$$

IV. Решение поставленных проблем. Три соотношения $\Phi = 0$, $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, которым подчинены две функции φ и ψ, можно рассматривать как систему (Σ) трех уравнений с частными производными, определяющую три

---

* Докл. АН СССР, 1938, 19, № 4, 227—232.

неизвестные функции: φ, ψ и одну из функций E, F и G, взятую по желанию. Этого замечания, высказанного С. П. Финиковым, достаточно, чтобы провести со всей строгостью доказательство существования аналитических поверхностей S, не имеющих главного основания. В самом деле, возьмем за неизвестные функции φ, ψ и E и будем рассматривать функции F и G как данные нам. Если мы внесем эти величины функций F и G в уравнения:

$$\Phi = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0 \quad (\Sigma)$$

и если заметим, что система уравнений (Σ), рассматриваемая как определяющая неизвестные функции φ, ψ и E в силу формул (11) — (13), немедленно приводится к нормальной форме Коши — Ковалевской:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = \Phi^*, \quad \frac{\partial^4 E}{\partial v^4} = \Phi_1{}^*, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = \Phi_2{}^*, \qquad (\Sigma^*)$$

то тогда на основании теоремы, доказанной нами в недавнем сообщении[1], можно отыскать такой многочлен $P(u, v)$ от букв u, v с целыми коэффициентами, что будем иметь строгое неравенство $|E - P(u, v)| > 0$ внутри всякой области D, лежащей в плоскости u, v, причем это неравенство будет справедливым при любых функциях φ, ψ и E, удовлетворяющих системе (Σ). Отсюда мы немедленно заключаем, что если вставим в уравнения $\Phi = 0$, $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ вместо буквы E многочлен $P(u, v)$, то полученная таким образом система (Σ) трех уравнений не может быть удовлетворена никакими двумя аналитическими функциями φ и ψ. Это есть случай заведомой несовместности уравнений $\Phi = 0$, $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$.

Таким образом мы приходим к следующему предложению, строго доказанному:

Теорема I. *Для любых заданных функций $F(u, v)$ и $G(u, v)$ двух независимых переменных u, v можно всегда отыскать такой многочлен $E(u, v)$ от букв u, v с целыми коэффициентами, что* всякая *аналитическая поверхность S, имеющая форму $ds^2 = E\,du^2 + 2F du\,dv + G\,dv^2$ своим линейным элементом, есть поверхность, лишенная главного основания.*

Для того чтобы узнать, не имеются ли такие алгебраические поверхности, необходимо войти в некоторые детали рассуждения, сделанного в нашем указанном сообщении. Прежде всего важно заметить, что находящаяся там функция $F(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ была получена путем алгебраического исключения. Отсюда следует, что в рассматриваемом здесь случае системы (Σ^*) функция $F(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ независимых переменных $t_1, t_2, \ldots, t_s$, голоморфная и нетождественная нулю, зависит аналитически от букв F и G и их частных производных до известного порядка p, причем никакие другие буквы, ни параметры, ни переменные, не войдут в F. С другой стороны, если мы заменим переменные $t_1, t_2, \ldots, t_s$ определенными частными

[1] Докл. АН СССР, 1938, 18, № 8.

производными

$$\frac{\partial^{k_1} E}{\partial v^{k_1}}, \quad \frac{\partial^{k_2} E}{\partial v^{k_2}}, \ldots, \frac{\partial^{k_s} E}{\partial v^{k_s}}$$

функции E, удовлетворяющей системе (Σ^*), взятыми по независимому переменному v, то мы должны получить выражение, тождественное нулю.

Заметив это, возьмем в качестве функций $F(u, v)$ и $G(u, v)$ какие-нибудь многочлены от букв u, v, которые будем считать данными нам многочленами. Мы начнем с того, что, согласно теореме указанного сообщения, отыщем многочлен E от букв u, v такой, что выражение $F\left(\frac{\partial^{k_1} E}{\partial v^{k_1}}, \frac{\partial^{k_2} E}{\partial v^{k_2}}, \ldots, \frac{\partial^{k_s} E}{\partial v^{k_s}}\right)$ будет голоморфным и отличным от нуля в точке $u = u^0$, $v = v^0$. Но известно, что система трех уравнений с частными производными

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \tag{14}$$

содержащая прямоугольные координаты x, y, z точки поверхности S, рассматриваемые как неизвестные функции, имеет решение $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, голоморфное в точке $u = u^0$, $v = v^0$. Следовательно, если разложения Тэйлора функций x, y, z остановить на членах достаточно высокого порядка m, то мы получим такие три многочлена $P(u, v)$, $Q(u, v)$, $R(u, v)$ от букв u, v, что когда мы заменим в выражении $F\left(\frac{\partial^{k_1} E}{\partial v^{k_1}}, \frac{\partial^{k_2} E}{\partial v^{k_2}}, \ldots, \frac{\partial^{k_s} E}{\partial v^{k_s}}\right)$ буквы E, F, G их выражениями через прямоугольные координаты x, y, z по формулам (14), а затем буквы x, y, z заменим соответственно многочленами $P(u, v)$, $Q(u, v)$, $R(u, v)$, то полученное выражение F будет продолжать оставаться голоморфным и отличным от нуля в точке u^0, v^0 [1]. Отсюда немедленно следует, что поверхность S, определенная уравнениями:

$$x = P(u, v), \quad y = Q(u, v), \quad z = R(u, v),$$

есть алгебраическая и не имеющая главного основания.

Итак, мы можем пополнить предыдущее предложение следующим образом:

Теорема II. *Можно найти такие три многочлена $P(u, v)$, $Q(u, v)$, $R(u, v)$ от букв u, v, что алгебраическая поверхность S, определенная тремя уравнениями $x = P(u, v)$, $y = Q(u, v)$, $z = R(u, v)$, будет поверхностью без главного основания* [2].

---

[1] Легко узнать здесь принцип непрерывности, примененный законным образом.

[2] После того, как это было нами написано, С. П. Фиников указал другой путь для доказательства этого предложения. В его методе, также отправляющемся от ука-

Для того, чтобы пойти дальше, возвратимся к системе (Σ) уравнений $\Phi = 0$, $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, рассматриваемых как определяющие неизвестные функции φ и ψ. Здесь мы считаем функции E, F и G данными нам. Вот точные аналитические факты, относящиеся к этой системе[1].

1) Всякая частная производная функции φ и функции ψ может быть выражена рациональным образом только через двенадцать количеств:

$$\varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial u},\ \frac{\partial\varphi}{\partial v},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2},\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial u^3},\qquad \psi,\ \frac{\partial\psi}{\partial u},\ \frac{\partial\psi}{\partial v},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v},\ \frac{\partial^3\psi}{\partial u^3},\ \frac{\partial^4\psi}{\partial u^4},$$

рассматриваемых как независимые переменные (данные функции E, F, G и их частные производные сюда могут входить).

2) Общее решение φ, ψ системы (Σ) (если эта система допускает решения) может быть написано в виде:

$$\varphi = H(u, v, C_1 C_2, \ldots, C_{12}),$$
$$\psi = H_1(u, v, C_1, C_2, \ldots, C_{12}),$$

где H и H_1 обозначают две аналитические функции двух независимых переменных u, v и двенадцати параметров $C_1, C_2, \ldots, C_{12}$, из которых одни могут зависеть от других.

С другой стороны, определение количества $X = x^2$ (см. наше предшествующее сообщение) зависит от вполне интегрируемой системы:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = A_0 X^2 + A_1 X + A_2, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = B_0 X^2 + B_1 X + B_2, \tag{7}$$

где все A и B суть дифференциальные выражения, зависящие лишь от букв E, F, G, φ, ψ, a, b и их частных производных. Здесь две функции a и b связаны соотношением (6): $ab = K/(\psi - \varphi)^2$, и мы, не ограничивая нисколько общности рассуждений, имеем право положить $a = b = \sqrt{K}/(\psi - \varphi)$. Применяя метод Майера к системе (7), мы приходим к одному и только одному уравнению Риккати:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = (A_0{}^* + \lambda B_0{}^*)\, X^2 + (A_1{}^* + \lambda B_1{}^*)\, X + (A_2{}^* + \lambda B_2{}^*), \tag{15}$$

где через A^* и B^* обозначен результат замены в соответствующих A и B буквы v через λu; λ здесь есть параметр. Общее решение X уравнения Риккати (15), $X = C\alpha + \beta/C\gamma + 1$, в котором следует параметр λ заменить опять на v/u, есть аналитическая функция двух независимых переменных u, v и тринадцати параметров $C_1, C_2, \ldots, C_{12}, C$. Аналогичное заключение нужно сделать и для первого коэффициента δ второй квадратичной

занной теоремы теории уравнений с частными производными, в дальнейшем применяются формулы, данные Гауссом и Дарбу (1).

[1] Заметим, что можно рассматривать эти аналитические факты, относящиеся здесь собственно лишь к частной системе (Σ), как вытекающие из одного общего предложения относительно систем уравнений с частными производными. Доказательство этого предложения слишком длинно, чтобы быть помещенным здесь.

формы $\delta du^2 + 2\delta' du\,dv + \delta'' dv^2$ поверхности S, имеющей данную форму $ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2$ своим линейным элементом и наверное допускающей главное основание, так как, следуя формуле (5), мы имеем $\delta = ax + b/x$, где $x^2 = X$ и где $a = b = \sqrt{K}/(\psi - \varphi)$. Значит, если мы положим $v = v^0$, то δ становится вполне определенной аналитической функцией лишь одного независимого переменного u и тринадцати параметров $C_1, C_2, \ldots, C_{12}, C$:

$$\delta = \omega(u, C_1, C_2, \ldots, C_{12}, C). \tag{16}$$

Но никакая определенная аналитическая функция $A[z, C', C'', \ldots, C^{(k)}]$ одного независимого переменного z и произвольных параметров $C', C'', \ldots$, находящихся в конечном числе k, не может никогда пробегать все возможные аналитические функции $f(z)$ переменного z, когда параметры $C', C'', \ldots$ заставляют принимать, один независимо от другого, всевозможные численные значения. Это есть общий аналитический факт, отнюдь не являющийся прямым следствием диагонального процесса Кантора (если $k > 1$), но проистекающий из того обстоятельства, что коэффициенты разложения Тэйлора:

$$A[z, C', C'', \ldots, C^{(k)}] =$$
$$= A_0 + \frac{A_1}{1!}(z - z_0) + \frac{A_2}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{A_n}{n!}(z - z_0)^n + \ldots$$

суть вполне определенные аналитические функции параметров $C', C'', \ldots$. Отсюда следует, что все коэффициенты A_i суть вполне определенные аналитические функции ограниченного числа их ($\leqslant k$) и, значит, не могут быть выбраны произвольно. Бесконечность аналитических функций $f(z)$, не изображающихся формулой $A[z, C', C'', \ldots C^{(k)}]$, есть бесконечность, зависящая от произвольной аналитической функции одного переменного.

Возвращаясь к равенству (16), мы видим, что имеется бесконечность аналитических функций $\Omega(z)$, заведомо не изображаемых формулой $\omega(u, C_1, C_2, \ldots, C_{12}, C)$, причем эта бесконечность зависит от произвольной функции одного независимого переменного.

Но, с другой стороны, единственными связями, налагаемыми на коэффициенты δ, δ', δ'' второй квадратичной формы, являются: два уравнения с частными производными Кодацци:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\delta}{\partial v} - \frac{\partial\delta'}{\partial u} + p\delta + p'\delta' + p''\delta'' = 0, \\ &\frac{\partial\delta''}{\partial u} - \frac{\partial\delta'}{\partial v} + q\delta + q'\delta' + q''\delta'' = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и конечное уравнение Гаусса

$$\delta\delta'' - \delta'^2 = K. \tag{3}$$

И так как уравнения (2) Кодацци, рассматриваемые как определяющие неизвестные функции δ и δ', $\delta'' = (K + \delta'^2)/\delta$, имеют нормальную форму Коши — Ковалевской, то всякая поверхность $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$, имеющая $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ своим линейным элементом, вполне определена знанием двух аналитических функций одного независимого переменного, $\delta(u, v^0)$ и $\delta'(u, u^0)$, выбираемых произвольно. Мы заключаем отсюда, что поверхность S, для которой $\delta(u, v^0) = \Omega(u)$, не может допускать никакого главного основания.

Таким образом мы приходим к следующему предложению:

Теорема III. *Для всякой данной аналитической не развертывающейся поверхности S имеется бесконечность, зависящая от двух произвольных функций одного переменного, аналитических поверхностей S', наложимых на S и не имеющих никакого главного основания.*

Иначе говоря, «почти все» аналитические не развертывающиеся поверхности S, принадлежащие данному линейному элементу ds, лишены главного основания.

Как немедленное следствие доказанной теоремы мы получаем предложение:

Существует бесконечно много аналитических поверхностей постоянной кривизны (произвольной ненулевой), не имеющих нникакого главного основания.

Это геометрическое предложение, очевидно, противоположно тому, ставшему классическим (2) предложению, которое гласит:

Всякая аналитическая минимальная поверхность имеет главное основание.

Заключение. Задача изгибания на главном основании постоянно привлекала внимание московских геометров с момента опубликования работ Карла Михайловича Петерсона (1866 г.), причем самая проблема общности этого изгибания оставалась неразрешенной. Мы доказали строго, что поверхности, допускающие главное основание, образуют весьма узкое семейство. Это обстоятельство нисколько не умаляет важности относящихся сюда исследований: достаточно упомянуть, что конические сечения, имеющие столь большое значение, составляют лишь незначительную часть всех плоских кривых.

После доказанного ясно, что существование главного основания есть геометрический феномен, весьма редкий. Можно думать, что это существование связано с самою пространственною формой рассматриваемой поверхности. Достаточно вероятно, что если какая-нибудь аналитическая поверхность S лишена главного основания, то и всякая другая аналитическая поверхность S, достаточно «близкая» к поверхности S, будет также лишена его.

Необходимые и достаточные условия

Проблемами, несравнимо более трудными, являются следующие:

Проблема 1. *Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы данный линейный элемент $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ имел главное основание.*

Проблема 2. *Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы данная поверхность $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$ имела главное основание.*

В первом случае речь идет о существовании и фактическом получении полной системы результатов $R\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}\right) = 0$, $R_1 = 0, \ldots$, которую претендуют иметь, производя «исключения» функций φ и ψ между тремя уравнениями с частными производными: $\Phi = 0$ (I), $\Phi_1 = 0$ (II), $\Phi_2 = 0$ (III).

Во втором случае речь идет об аналогичной системе результатов $R\left(E, F, G, \delta, \delta', \delta'', \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial \delta}{\partial u}, \ldots\right) = 0$, $R_1 = 0, \ldots$, которую имеют в виду получить, выполняя «исключение» функций φ и ψ между уравнениями $\Phi = 0$ (I), $\Phi_2 = 0$ (III) и конечным уравнением $\delta\varphi\psi + \delta'(\varphi + \psi) + \delta'' = 0$ (IV).

По-видимому, вошло в обычай рассматривать обе эти проблемы, как превышающие возможности современного анализа благодаря очевидной сложности уравнений, определяющих главные основания.

В дальнейшем мы вернемся к этим проблемам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces, III, 251—255.
2. Peterson. Ueber Kurven und Flächen. 1868.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ИЗГИБАНИЯ *

§ 1. В сообщении Академии «О существовании алгебраических поверхностей, не имеющих главного основания. III, IV» мною было опубликовано без доказательства следующее предложение [1]:

Теорема III. *Для всякой данной аналитической не развертывающейся поверхности S имеется бесконечность, зависящая от двух произвольных функций одного переменного, аналитических поверхностей S', наложимых на S и не имеющих никакого главного основания.*

Как там же мною было указано, это означает, что «почти все» аналитические не развертывающиеся поверхности S, принадлежащие данному линейному элементу

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

лишены главного основания. В частности, это означает, что существует бесконечно много аналитических поверхностей постоянной кривизны (произвольной отличной от нуля), не имеющих никакого главного основания. Таким образом, отсюда вытекает, что поверхности, допускающие главное основание, образуют весьма узкое семейство и что существование главного основания есть весьма редкий геометрический феномен.

Ввиду указанного значения для теории изгибания рассматриваемой теоремы, а также ввиду других следствий, которые могут быть из нее извлечены, полное ее доказательство должно быть где-нибудь опубликовано. Нижеследующие строки имеют это своей целью.

§ 2. Мы предполагаем рассматриваемую поверхность S аналитической и ее линейный элемент данным равенством

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{1}$$

где E, F и G суть некоторые данные аналитические функции независимых переменных u, v.

Известно, что всякая другая аналитическая поверхность S', наложимая на поверхность S, при надлежащем выборе системы криволинейных координат имеет свой линейный элемент определенным равенством (1),

---

* Изв. АН СССР, ОТН, 1939, № 2, 81—106; № 7, 115—132; № 10, 65—84.

[1] См. Докл. АН СССР, 1938, 19, № 4, стр. 231 (сообщение 21 марта 1938 г.).

и наоборот, всякая поверхность S', линейный элемент которой определен формулой (1), наложима на данную поверхность S.

Нами приняты следующие обозначения.

Символы Кристоффеля мы обозначаем так:

$$\left.\begin{aligned} p &= \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}, & p' &= -2\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}, & p'' &= \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}, \\ q &= \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}, & q' &= -2\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}, & q'' &= \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Таким образом, буквы p, p', p'', q, q', q'' являются вполне определенными выражениями, составленными только из букв E, F, G и их частных производных 1-го порядка по u и по v.

Мы вводим два квадратных трехчлена $p(z)$ и $q(z)$, определенных равенствами:

$$p(z) = p - p'z + p''z^2, \quad q(z) = q - q'z + q''z^2, \tag{3}$$

в которых коэффициенты p, p', p'', q, q', q'' суть указанные символы Кристоффеля, буква же z есть какая-нибудь нейтральная буква, т. е. не получившая еще никакого специального смысла (кроме общего — быть числом).

Вторую квадратичную форму поверхности S мы пишем в виде:

$$D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2, \tag{4}$$

причем ее «приведенные» коэффициенты обозначаем через δ, δ', δ'', т. е. определяем их равенствами:

$$\delta = \frac{D}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \delta' = \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \delta'' = \frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{5}$$

Буквой K мы обозначаем полную кривизну поверхности S; известно, что K дается вполне определенным выражением, составленным только из символов Кристоффеля и их частных производных 1-го порядка по u и по v, т. е. выражается вполне определенным образом единственно через буквы E, F, G и их частные производные 2-го порядка по u и по v.

Известно, что приведенные коэффициенты δ, δ', δ'' второй квадратичной формы связаны только двумя уравнениями Кодацци с частными производными:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\delta}{\partial v} - \frac{\partial\delta'}{\partial u} + p\delta + p'\delta' + p''\delta'' = 0, \\ \frac{\partial\delta''}{\partial u} - \frac{\partial\delta'}{\partial v} + q\delta + q'\delta' + q''\delta'' = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

и одним конечным уравнением Гаусса

$$\delta\delta'' - \delta'^2 = K, \tag{7}$$

во всем же другом δ, δ', δ'' свободны.

Последнее обстоятельство весьма важно. Известно, что поверхность S вполне определяется (до положения ее в пространстве) знанием шести функций E, F, G, δ, δ', δ'' независимых переменных u, v; такая поверхность будет нами обозначаться через $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$. Поэтому, принимая во внимание тот произвол, который допускают при определении функций δ, δ', δ'' уравнения Кодацци (6) и уравнение Гаусса (7), мы легко можем оценить, каково многообразие $\{S'\}$ всех аналитических поверхностей S', наложимых на заданную поверхность S. Каждая из таких поверхностей S' при надлежащем выборе системы криволинейных координат имеет своим линейным элементом

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{1}$$

и, следовательно, все эти поверхности S' будут отличаться друг от друга и от поверхности S лишь приведенными коэффициентами δ, δ', δ'' второй квадратичной формы; при этом важно заметить, что всякая поверхность S', наложимая на S, определяет тройку $(\delta, \delta', \delta'')$ приведенных коэффициентов, как и наоборот: всякая тройка $(\delta, \delta', \delta'')$ приведенных коэффициентов вполне определяет (до положения в пространстве) поверхность S', наложимую на данную поверхность S.

Обращаясь теперь к уравнению Гаусса (7), мы видим, что оно позволяет коэффициент δ'' выразить через коэффициенты δ и δ':

$$\delta'' = \frac{K + \delta'^2}{\delta}. \tag{8}$$

Внося это выражение для δ'' в уравнения Кодацци (6), мы получаем два уравнения с частными производными первого порядка, определяющие неизвестные функции δ и δ'. Легко видеть, что система этих двух уравнений имеет нормальный вид систем Коши — Ковалевской. Действительно, переписав уравнения Кодацци (6) в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial v} &= \frac{\partial \delta'}{\partial u} - (p\delta + p'\delta' + p''\delta''), \\ \frac{\partial \delta'}{\partial v} &= \frac{\partial \delta''}{\partial u} + (q\delta + q'\delta' + q''\delta''), \end{aligned}\right\} \tag{6*}$$

мы замечаем, что подстановка (8) не введет в правые части уравнений системы (6*) никаких производных по букве v; поэтому система (6*), после выполнения подстановки (8), будет продолжать сохранять нормальную форму Коши — Ковалевской. Отсюда следует, что общий интеграл системы (6*), где предполагаем δ'' выраженным по формуле (8),

$$\delta(u, v), \quad \delta'(u, v),$$

допускает выбор функций аргумента u

$$\delta(u, v_0), \ \delta'(u, v_0)$$

произвольным, каково бы ни было постоянное v_0, лишь бы функция $\delta(u, v_0)$ не уничтожалась тождественно. Из сказанного ясно, что многообразие коэффициентов δ, δ', δ'' второй квадратичной формы, а вместе с ним и многообразие всех аналитических поверхностей S', наложимых на S, есть многообразие, зависящее от двух произвольных аналитических функций одного независимого переменного.

§ 3. Перейдем теперь к вопросу о существовании главного основания на заданной аналитической поверхности S. Главное основание мы предполагаем задаваемым двумя дифференциальными уравнениями 1-го порядка:

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u, v), \quad \frac{dv}{du} = \psi(u, v), \tag{9}$$

где φ и ψ суть две различные функции независимых переменных u, v, непрерывные до частных производных 3-го порядка включительно. В дальнейшем выяснится, что если данная поверхность S есть аналитическая, то функции φ и ψ, если они существуют, суть аналитические. Главное основание, если оно существует и определяется дифференциальными уравнениями (9), мы будем коротко обозначать символом (φ, ψ).

Геометрически главное основание есть сеть кривых, начерченных на данной поверхности S, причем через каждую точку $M(u, v)$ поверхности S проходит по одной линии того и другого семейства кривых, соединение которых и образует рассматриваемую сеть. Оба эти семейства кривых, начерченных на S, получаются так: сначала мы на плоскости uOv наносим семейство интегральных кривых дифференциального уравнения $\frac{dv}{du} = \varphi(u, v)$ и затем семейство интегральных кривых дифференциального уравнения $\frac{dv}{du} = \psi(u, v)$. Если точка $m(u, v)$ плоскости движется по интегральным кривым какого-нибудь из этих дифференциальных уравнений, то соответствующая точка $M(u, v)$ поверхности S вычерчивает рассматриваемое семейство кривых сети. Эта сеть и есть главное основание.

Чтобы иметь главное основание на данной поверхности S, нужно иметь функции φ и ψ, а они определяются рядом условий, вопрос о совместности которых и является основным вопросом о существовании или несуществовании главного основания на данной поверхности S.

Первое условие, налагаемое на функции φ и ψ, определяющие главное основание (φ, ψ), состоит в требовании тождества:

$$\delta\varphi\psi + \delta'(\varphi + \psi) + \delta'' = 0, \tag{10}$$

выражающего тот геометрический факт, что главное основание (φ, ψ) на поверхности S есть сопряженная сеть на этой поверхности.

Затем, функции φ и ψ, определяющие главное основание (φ, ψ), и коэффициенты δ, δ' и δ'' второй квадратичной формы поверхности S связаны тремя важными соотношениями[1]:

[1] Эти соотношения были даны в моем сообщении Академии «О существовании алгебраических поверхностей, не имеющих главного основания. I, II», появившемся в «Докладах Академии наук СССР» (1938, 19, № 1—2, стр. 24; сообщение 4 марта 1938 г.). Ср. С. С. Бюшгенс. Об изгибании поверхностей на главном основании

$$\delta = (ax) + \left(\frac{b}{x}\right), \quad -\delta' = (ax)\varphi + \left(\frac{b}{x}\right)\psi, \quad \delta'' = (ax)\varphi^2 + \left(\frac{b}{x}\right)\psi^2, \tag{11}$$

где a и b суть какие-нибудь функции независимых переменных u, v, связанные в свою очередь между собою соотношением:

$$ab = \frac{K}{(\psi - \varphi)^2}, \tag{12}$$

и где определение буквы x требует дальнейших разъяснений.

Для этого введем сначала один оператор $\Delta_f z$, который мы рассматриваем как аналогичный обычному оператору частной производной. Мы определяем этот оператор равенством:

$$\Delta_f z = \frac{\partial z}{\partial v} + f\frac{\partial z}{\partial u}, \tag{13}$$

где z и f суть какие-нибудь функции зависимых переменных u, v. Следует сейчас же заметить, что этот оператор обладает свойствами обыкновенной производной:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_f(z_1 + z_2) = \Delta_f z_1 + \Delta_f z_2, \quad \Delta_f(z_1 z_2) = z_2 \cdot \Delta_f z_1 + z_1 \cdot \Delta_f z_2, \\ &\Delta_f \ln z = \frac{\Delta_f z}{z} \text{ и вообще } \Delta_f[F(z)] = F'(z)\cdot\Delta_f z. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Весьма важно отметить следующее свойство рассматриваемого оператора, выражаемое формулой:

$$\Delta_g\Delta_f z - \Delta_f\Delta_g z = \frac{\Delta_g f - \Delta_f g}{g - f}(\Delta_g z - \Delta_f z). \tag{15}$$

Смысл этого свойства в том, что два оператора 2-го порядка $\Delta_g\Delta_f z$ и $\Delta_f\Delta_g z$, отличающиеся друг от друга лишь переменой мест составляющих их операторов 1-го порядка, тождественны, если пренебрегать выражениями, составленными только из операторов 1-го порядка.

В самом деле, первая часть равенства (15) составлена лишь из операторов 1-го порядка, и поэтому, пренебрегая ею, мы отождествляем $\Delta_g\Delta_f z$ и $\Delta_f\Delta_g z$. Свойство это аналогично классическому свойству изменять порядок частного дифференцирования:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial u}.$$

(Диссертация. 1917, стр. 16). Я весьма сожалею, что эта работа, переданная мне ее автором лишь на моем докладе в заседании семинария по классической дифференциальной геометрии под руководством проф. С. П. Финикова в Институте математики при механико-математическом факультете Московского университета 27 декабря 1937 г., стала известна мне слишком поздно, когда размышления по этому предмету совершенно определились и мысль приняла уже твердую форму. Таким образом, здесь и в ближайших работах я буду вынужден не касаться содержания этой работы С. С. Бюшгенса, не подвергать ее анализу и пока не черпать из нее идей, которые могли бы явиться возможным импульсом для дальнейших размышлений.

Введя таким образом оператор $\Delta_f z$, мы рассматриваем шесть следующих выражений A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2:

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= \frac{2a^2}{K}\left\{\Delta_\varphi\varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \varphi \end{vmatrix}\right\};\\
A_1 &= \frac{2}{(\psi-\varphi)^2}\left[(\psi-\varphi)\,\Delta_\psi \ln b + (\Delta_\psi\psi - \Delta_\varphi\psi) + \left\{\Delta_\psi\psi - \begin{vmatrix} p(\psi) & 1 \\ q(\psi) & \varphi \end{vmatrix}\right\}\right] + \\
&\quad + \frac{2}{(\psi-\varphi)^2}\left[(\psi-\varphi)\,\Delta_\varphi \ln a + (\Delta_\psi\varphi - \Delta_\varphi\varphi) - \left\{\Delta_\varphi\varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \psi \end{vmatrix}\right\}\right];\\
A_2 &= -\frac{2b^2}{K}\left\{\Delta_\psi\psi - \begin{vmatrix} p(\psi) & 1 \\ q(\psi) & \psi \end{vmatrix}\right\};\\
B_0 &= -\frac{2a^2}{K}\varphi\left\{\Delta_\varphi\varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \varphi \end{vmatrix}\right\};\\
B_1 &= -\frac{2\varphi}{(\psi-\varphi)^2}\left[(\psi-\varphi)\,\Delta_\psi \ln b + (\Delta_\psi\psi - \Delta_\varphi\psi) + \left\{\Delta_\psi\psi - \begin{vmatrix} p(\psi) & 1 \\ q(\psi) & \varphi \end{vmatrix}\right\}\right] - \\
&\quad - \frac{2\psi}{(\psi-\varphi)^2}\left[(\psi-\varphi)\,\Delta_\varphi \ln a + (\Delta_\psi\varphi - \Delta_\varphi\varphi) - \left\{\Delta_\varphi\varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \psi \end{vmatrix}\right\}\right];\\
B_2 &= \frac{2b^2}{K}\psi\left\{\Delta_\psi\psi - \begin{vmatrix} p(\psi) & 1 \\ q(\psi) & \psi \end{vmatrix}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Мы замечаем, что выражения A_0, A_1, A_2, B_0, B_1 и B_2 суть дифференциальные, содержащие только буквы E, F, G, φ, ψ, a, b и их частные производные по независимым переменным u, v.

Введя выражения A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, мы можем дать[1] определение буквы x, содержащейся в формулах (11).

Положим для этого

$$X = x^2$$

и определим букву X системой двух уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = A_0X^2 + A_1X + A_2, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = B_0X^2 + B_1X + B_2. \tag{17}$$

Ясно, что необходимым (но не достаточным) условием для того, чтобы система (17) допускала своим решением X, является требование, чтобы X было корнем квадратного уравнения:

$$\left\{\frac{\partial A_0}{\partial v} - \frac{\partial B_0}{\partial u} + \begin{vmatrix} A_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix}\right\}X^2 + \left\{\frac{\partial A_1}{\partial v} - \frac{\partial B_1}{\partial u} + 2\begin{vmatrix} A_0 & A_2 \\ B_0 & B_2 \end{vmatrix}\right\}X + $$
$$+ \left\{\frac{\partial A_2}{\partial v} - \frac{\partial B_2}{\partial u} + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}\right\} = 0, \tag{18}$$

---

[1] Выражения (16) для A_0, A_1, A_2, B_0, B_1 и B_2 могут быть, разумеется, даны a priori, но тогда ниоткуда не следует связь их с числом x, содержащимся в соотношениях (11). Для того чтобы быть уверенным, что выражения A_0, A_1, A_2, B_0, B_1 и B_2 при посредстве системы уравнений (17) с частными производными определят нам именно то самое число x, которое фигурирует в соотношениях (11), необходимо знать в деталях весь вывод уравнений (I), (II), (III) главного основания (φ, ψ), что будет дано в другой работе.

которое можно написать в сокращенном виде:

$$\Phi X^2 + \Phi_1 X + \Phi_2 = 0. \tag{18*}$$

Сеть кривых (φ, ψ), начерченных на данной поверхности S, является главным основанием тогда и только тогда, когда имеем наличие трех одновременных тождеств:

$$\Phi = 0,\ \Phi_1 = 0 \text{ и } \Phi_2 = 0. \tag{19}$$

Детальное вычисление[1] дифференциальных выражений

$$\Phi,\ \Phi_1 \text{ и } \Phi_2$$

дает нам уравнения, определяющие обе функции φ и ψ главного основания (φ, ψ), написанные в окончательной явной форме:

$$\Delta_\varphi \ln\left\{\frac{\Delta_\varphi\varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \varphi \end{vmatrix}}{K}\right\} + \frac{3\Delta_\varphi\varphi - \Delta_\psi\varphi - 2\begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \psi \end{vmatrix}}{\psi - \varphi} = 0; \tag{I}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta_\varphi\left\{\Delta_\psi \ln\sqrt{K} + \frac{\Delta_\psi\varphi - \Delta_\varphi\psi}{\psi-\varphi} + \frac{\Delta_\psi\psi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\psi) & \varphi \end{vmatrix}}{\psi-\varphi}\right\} + \\
&+ \frac{\Delta_\psi\varphi - \Delta_\varphi\psi}{\psi-\varphi}\left\{\Delta_\psi \ln\sqrt{K} + \frac{\Delta_\psi\varphi - \Delta_\varphi\psi}{\psi-\varphi} + \frac{\Delta_\psi\psi - \begin{vmatrix} p(\psi) & 1 \\ q(\psi) & \varphi \end{vmatrix}}{\psi-\varphi}\right\} + \\
&+ \Delta_\psi\left\{\Delta_\varphi \ln\sqrt{K} + \frac{\Delta_\psi\varphi - \Delta_\varphi\psi}{\psi-\varphi} - \frac{\Delta_\varphi\varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \varphi \end{vmatrix}}{\psi-\varphi}\right\} + \\
&+ \frac{\Delta_\psi\varphi - \Delta_\varphi\psi}{\psi-\varphi}\left\{\Delta_\varphi \ln\sqrt{K} + \frac{\Delta_\psi\varphi - \Delta_\varphi\psi}{\psi-\varphi} - \frac{\Delta_\varphi\varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \psi \end{vmatrix}}{\psi-\varphi}\right\} + \\
&+ 2\,\frac{\Delta_\varphi\varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \varphi \end{vmatrix}}{\psi-\varphi} \cdot 2\,\frac{\Delta_\psi\psi - \begin{vmatrix} p(\psi) & 1 \\ q(\psi) & \psi \end{vmatrix}}{\psi-\varphi} = 0;
\end{aligned} \tag{II}$$

$$\Delta_\psi \ln\left\{\frac{\Delta_\psi\psi - \begin{vmatrix} p(\psi) & 1 \\ q(\psi) & \psi \end{vmatrix}}{K}\right\} - \frac{3\Delta_\psi\psi - \Delta_\varphi\psi - 2\begin{vmatrix} p(\psi) & 1 \\ q(\psi) & \varphi \end{vmatrix}}{\psi - \varphi} = 0. \tag{III}$$

---

[1] Весь вывод, довольно кропотливый, уравнений (I), (II), (III) главного основания (φ, ψ) со всеми деталями вычислений должен быть дан в какой-нибудь другой работе. Эти уравнения были опубликованы мною в «Докладах Академии наук СССР» (1938, 19, № 1—2, стр. 25—26; сообщение 4 марта 1938 г.). Замечу мимоходом, что невозможно говорить о новых уравнениях главного основания, но можно говорить лишь о неотмечавшейся ранее форме уравнений главного основания, могущей оказать некоторые услуги при исследовании тех или иных вопросов. Заслуга вывода уравнений главного основания принадлежит лишь первому их изобретателю, так как совершенно очевидно, что всякая система уравнений главного основания, которая составляется или которая будет составляться впоследствии каким-нибудь математиком, по необходимости будет эквивалентной системе уравнений первого автора и, следовательно, будет отличаться от нее лишь по форме, что в отношении существа дела является пунктом второстепенным.

Впервые уравнения главного основания составлены С. П. Финиковым («Общая задача изгибания на главном основании». Диссертация, М., 1917) в почти явном виде и С. С. Бюшгенсом (в уже упоминавшейся диссертации) в неявном виде в том же году (см. стр. 23 моего сообщения Академии наук 4 марта 1938 г.).

В дальнейшем мы будем писать систему (Σ) этих уравнений в сжатой форме:

$$\Phi = 0 \ (\mathrm{I}); \quad \Phi_1 = 0 \ (\mathrm{II}); \quad \Phi_2 = 0 \quad (\mathrm{III}). \qquad (\Sigma)$$

Определив из системы (Σ) неизвестные функции φ и ψ [если, разумеется, система (Σ) при данном линейном элементе $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$ совместная, т.е. допускающая решение или решения], мы вставляем их в формулы (16), в которых без малейшего ограничения общности рассуждений можно положить

$$a = b = \frac{\sqrt{K}}{\psi - \varphi}\,. \tag{20}$$

Мы видим, что наши выражения A_0, A_1, A_2, B_0, B_1 и B_2 получают при этом совершенно определенный смысл, так как при фиксированных функциях φ и ψ эти выражения становятся также фиксированными функциями независимых переменных u, v. Мы замечаем также, что система двух уравнений с частными производными (17) становится системой, вполне интегрируемой, потому что условие интегрируемости (18) этой системы удовлетворяется тождественно при всяких значениях букв u, v, X.

Отсюда мы заключаем, что определение буквы X по методу Майера выполняется интегрированием только одного уравнения Риккати.

Полагая для этой цели

$$v = \lambda u,$$

мы имеем одно уравнение Риккати:

$$\frac{dX}{du} = (A_0^* + \lambda B_0^*)\,X^2 + (A_1^* + \lambda B_1^*)X + (A_2^* + \lambda B_2^*), \tag{21}$$

в котором временно рассматриваем букву λ как параметр (т. е. как неопределенное постоянное) и где звездочкой (*) обозначен результат подстановки в выражение всюду вместо буквы v произведения λu. В этих условиях уравнение (21) становится уравнением Риккати, содержащим одну неизвестную функцию X одного независимого переменного u (так как параметр λ при интегрировании этого уравнения во внимание не принимается). Поэтому общий интеграл уравнения (21) имеет вид:

$$X = \frac{\alpha C + \beta}{\lambda C + 1}\,, \tag{22}$$

где C есть произвольное постоянное общего интеграла и α, β, γ обозначают вполне определенные функции независимого переменного u и параметра λ.

Восстанавливая в формуле (22) значение буквы λ как отношения v/u, т. е. полагая $\lambda = v/u$, и вспоминая, что $X = x^2$, мы окончательно имеем полное определение буквы x:

$$x = \sqrt{\frac{\alpha^* C + \beta^*}{\gamma^* C + 1}}\,, \tag{23}$$

где α^*, β^*, γ^* обозначают результаты замены в функциях $\alpha(u, \lambda)$, $\beta(u, \lambda)$, $\gamma(u, \lambda)$ буквы λ отношением v/u.

Букву x, определенную по формуле (23), нужно внести в формулы (11). Это дает нам при фиксированном главном основании (φ, ψ) бесконечность троек (δ, δ', δ'') коэффициентов второй квадратичной формы, зависящую от одного произвольного параметра C, и, значит, семейство поверхностей S', зависящее от одного параметра C, наложимых на данную поверхность S и сохраняющих сеть (φ, ψ) сопряженною: это и есть изгибание на главном основании.

Сделанное заключение, без сомнения, покажется читателю слишком расплывчатым, и здесь действительно необходимо некоторое уточнение.

Во-первых, во всех написанных нами формулах нет никакого знаменателя, составленного из известных (т. е. данных нам) функций, который мог бы обратиться в нуль и тем самым расстроить точность логических заключений. Исключение составляет полная кривизна K поверхности S, которая несколько раз фигурирует в знаменателях. Поэтому, предполагая, что никогда не имеем дела с развертывающимися поверхностями, мы исключаем этот случай и, следовательно, обеспечиваем себе отличие K от нуля.

Во-вторых, интегрирование уравнения Риккати (21) не может заставить пропасть произвольное постоянное C в выражении (22) общего интеграла. Поэтому с изменением параметра C функция X действительно изменяется, вместе с чем изменяется и численное значение буквы x (при заданных значениях независимых переменных u, v). Но тогда формулы (11) показывают, что с изменением параметра C тройка (δ, δ', δ'') коэффициентов второй квадратичной формы действительно изменяется, т. е. мы действительно получаем бесчисленное множество существенно различных поверхностей S', изгибающихся непрерывным образом (в силу непрерывного изменения параметра C) на рассматриваемом фиксированном главном основании (φ, ψ). Отметить это было необходимо, так как иначе могло быть сделано возражение, что при изменении параметра C в частных случаях (т. е. при надлежащем подборе E, F, G) коэффициенты δ, δ', δ'' второй квадратичной формы могут не изменяться и, значит, главное основание (φ, ψ) может ложиться на одну и ту же поверхность S', а не на существенно различные. Теперь это обстоятельство устранено.

Но вместе с тем должно быть подчеркнуто уже другое обстоятельство: данная нам аналитическая поверхность S может не иметь никакого главного основания, но его вполне могут иметь аналитические поверхности S', наложимые на S (лишь некоторые и, как увидим дальше, никогда все, за исключением, разумеется, отброшенного случая развертывающихся поверхностей).

Это обстоятельство соответствует следующей аналитической обстановке: если система (Σ) трех уравнений (I), (II), (III) с частными производными

$$\Phi = 0 \quad (\mathrm{I}), \qquad \Phi_1 = 0 \quad (\mathrm{II}), \qquad \Phi_2 = 0 \quad (\mathrm{III}), \qquad (\Sigma)$$

определяющая две неизвестных функции φ, ψ и не содержащая никаких других букв, кроме E, F и G, не допускает в действительности никакого решения φ, ψ, тогда на данной поверхности S не может быть никакого главного основания, так же как и на всех аналитических поверхностях S', наложимых на S. В этом случае мы говорим, вместе с С. П. Финиковым, что «данный линейный элемент $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ не имеет совсем главных оснований».

Если же система (Σ) допускает решение или решения, то тогда каждое найденное главное основание (φ, ψ), как было указано, порождает непрерывную серию поверхностей S', наложимых на S, изгибающихся на этом главном основании (φ, ψ). Эта непрерывная серия изгибания поверхностей S' аналитически определяется, во-первых, рассматриваемым линейным элементом $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ данной аналитической поверхности S и, во-вторых, тройкой $(\delta, \delta', \delta'')$ коэффициентов второй квадратичной формы, определяемых по формулам (11), в которых буква x, определяемая по формуле (23), зависит существенным образом от произвольного параметра C, порождающего рассматриваемую серию изгибания поверхностей S'.

Если система (Σ) допускает несколько различных решений (φ, ψ), тогда многообразие $\{S'\}$ всех аналитических поверхностей S', наложимых на данную поверхность S, содержит в себе несколько серий изгибания, вообще отличных друг от друга. Серии эти, содержащиеся в многообразии $\{S'\}$, могут скрещиваться (т. е. «пересекаться») между собой, но могут итти и мимо, не имея общих элементов. Здесь обстоятельства могут быть самыми разнообразными, и вопрос о тех или иных возможностях даже не поставлен для изучения.

Одно лишь можно считать выясненным: серии изгибания не могут заполнить все многообразие $\{S'\}$ аналитических поверхностей S', наложимых на данную неразвертывающуюся поверхность S. В дальнейшем мы увидим, что аналитические поверхности S', принадлежащие к тем или другим сериям изгибания, образуют многообразие, зависящее самое большее от тринадцати непрерывных параметров, тогда как все многообразие $\{S'\}$ поверхностей S', наложимых на S, есть многообразие не параметрическое, а функциональное, зависящее, как мы видели, от двух произвольных функций одного аргумента. Поэтому поверхности S', наложимые на S и обладающие главным основанием, образуют ничтожно малую часть всего многообразия $\{S'\}$ поверхностей S', наложимых на S. Следовательно, во всяком таком многообразии $\{S'\}$ заведомо имеются аналитические поверхности S', наложимые на S и не имеющие главного основания. И так как от выбора поверхности S в многообразии $\{S'\}$ линейный элемент $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ не изменяется, то более общим является случай, когда данная аналитическая поверхность S лишена главного основания, в то время как в многообразии $\{S'\}$ могут содержаться поверхности S', наложимые на S и обладающие главным основанием.

Но самым общим и правильным является тот случай, когда многообразие $\{S'\}$ совсем не имеет ни одной поверхности с главным основанием. Наличие таких случаев было мною установлено[1] для линейных элементов $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ с произвольными аналитическими коэффициентами $F(u, v)$ и $G(u, v)$, лишь бы первый коэффициент $E(u, v)$ был многочленом от букв u, v с надлежащим образом подобранными целыми коэффициентами.

§ 4. Переходим к решению вопроса о максимально возможном «числе» решений (φ, ψ) системы (Σ), определяющей главные основания для данного линейного элемента:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{1}$$

При этом мы не задаемся целью ни в точности определить это максимальное «число» решений, ни отыскать ту форму линейного элемента, при которой это максимальное число решений является достигнутым на деле. Равным образом мы не рассматриваем здесь ни интересной проблемы о минимальном «числе» решений (φ, ψ) системы (Σ), предполагая, разумеется, эти решения имеющимися фактически, ни важной проблемы о минимальном числе главных оснований на индивидуальной поверхности S. Напомнив лишь, что С. П. Фиников определил максимальное число главных оснований, укладывающихся на индивидуальной поверхности, и открыл, что единственные действительные поверхности, каждая из которых допускает индивидуальным образом максимальное «число» главных оснований, есть класс минимальных геликоидов: на каждом из них имеется ∞^2 главных оснований (т. е. многообразие, зависящее от двух произвольных параметров)[2].

---

[1] См. мое сообщение «О существовании алгебраических поверхностей, не имеющих главного основания III, VI» (Докл. АН СССР, 1938, 19, № 4, 228; сообщение 21 марта 1938 г.).

[2] Определение максимального числа главных оснований на индивидуальной поверхности и доказательство того, что оно достигается лишь на классе действительных минимальных геликоидов, выполнено С. П. Финиковым в главе V указанной выше его диссертации («Возможное число главных оснований на поверхности», стр. 176—188). Впоследствии Гамбье присоединил сюда мнимый минимальный геликоид (см. внесенный им в мемуар С. П. Финикова «Déformation d'une surface et réseaux conjugués persistants» параграф «Surfaces imaginaires» («Bulletin des Sciences mathématiques» (2), 1930, 54, p. 27—31). Заметим, что класс минимальных геликоидов является классом подобных между собой поверхностей, так что если пренебрегать различиями, происходящими от изменения поверхностью места в пространстве или от принятия другой единицы масштаба, то в этом случае можно говорить об одном минимальном геликоиде.

Переходя к нашей задаче, обратим сначала внимание на форму уравнений, образующих систему (Σ).

В этих уравнениях нет никаких других известных букв, кроме букв E, F, G и их частных производных, так как буква K выражается через E, F, G и их частные производные, а квадратичные трехчлены $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ имеют своими коэффициентами символы Кристоффеля, точно так же выражающиеся через E, F, G и их частные производные.

Впрочем, при решении того вопроса, который мы здесь наметили, нам нет большой необходимости входить в рассмотрение структурной зависимости уравнений системы (Σ) от букв E, F и G как от таковых; таким образом, мы не интересуемся зависимостью буквы K и коэффициентов трехчленов $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ от букв E, F и G, но будем просто принимать их как данные функции, не стараясь найти их разложение на буквы E, F и G.

Совсем иное дело, когда речь идет о структурной зависимости уравнений системы (Σ) от независимых букв φ и ψ: здесь мы должны весьма тщательно проследить эту зависимость.

Первое, что здесь бросается в глаза, это полное отсутствие частных производных от этих букв по u и по v и замена этих частных производных двумя операторами $\Delta\varphi$ и $\Delta\psi$. Это сделано вполне сознательно, но цель, которая при этом преследовалась, вовсе не придание наиболее сжатой формы этим уравнениям при сохранении их совершенной явности. Эту цель введенный нами оператор $\Delta_f z$ достигает довольно неловким образом, так как упаковочный эффект оператора $\Delta_f z$ не очень высок: читатель в этом легко убеждается, просто разглядывая уравнения системы (Σ), которые еще достаточно длинны. Хотя попарное тождество выражений в фигурных скобках показывает, что оператор $\Delta_f z$ уже близок к обнаружению более глубокой внутренней симметрии уравнения (II) системы (Σ), но во всяком случае для компактности системы (Σ) следовало бы оператор $\Delta_f z$ заменить другим. Истинная же цель введения оператора $\Delta_f z$ была другой: читатель видит из формул (14) и (15), что оператор $\Delta_f z$ обладает всеми главными свойствами обычного оператора частного дифференцирования, включая даже свойство независимости от порядка частного дифференцирования, которое, как уже было указано, здесь заменяется тем свойством, что разность результатов переставленных операторов оказывается выразимой через операторы низшего порядка.

Эта более или менее совершенная аналогия оператора $\Delta_f z$ с оператором частного дифференцирования наводит на мысль о простом переносе теорем о системах уравнений с частными производными на системы с операторами $\Delta_f z$. В этом случае хорошо изученные свойства уравнений с частными производными будут моделями для аналогичных свойств уравнений с операторами $\Delta_f z$. Этот перенос может оказать ценные услуги при рассмотрении системы (Σ), структура которой в операторах Δ_φ и Δ_ψ, как сейчас увидим, весьма простая. Составление для этой системы (Σ) модели в обычных операторах частного дифференцирования дает ясные указания на то, как нужно поступать при намерении получить результат или совокупность результатов для этой системы, т. е. аналитическое условие или условия, наложенные на буквы E, F, G и необходимые и достаточные для того, чтобы система (Σ) допускала решение.

Формула оператора $\Delta_f z$:

$$\Delta_f z = \frac{\partial z}{\partial v} + f\frac{\partial z}{\partial u} \tag{13}$$

показывает, что выражение, содержащее лишь операторы 1-го порядка (т. е. не наложенные один на другой), в обычных операторах частного дифференцирования является также дифференциальным выражением 1-го порядка. Оператор 2-го порядка $\Delta_g\Delta_f z$, т. е. составленный из двух операторов 1-го порядка с разными индексами f и g, наложенных друг на друга, выражается через частные производные 2-го порядка.

Рассматривая с этой точки зрения систему (Σ), мы видим, что она написана в операторах 2-го порядка и является линейной относительно этих старших операторов.

Так как оператор $\Delta_f z$ управляем всеми законами обычного частного дифференцирования, то мы имеем для первого уравнения (1) системы (Σ):

$$\Delta_\varphi \ln\left\{\frac{\Delta_\varphi\varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \varphi\end{vmatrix}}{K}\right\} = \Delta_\varphi \ln\left\{\Delta_\varphi\varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \varphi\end{vmatrix}\right\} - \Delta_\varphi \ln K =$$

$$= \frac{\left\{\Delta_\varphi\varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \varphi\end{vmatrix}\right\}}{\Delta_\varphi\varphi\left\{\Delta_\varphi\varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \varphi\end{vmatrix}\right\}} - \Delta_\varphi \ln K = \frac{\Delta_\varphi\Delta_\varphi\varphi - \Delta_\varphi\begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \varphi\end{vmatrix}}{\left\{\Delta_\varphi\varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \varphi\end{vmatrix}\right\}} - \Delta_\varphi \ln K.$$

Отсюда мы заключаем, что, умножая первое уравнение (I) системы (Σ) на фигурную скобку $\left\{\Delta_\varphi\varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \varphi\end{vmatrix}\right\}$ и перенося все операторы первого порядка направо, мы придаем этому уравнению простой вид:

$$\Delta_\varphi\Delta_\varphi\varphi = \Omega_1(\varphi, \Delta_\varphi\varphi, \Delta_\psi\varphi, \psi),$$

где Ω_1 обозначает рациональную функцию от четырех написанных аргументов, являющуюся многочленом второй степени от операторов 1-го порядка. Коэффициенты этой рациональной функции суть известные функции независимых переменных u, v.

Так как третье уравнение (III) системы (Σ) получается переменой ролей букв φ и ψ, то мы сразу же можем написать это уравнение в виде:

$$\Delta_\psi\Delta_\psi\psi = \Omega_1(\psi, \Delta_\psi\psi, \Delta_\varphi\psi, \varphi).$$

Второе уравнение (II) системы (Σ) кажется на первый взгляд более трудным. Здесь операторы 2-го порядка от букв φ и ψ могут получиться лишь от членов

$$\Delta_\varphi\left\{\frac{\Delta_\psi\varphi - \Delta_\varphi\psi}{\psi - \varphi} + \frac{\Delta_\psi\psi}{\psi - \varphi}\right\} + \Delta_\psi\left\{\frac{\Delta_\psi\varphi - \Delta_\varphi\psi}{\psi - \varphi} - \frac{\Delta_\varphi\varphi}{\psi - \varphi}\right\}.$$

Вспомнив формулу оператора произведения

$$\Delta_f(z_1 z_2) = z_2 \cdot \Delta_f z_1 + z_1 \cdot \Delta_f z_2, \tag{14}$$

мы, отбрасывая слагаемые, составленные только из операторов 1-го порядка, имеем:

$$\frac{\Delta_\varphi \Delta_\psi \varphi - \Delta_\varphi \Delta_\varphi \psi}{\psi - \varphi} + \frac{\Delta_\varphi \Delta_\psi \psi}{\psi - \varphi} + \frac{\Delta_\psi \Delta_\psi \varphi - \Delta_\psi \Delta_\varphi \psi}{\psi - \varphi} - \frac{\Delta_\psi \Delta_\varphi \varphi}{\psi - \varphi},$$

что можно написать в виде:

$$\frac{(\Delta_\varphi \Delta_\psi \varphi - \Delta_\psi \Delta_\varphi \varphi)}{\psi - \varphi} + \frac{(\Delta_\varphi \Delta_\psi \psi - \Delta_\psi \Delta_\varphi \psi)}{\psi - \varphi} + \frac{(\Delta_\psi \Delta_\psi \varphi - \Delta_\varphi \Delta_\varphi \psi)}{\psi - \varphi}.$$

Но здесь числители двух первых дробей суть операторы 1-го порядка, потому что они являются разностями двух инвертированных наложений (суперпозиций) операторов 1-го порядка. Поэтому нам остается лишь последнее слагаемое, существенно составленное из операторов 2-го порядка. Это нам показывает, что, умножая второе уравнение (II) системы (Σ) на разность $\psi - \varphi$ и перенося все операторы 1-го порядка направо, мы придаем этому уравнению простой вид:

$$\Delta_\psi \Delta_\psi \varphi - \Delta_\varphi \Delta_\varphi \psi = \Omega_2(\varphi,\ \Delta_\varphi \varphi,\ \Delta_\psi \varphi,\ \psi,\ \Delta_\varphi \psi,\ \Delta_\psi \psi),$$

где Ω_2 обозначает рациональную функцию от шести написанных аргументов, являющуюся многочленом второй степени от операторов 1-го порядка; коэффициенты этой рациональной функции суть известные функции независимых переменных u, v.

Таким образом, система (Σ) переписывается в операторах в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_\varphi \Delta_\varphi \varphi = \Omega_1(\varphi,\ \Delta_\varphi \varphi,\ \Delta_\psi \varphi,\ \psi), && (\mathrm{I}^*)\\
&\Delta_\psi \Delta_\psi \varphi - \Delta_\varphi \Delta_\varphi \psi = \Omega_2(\varphi,\ \Delta_\varphi \varphi,\ \Delta_\psi \varphi,\ \psi,\ \Delta_\varphi \psi,\ \Delta_\psi \psi), && (\mathrm{II}^*)\\
&\Delta_\psi \Delta_\psi \psi = \Omega_1(\psi,\ \Delta_\psi \psi,\ \Delta_\varphi \psi,\ \varphi). && (\mathrm{III}^*)
\end{aligned}\right\} \quad (\Sigma^*)$$

Мы видим, что «моделью» этой системы в обычных операторах частного дифференцирования служит система:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = \Omega_1\left(\varphi,\ \frac{\partial \varphi}{\partial u},\ \frac{\partial \varphi}{\partial v},\ \psi\right),\\
&\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = \Omega_2\left(\varphi,\ \frac{\partial \varphi}{\partial u},\ \frac{\partial \varphi}{\partial v},\ \psi,\ \frac{\partial \psi}{\partial u},\ \frac{\partial \psi}{\partial v}\right),\\
&\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = \Omega_1\left(\psi,\ \frac{\partial \psi}{\partial v}.\ \frac{\partial \psi}{\partial u},\ \varphi\right),
\end{aligned}$$

относительно которой законно ставить проблему «исключения» букв φ, ψ и составления результата или совокупности результатов для нее.

Возвращаясь к исследованию системы (Σ^*), мы перепишем ее в обычных операторах частного дифференцирования, для чего сначала заметим легко выводимые равенства:

$$\Delta_\varphi \Delta_\varphi \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + 2\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} + \varphi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \ldots$$

$$\Delta_\psi \Delta_\psi \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + 2\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial u\, \partial v} + \psi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + \ldots$$

$$\Delta_\psi \Delta_\psi \varphi - \Delta_\varphi \Delta_\varphi \psi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + 2\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} + \psi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \\ - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + 2\varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial u\, \partial v} + \varphi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}\right) + \ldots, \qquad (24)$$

где ненаписанные члены все суть частные производные 1-го порядка. Подставляя эти выражения в систему (Σ^*) и перенося все частные производные направо, мы переписываем рассматриваемую систему (Σ) в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + 2\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} + \varphi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = H_1\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \psi\right), && (\mathrm{I}^{**}) \\ &\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + 2\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} + \psi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \\ &- \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - 2\varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial u\, \partial v} - \varphi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = H_2\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial v}\right), && (\mathrm{II}^{**}) \\ &\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + 2\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial u\, \partial v} + \psi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = H_3\left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \varphi\right), && (\mathrm{III}^{**}) \end{aligned}\right\} (\Sigma^{**})$$

где H_1, H_2, H_3 обозначают рациональные функции от написанных аргументов, являющиеся многочленами второй степени от частных производных 1-го порядка. Коэффициенты этих рациональных функций суть известные функции независимых переменных u, v.

§ 5. Приступая к изучению системы (Σ^{**}), которую мы перепишем более сжато:

$$\left.\begin{aligned} \varphi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + 2\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} &= H_1 \quad (\mathrm{I}^{**}), \\ \psi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + 2\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \left(\varphi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + 2\varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\right) &= H_2 \quad (\mathrm{II}^{**}), \\ \psi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + 2\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} &= H_3 \quad (\mathrm{III}^{**}), \end{aligned}\right\} (\Sigma^{**})$$

мы даем себе отчет в том, что система эта может оказаться не имеющей ни одного решения φ, ψ (т. е. несовместной) и что в случае, когда она имеет решения, нам неизвестно их «число». Случай полного отсутствия решений φ, ψ вполне реален, так как мы показали существование линейных элементов $ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$ без главных оснований.

Поэтому будем рассматривать формальным образом систему (Σ^{**}), т. е. смотреть на φ и ψ просто как на буквы, входящие рационально, вместе с их частными производными, в выражения H_1, H_2, H_3. Мы докажем, что дифференцируя, исключая прямой подстановкой и разрешая алгебраические линейные уравнения с определителем, отличным от нуля (причем все это проделывается конечное число раз), мы приходим к выражению всех двенадцати частных производных 5-го порядка букв φ и ψ:

$$\frac{\partial^5\varphi}{\partial u^5}, \quad \frac{\partial^5\varphi}{\partial u^4\partial v}, \quad \frac{\partial^5\varphi}{\partial u^3\partial v^2}, \quad \frac{\partial^5\varphi}{\partial u^2\partial v^3}, \quad \frac{\partial^5\varphi}{\partial u\,\partial v^4}, \quad \frac{\partial^5\varphi}{\partial v^5},$$
$$\frac{\partial^5\psi}{\partial u^5}, \quad \frac{\partial^5\psi}{\partial u^4\,\partial v}, \quad \frac{\partial^5\psi}{\partial u^3\,\partial v^2}, \quad \frac{\partial^5\psi}{\partial u^2\partial v^3}, \quad \frac{\partial^5\psi}{\partial u\,\partial v^4}, \quad \frac{\partial^5\psi}{\partial v^5}.$$

через частные производные низших порядков, и что получающиеся при этом выражения для пятых производных суть рациональные относительно всех входящих в них букв и их частных производных.

Возьмем какое-нибудь натуральное число k, большее или равное пяти ($k \geqslant 5$), и рассмотрим систему всех частных производных k-го порядка букв φ и ψ. Для удобства мы вводим следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^k\varphi}{\partial u^k} = x_0, \quad \frac{\partial^k\varphi}{\partial u^{k-1}\,\partial v} = x_1, \ldots, \quad \frac{\partial^k\varphi}{\partial u^{k-i}\partial v^i} = x_i, \ldots, \quad \frac{\partial^k\varphi}{\partial v^k} = x_k,\\
&\frac{\partial^k\psi}{\partial u^k} = y_0, \quad \frac{\partial^k\psi}{\partial u^{k-1}\,\partial v} = y_1, \ldots, \quad \frac{\partial^k\psi}{\partial v^{k-i}\,\partial v^i} = y_i, \ldots, \quad \frac{\partial^k\psi}{\partial v^k} = y_k.
\end{aligned} \tag{25}$$

Таким образом, x_i и y_i обозначают частные производные k-го порядка от букв φ, ψ.

Введем еще одно обозначение, заимствованное из теории чисел (теории сравнений): если A и B суть два каких-нибудь выражения, составленные из частных производных порядков не выше k букв φ, ψ, и если они отличаются друг от друга лишь на выражение, составленное из частных производных порядков, строго меньших k, букв φ, ψ, тогда мы пишем:

$$A \equiv B.$$

Таким образом, если выражение A, например, совсем не содержит k-ых производных букв φ, ψ или производных более высокого порядка, то мы будем просто писать:

$$A \equiv 0.$$

Установив эти обозначения, применим теперь к трем уравнениям системы (Σ^{**}) все операторы порядка $k-2$:

$$\frac{\partial^{k-2}}{\partial u^{k-2}}, \quad \frac{\partial^{k-2}}{\partial u^{k-3}\partial v}, \quad \frac{\partial^{k-2}}{\partial u^{k-4}\partial v^2}, \ldots, \frac{\partial^{k-2}}{\partial v^{k-2}}.$$

Первое уравнение (I^{**}) системы (Σ^{**}) дает нам сравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi^2 x_0 + 2\varphi x_1 + x_2 \equiv 0,\\
&\varphi^2 x_1 + 2\varphi x_2 + x_3 \equiv 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi^2 x_{k-2} + 2\varphi x_{k-1} + x_k \equiv 0.
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Аналогично второе уравнение (II^{**}) системы (Σ^{**}) дает сравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\psi^2 x_0 + 2\psi x_1 + x_2 - (\varphi^2 y_0 + 2\varphi y_1 + y_2) \equiv 0,\\
&\psi^2 x_1 + 2\psi x_2 + x_3 - (\varphi^2 y_1 + 2\varphi y_2 + y_3) \equiv 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\psi^2 x_{k-2} + 2\psi_{k-1} + x_k - (\varphi^2 y_{k-2} + 2\varphi y_{k-1} + y_k) \equiv 0.
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Наконец, третье уравнение (III**) системы (Σ**) дает сравнения:

$$\left.\begin{aligned} \psi^2 y_0 + 2\psi y_1 + y_2 &\equiv 0, \\ \psi^2 y_1 + 2\psi y_2 + y_3 &\equiv 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi^2 y_{k-2} + 2\psi y_{k-1} + y_k &\equiv 0. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Сравнения (26) приводят нас к формуле:

$$x_m \equiv (-1)^{m-1}\,[(m-1)\,\varphi^m x_0 + m\varphi^{m-1} x_1], \tag{29}$$

справедливой при $m = 0,\ 1,\ 2, \ldots, k$.

Ввиду важности этой формулы, проверка ее необходима. Справедливость ее непосредственно усматривается для $m = 0$ и для $m = 1$. Пусть формула верна для $m \leqslant i$, где $i < k$. Проверим ее для $m = i + 1$. Имеем:

$$\varphi^2 x_{i-1} + 2\varphi x_i + x_{i+1} \equiv 0.$$

Отсюда

$$x_{i+1} \equiv -\varphi^2 (-1)^{i-2}\,[(i-2)\,\varphi^{i-1} x_0 + (i-1)\,\varphi^{i-2} x_1] - \\ - 2\varphi\,(-1)^{i-1}\,[(i-1)\,\varphi^i x_0 + i\varphi^{i-1} x_1].$$

Значит,

$$x_{i+1} \equiv x_0\,[(-1)^{i-1}(i-2)\,\varphi^{i+1} + (-1)^i\, 2\,(i-1)\,\varphi^{i+1}] + \\ + x_1\,[(-1)^{i-1}(i-1)\,\varphi^i + (-1)^i\, 2i\varphi^i],$$

откуда

$$x_{i+1} \equiv (-1)^i\,[i\varphi^{i+1} x_0 + (i+1)\,\varphi^i x_1].$$

Мы видим, что эта формула совпадает с формулой (29) при $m = i + 1$, что и доказывает верность последней.

Аналогично, сравнения (28) приводят нас к формуле:

$$y_m \equiv (-1)^{m-1}\,[(m-1)\,\psi^m y_0 + m\psi^{m-1} y_1], \tag{30}$$

справедливой при $m = 0,\ 1,\ 2, \ldots, k$. Проверять эту формулу не нужно, так как сравнения (28) имеют вид сравнений (26).

Формулы (29) и (30) обнаруживают, что все производные k-го порядка $x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_k,\ y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_k$ букв φ, ψ выражаются явным образом через четыре начальные производные k-го порядка $x_0,\ x_1,\ y_0,\ y_1$ и через низшие производные.

Перейдем теперь к сравнениям (27). Общее сравнение этой группы имеет вид:

$$\psi^2 x_m + 2\psi x_{m+1} + x_{m+2} - (\varphi^2 y_m + 2\varphi y_{m+1} + y_{m+2}) \equiv 0,$$

где $m = 0,\ 1,\ 2, \ldots, k-2$.

Выражая в этой формуле буквы $x_m,\ x_{m+1},\ x_{m+2},\ y_m,\ y_{m+1},\ y_{m+2}$ по формулам (29) и (30), мы находим сравнение

$$x_0\varphi^m\,[m\,(\psi-\varphi) - (\psi+\varphi)] + x_1\varphi^{m-1}\,[m\,(\psi-\varphi) - 2\varphi] - \\ - y_0\psi^m\,[m\,(\psi-\varphi) + (\psi+\varphi)] - y_1\psi^{m-1}\,[m\,(\psi-\varphi) + 2\psi] \equiv 0, \tag{31}$$

справедливое для $m = 0,\ 1,\ 2, \ldots, k-2$.

Сравнение (31) очень важно: оно является линейным относительно последних остающихся невыраженными четырех начальных букв x_0, x_1, y_0, y_1. Естественно поэтому сделать в сравнении (31) число m равным каким-нибудь четырем отличным друг от друга целым неотрицательным числам

$$0 \leqslant m_1 < m_2 < m_3 < m_4$$

и затем разрешить полученные четыре сравнения относительно интересующих нас букв x_0, x_1, y_0, y_1 так, как вообще решается система четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными.

Но здесь должны быть соблюдены два условия. Во-первых, среди чисел $0, 1, 2, \ldots, k-2$ должны иметься четыре неравных друг другу целых числа. Это условие будет удовлетворено, если число k будет больше или равно пяти ($k \geqslant 5$). Ради этого мы и предположили с самого начала, что $k \geqslant 5$. Во-вторых, определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных x_0, x_1, y_0, y_1, должен быть отличным от нуля. Если этот определитель в самом деле отличен от нуля, тогда все производные k-го порядка от букв φ, ψ могут быть выражены через низшие производные. Если же все такие определители будут уничтожающимися, тогда ничего нельзя сказать о выразимости k-х производных через низшие.

Исследуем этот определитель, предположив, что $k \geqslant 5$. Имеем[1]:

$$D = \begin{vmatrix} [m_1(\psi-\varphi)-(\psi+\varphi)]\,\varphi^{m_1}, & [m_1(\psi-\varphi)-2\varphi]\,\varphi^{m_1-1}, \\ [m_1(\varphi-\psi)-(\psi+\varphi)]\,\psi^{m_1}, & [m_1(\varphi-\psi)-2\psi]\,\psi^{m_1-1} \\ [m_2(\psi-\varphi)-(\psi+\varphi)]\,\varphi^{m_2}, & [m_2(\psi-\varphi)-2\varphi]\,\varphi^{m_2-1}, \\ [m_2(\varphi-\psi)-(\psi+\varphi)]\,\psi^{m_2}, & [m_2(\varphi-\psi)-2\psi]\,\psi^{m_2-1} \\ [m_3(\psi-\varphi)-(\psi+\varphi)]\,\varphi^{m_3}, & [m_3(\psi-\varphi)-2\varphi]\,\varphi^{m_3-1}, \\ [m_3(\varphi-\psi)-(\psi+\varphi)]\,\psi^{m_3}, & [m_3(\varphi-\psi)-2\psi]\,\psi^{m_3-1} \\ [m_4(\psi-\varphi)-(\psi+\varphi)]\,\varphi^{m_4}, & [m_4(\psi-\varphi)-2\varphi]\,\varphi^{m_4-1}, \\ [m_4(\varphi-\psi)-(\psi+\varphi)]\,\psi^{m_4}, & [m_4(\varphi-\psi)-2\psi]\,\psi^{m_4-1} \end{vmatrix}.$$

Умножив вторую и четвертую колонны соответственно на φ и на ψ, мы будем иметь:

$$D = \frac{1}{\varphi\psi} \begin{vmatrix} [m_1(\psi-\varphi)-(\psi+\varphi)]\,\varphi^{m_1}, & [m_1(\psi-\varphi)-2\varphi]\,\varphi^{m_1}, \\ [m_1(\varphi-\psi)-(\psi+\varphi)]\,\psi^{m_1}, & [m_1(\varphi-\psi)-2\psi]\,\psi^{m_1} \\ [m_2(\psi-\varphi)-(\psi+\varphi)]\,\varphi^{m_2}, & [m_2(\psi-\varphi)-2\varphi]\,\varphi^{m_2}, \\ [m_2(\varphi-\psi)-(\psi+\varphi)]\,\psi^{m_2}, & [m_2(\varphi-\psi)-2\psi]\,\psi^{m_2}. \\ [m_3(\psi-\varphi)-(\psi+\varphi)]\,\varphi^{m_3}, & [m_3(\psi-\varphi)-2\varphi]\,\varphi^{m_3}, \\ [m_3(\varphi-\psi)-(\psi+\varphi)]\,\psi^{m_3}, & [m_3(\varphi-\psi)-2\psi]\,\psi^{m_3} \\ [m_4(\psi-\varphi)-(\psi+\varphi)]\,\varphi^{m_4}, & [m_4(\psi-\varphi)-2\varphi]\,\varphi^{m_4}, \\ [m_4(\varphi-\psi)-(\psi+\varphi)]\,\psi^{m_4}, & [m_4(\varphi-\psi)-2\psi]\,\psi^{m_4} \end{vmatrix}$$

[1] По техническим причинам каждая строка определителя D напечатана здесь двумя строчками.

Вычитая из первой колонны вторую и из третьей четвертую, мы получаем:

$$D=\frac{-1}{\varphi\psi}\begin{vmatrix} (\psi-\varphi)\varphi^{m_1}, & [m_1(\psi-\varphi)-2\varphi]\varphi^{m_1},\\ (\psi-\varphi)\psi^{m_1}, & [m_1(\varphi-\psi)-2\psi]\psi^{m_1}\\ (\psi-\varphi)\varphi^{m_2}, & [m_2(\psi-\varphi)-2\varphi]\varphi^{m_2},\\ (\psi-\varphi)\psi^{m_2}, & [m_2(\varphi-\psi)-2\psi]\psi^{m_2}\\ (\psi-\varphi)\varphi^{m_3}, & [m_3(\psi-\varphi)-2\varphi]\varphi^{m_3},\\ (\psi-\varphi)\psi^{m_3}, & [m_3(\varphi-\psi)-2\psi]\psi^{m_3}\\ (\psi-\varphi)\varphi^{m_4}, & [m_4(\psi-\varphi)-2\varphi]\varphi^{m_4},\\ (\psi-\varphi)\psi^{m_4}, & [m_4(\varphi-\psi)-2\psi]\psi^{m_4} \end{vmatrix}$$

или

$$D=-\frac{(\psi-\varphi)^2}{\psi\varphi}\begin{vmatrix} \varphi^{m_1}, & [m_1(\psi-\varphi)-2\varphi]\varphi^{m_1}, & \psi^{m_1}, & [m_1(\varphi-\psi)-2\psi]\psi^{m_1}\\ \varphi^{m_2}, & [m_2(\psi-\varphi)-2\varphi]\varphi^{m_2}, & \psi^{m_2}, & [m_2(\varphi-\psi)-2\psi]\psi^{m_2}\\ \varphi^{m_3}, & [m_3(\psi-\varphi)-2\varphi]\varphi^{m_3}, & \psi^{m_3}, & [m_3(\varphi-\psi)-2\psi]\psi^{m_3}\\ \varphi^{m_4}, & [m_4(\psi-\varphi)-2\varphi]\varphi^{m_4}, & \psi^{m_4}, & [m_4(\varphi-\psi)-2\psi]\psi^{m_4} \end{vmatrix}.$$

Умножив первую колонну на 2φ и прибавив ко второй, а также умножив третью колонну на 2ψ и прибавив к четвертой, мы получим:

$$D=-\frac{(\psi-\varphi)^2}{\psi\varphi}\begin{vmatrix} \varphi^{m_1} & m_1(\psi-\varphi)\varphi^{m_1} & \psi^{m_1} & m_1(\varphi-\psi)\psi^{m_1}\\ \varphi^{m_2} & m_2(\psi-\varphi)\varphi^{m_2} & \psi^{m_2} & m_2(\varphi-\psi)\psi^{m_2}\\ \varphi^{m_3} & m_3(\psi-\varphi)\varphi^{m_3} & \psi^{m_3} & m_3(\varphi-\psi)\psi^{m_3}\\ \varphi^{m_4} & m_4(\psi-\varphi)\varphi^{m_4} & \psi^{m_4} & m_4(\varphi-\psi)\psi^{m_4} \end{vmatrix},$$

откуда, наконец, будем иметь:

$$D=\frac{(\psi-\varphi)^4}{\varphi\psi}\begin{vmatrix} \varphi^{m_1} & m_1\varphi^{m_1} & \psi^{m_1} & m_1\psi^{m_1}\\ \varphi^{m_2} & m_2\varphi^{m_2} & \psi^{m_2} & m_2\psi^{m_2}\\ \varphi^{m_3} & m_3\varphi^{m_3} & \psi^{m_3} & m_3\psi^{m_3}\\ \varphi^{m_4} & m_4\varphi^{m_4} & \psi^{m_4} & m_4\psi^{m_4} \end{vmatrix}. \tag{32}$$

Нам нужно доказать, что определитель D не может обратиться в нуль, если $\psi\neq\varphi$, что мы, разумеется, предполагаем с самого начала, так как главное основание состоит из двух различных семейств кривых.

К сожалению, исследование определителя D затруднительно.

Прежде всего мы можем написать:

$$D=\frac{(\psi-\varphi)^4}{\psi\varphi}\varphi^{m_1+m_2+m_3+m_4}\begin{vmatrix} 1 & m_1 & \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{m_1} & m_1\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{m_1}\\ 1 & m_2 & \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{m_2} & m_2\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{m_2}\\ 1 & m_3 & \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{m_3} & m_3\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{m_3}\\ 1 & m_4 & \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{m_4} & m_4\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{m_4} \end{vmatrix},$$

или, обозначая отношение ψ/φ через букву x

$$x = \frac{\psi}{\varphi}, \tag{33}$$

мы имеем:

$$D = \frac{(\psi - \varphi)^4}{\varphi\psi} \varphi^{m_1+m_2+m_3+m_4} \begin{vmatrix} 1 & m_1 & x^{m_1} & m_1 x^{m_1} \\ 1 & m_2 & x^{m_2} & m_2 x^{m_2} \\ 1 & m_3 & x^{m_3} & m_3 x^{m_3} \\ 1 & m_4 & x^{m_4} & m_4 x^{m_4} \end{vmatrix}. \tag{34}$$

Нам нужно исследовать корни многочлена

$$\pi(x) = \begin{vmatrix} 1 & m_1 & x^{m_1} & m_1 x^{m_1} \\ 1 & m_2 & x^{m_2} & m_2 x^{m_2} \\ 1 & m_3 & x^{m_3} & m_3 x^{m_3} \\ 1 & m_4 & x^{m_4} & m_4 x^{m_4} \end{vmatrix}, \tag{35}$$

где мы предполагаем для целых чисел m_1, m_2, m_3 и m_4 неравенства:

$$0 \leqslant m_1 < m_2 < m_3 < m_4. \tag{36}$$

Так как в первую очередь мы рассматриваем действительные поверхности и действительные главные основания, то все дело сводится к тому, чтобы многочлен $\pi(x)$ не имел никаких действительных корней, кроме $x = 0$ и $x = 1$.

Прежде всего мы имеем равенство:

$$\pi(x) = x^{2m_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m_2 - m_1 & x^{m_2-m_1} & (m_2 - m_1) x^{m_2-m_1} \\ 1 & m_3 - m_1 & x^{m_3-m_1} & (m_3 - m_1) x^{m_3-m_1} \\ 1 & m_4 - m_1 & x^{m_4-m_1} & (m_4 - m_1) x^{m_4-m_1} \end{vmatrix},$$

откуда, вычитая из четвертой колонны вторую и из третьей первую, получаем:

$$\pi(x) = x^{2m_1} \begin{vmatrix} m_2 - m_1 & x^{m_2-m_1} - 1 & (m_2 - m_1)(x^{m_2-m_1} - 1) \\ m_3 - m_1 & x^{m_3-m_1} - 1 & (m_3 - m_1)(x^{m_3-m_1} - 1) \\ m_4 - m_1 & x^{m_4-m_1} - 1 & (m_4 - m_1)(x^{m_4-m_1} - 1) \end{vmatrix}.$$

Введем упрощающие обозначения. Полагаем:

$$\lambda_1 = m_2 - m_1, \ \lambda_2 = m_3 - m_1, \ \lambda_3 = m_4 - m_1.$$

Ясно, что λ_1, λ_2, λ_3 суть целые числа, удовлетворяющие, в силу (36), неравенствам:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3. \tag{37}$$

С помощью чисел λ_1, λ_2, λ_3 многочлен $\pi(x)$ переписывается в виде:

$$\pi(x) = x^{2m_1} \begin{vmatrix} \lambda_1 & x^{\lambda_1}-1 & \lambda_1(x^{\lambda_1}-1) \\ \lambda_2 & x^{\lambda_2}-1 & \lambda_2(x^{\lambda_2}-1) \\ \lambda_3 & x^{\lambda_3}-1 & \lambda_3(x^{\lambda_3}-1) \end{vmatrix}$$

или, еще иначе, в виде:

$$\pi(x) = x^{2m_1}(x^{\lambda_1}-1)(x^{\lambda_2}-1)(x^{\lambda_3}-1) \begin{vmatrix} \frac{\lambda_1}{x^{\lambda_1}-1} & \frac{\lambda_2}{x^{\lambda_2}-1} & \frac{\lambda_3}{x^{\lambda_3}-1} \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}. \tag{38}$$

Положим:

$$\rho(x) = \begin{vmatrix} \frac{\lambda_1}{x^{\lambda_1}-1} & \frac{\lambda_2}{x^{\lambda_2}-1} & \frac{\lambda_3}{x^{\lambda_3}-1} \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}. \tag{39}$$

Ясно, что $\rho(x)$ есть рациональная функция от переменного x, имеющая действительными все коэффициенты. Эту рациональную функцию $\rho(x)$ можно написать в виде:

$$\rho(x) = \frac{\lambda_1(\lambda_3-\lambda_2)}{x^{\lambda_1}-1} + \frac{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_3)}{x^{\lambda_2}-1} + \frac{\lambda_3(\lambda_2-\lambda_1)}{x^{\lambda_3}-1}, \tag{40}$$

причем мы имеем, очевидно,

$$\pi(x) = x^{2m_1}(x^{\lambda_1}-1)(x^{\lambda_2}-1)(x^{\lambda_3}-1)\cdot\rho(x). \tag{41}$$

Выражение (40) показывает, что рациональная функция $\rho(x)$ голоморфна, уничтожается в бесконечности и имеет своими полюсами точки, лежащие на окружности $|x| = 1$, описанной из точки $x = 0$ как из центра радиусом 1. Все эти полюсы суть простые (т. е. 1-го порядка).

При этом точка $x = +1$ не служит полюсом функции $\rho(x)$, но является нулем 1-го порядка.

В самом деле, при всяком натуральном числе λ мы имеем вблизи точки $x = +1$ сходящееся разложение

$$\frac{\lambda}{x^{\lambda}-1} = \frac{1}{x-1}[1 + a_1(\lambda)\cdot(x-1) + a_2(\lambda)\cdot(x-1)^2 + \ldots], \tag{42}$$

где

$$a_1(\lambda) = -\frac{\lambda-1}{2};\quad a_2(\lambda) = \frac{\lambda^2-1}{12}, \ldots \tag{43}$$

Делая в равенстве (42) число λ равным λ_1, λ_2, λ_3, умножая соответственно на разности $\lambda_3-\lambda_2$, $\lambda_1-\lambda_3$, $\lambda_2-\lambda_1$ и складывая, мы получаем:

$$\rho(x) = \frac{1}{x-1}[\Sigma(\lambda_3-\lambda_2) + \Sigma a_1(\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\cdot(x-1) +$$
$$+ \Sigma a_2(\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\cdot(x-1)^2 + \ldots].$$

В силу тождеств

$$\left.\begin{aligned}(\lambda_3-\lambda_2)+(\lambda_1-\lambda_3)+(\lambda_2-\lambda_1)=0,\\ \lambda_1(\lambda_3-\lambda_2)+\lambda_2(\lambda_1-\lambda_3)+\lambda_3(\lambda_2-\lambda_1)=0,\end{aligned}\right\}\tag{44}$$

мы находим, учитывая формулы (43):

$$\rho(x)=\frac{1}{12}[\lambda_1^2(\lambda_3-\lambda_2)+\lambda_2^2(\lambda_1-\lambda_3)+\lambda_3^2(\lambda_2-\lambda_1)]\cdot(x-1)+\ldots,$$

или

$$\rho(x)=\frac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)}{12}(x-1)+\ldots.$$

Это и показывает, что точка $x=+1$ есть всегда нуль 1-го порядка рациональной функции $\rho(x)$.

Другим нулем функции $\rho(x)$ является точка $x=0$, как в этом немедленно убеждаемся из второго тождества (44). При этом равенство

$$\frac{1}{1-x^\lambda}=1+x^\lambda+x^{2\lambda}+x^{3\lambda}+\ldots$$

показывает нам, что точка $x=0$ есть нуль порядка λ_1 для рациональной функции $\rho(x)$.

Единственно возможным полюсом для $\rho(x)$, лежащим на действительной оси, является точка

$$x=-1.$$

Эта точка может быть полюсом функции $\rho(x)$ только тогда, когда по крайней мере одно из натуральных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ будет четным. Но в случае нечетности всех трех натуральных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ рациональная функция $\rho(x)$ не только голоморфна в точке $x=-1$, но еще имеет эту точку своим третьим действительным нулем.

В этом мы тотчас же убеждаемся, полагая в формуле (40) число x равным -1 и обращаясь ко второму тождеству (44).

Наличие третьего действительного нуля у функции $\rho(x)$ важно и на первый взгляд делает сомнительной выразимость всех частных производных k-го порядка функции φ и ψ через производные низшего порядка для $k\geqslant 5$. Притом это сомнение касается того чрезвычайно важного случая, когда принимают как систему криволинейных координат оба семейства асимптотических линий рассматриваемой поверхности. В самом деле, в этом случае коэффициенты δ и δ'' второй квадратичной формы уничтожаются тождественно:

$$\delta=0 \text{ и } \delta''=0,$$

и уравнение (10) нам дает:

$$\psi=-\varphi;\tag{45}$$

следовательно, мы как раз получаем из формулы (33) наш только что рассмотренный случай, когда

$$x=\frac{\psi}{\varphi}=-1.$$

Но, к счастью, при ближайшем исследовании указанная опасность оказывается иллюзорной, и теорема о выразимости всех высших частных производных функций φ и ψ через низшие, начиная уже с производных 5-го порядка, получает непоколебимое основание.

Действительно, положим $k=5$[1]. Тогда в формуле (31) число m имеет единственно возможными только четыре значения

$$0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Следовательно, при $k=5$ мы должны иметь:

$$m_1=0,\ m_2=1,\ m_3=2,\ m_4=3.$$

Поэтому в этом случае мы имеем:

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2 \text{ и } \lambda_3=3,$$

и, следовательно, формула (38) нам дает:

$$\pi(x)=(x-1)(x^2-1)(x^3-1)\begin{vmatrix} \frac{1}{x-1} & \frac{2}{x^2-1} & \frac{3}{x^3-1} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \tag{38*}$$

т. е.

$$\pi(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ x-1 & 2(x^2-1) & 3(x^3-1) \end{vmatrix}.$$

Раскрывая этот определитель по элементам первой строки, получаем:

$$\pi(x)=(x^2-1)(x^3-1)-4(x-1)(x^3-1)+3(x-1)(x^2-1)=$$
$$=x^5-4x^4+6x^3-4x^2+x.$$

Следовательно, в этом случае мы имеем:

$$\pi(x)=x(x-1)^4.$$

Мы видим, что многочлен $\pi(x)$ имеет только два возможных нуля: $x=0$ и $x=1$. Никаких других нулей, ни действительных, ни мнимых у него совсем нет.

[1] Мы совсем оставляем в стороне исследование определителей 4-го порядка для случая $k>5$, ибо как бы любопытно ни было это исследование, оно нам в этот момент не нужно. Действительно, если мы получим выражение всех пятых производных через низшие, то получить выражение всех высших производных через производные порядка $\leqslant 4$ можно посредством другого метода, состоящего в последовательном дифференцировании полученных выражений для пятых производных и в немедленной прямой подстановке вместо пятых производных их выражений через низшие производные. Этот метод получения искомых выражений высших производных через производные порядка $\leqslant 4$ может привести к другим выражениям, но нам это безразлично, так как этот метод дифференцирования и прямой подстановки всегда достигает цели.

Это и доказывает со всей строгостью, что все пятые производные функций φ и ψ:

$$\frac{\partial^5\varphi}{\partial u^5}, \frac{\partial^5\varphi}{\partial u^4\partial v}, \frac{\partial^5\varphi}{\partial u^3\partial v^2}, \frac{\partial^5\varphi}{\partial u^2\partial v^3}, \frac{\partial^5\varphi}{\partial u\partial v^4}, \frac{\partial^5\varphi}{\partial v^5},$$

$$\frac{\partial^5\psi}{\partial u^5}, \frac{\partial^5\psi}{\partial u^4\partial v}, \frac{\partial^5\psi}{\partial u^3\partial v^2}, \frac{\partial^5\psi}{\partial u^2\partial v^3}, \frac{\partial^5\psi}{\partial u\partial v^4}, \frac{\partial^5\psi}{\partial v^5}$$

выразимы рациональным образом через низшие производные этих функций и через самые эти функции, причем зависимость от низших производных есть целая (а не дробная).

Иначе говоря, мы имеем двенадцать формул:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^5\varphi}{\partial u^i\partial v^j} &= P_{ij}\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^4\varphi}{\partial v^4}\,\middle|\, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^4\psi}{\partial v^4}\right), \\ \frac{\partial^5\psi}{\partial u^i\partial v^j} &= Q_{ij}\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^4\varphi}{\partial v^4}\,\middle|\, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^4\psi}{\partial v^4}\right), \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

где $i+j=5$ и значок i принимает значения 0, 1, 2, 3, 4, 5; что же касается функций P_{ij} и Q_{ij}, то это многочлены от производных функций φ и ψ (от первых производных до четвертых включительно) и рациональные функции от самих функций φ и ψ. Коэффициенты функций P_{ij} и Q_{ij} суть рациональные функции букв E, F и G, а также их частных производных. Никаких других функций, параметров или букв в выражениях P_{ij} и Q_{ij} не имеется.

Заметим, что фактическое получение функций P_{ij} и Q_{ij} не только вполне возможно, но даже не требует очень большого труда, так как для этого нужно только три раза дифференцировать данную систему (Σ^{**}), затем оперировать прямыми подстановками и наконец разрешить одну систему четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными, причем определитель D этой системы нами уже вычислен по формуле (46), потому что мы имеем:

$$D = \frac{(\psi-\varphi)^4}{\varphi\psi}\varphi^{m_1+m_2+m_3+m_4}\pi(x), \tag{34}$$

где $m_1=0$, $m_2=1$, $m_3=2$, $m_4=3$ и $x=\frac{\psi}{\varphi}$.

Отметим, наконец, что установленное предложение о выразимости пятых производных через низшие имеет силу для всяких поверхностей S и для всяких главных оснований (φ, ψ) на них, действительных или мнимых, потому что многочлен $\pi(x)$, даваемый формулой (46), имеет только два корня: $x=0$ и $x=1$.

Из формул (46) легко вывести важное заключение о выразимости вообще всякой производной порядка больше 5 функций φ и ψ через производные порядка $\leqslant 4$.

Действительно, дифференцируя один раз формулы (46), мы налево будем иметь производную порядка 6, а направо выражение, содержащее линейно производные порядка 5 и целым образом производные порядка $\leqslant 4$. Заменяя пятые производные по формулам (46) выражениями P_{ij} и Q_{ij}, мы, очевидно, выразим все шестые производные через производные порядка $\leqslant 4$. Дифференцируя один раз найденные выражения для шестых производных и заменяя пятые производные по формулам (46), мы находим седьмые производные выраженными через производные порядка $\leqslant 4$, и так далее до бесконечности.

Таким образом, мы приходим к предложению: все производные порядка выше 5 функций φ и ψ выразимы рациональным образом через эти функции и их производные порядка $\leqslant 4$, причем зависимость от этих производных целая (и не дробная):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^k\varphi}{\partial u^i \partial v^j} &= P_{ij}^{(k)}\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^4\varphi}{\partial v^4}\middle|\, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^4\psi}{\partial v^4}\right), \\ \frac{\partial^k\varphi}{\partial u^i \partial v^j} &= Q_{ij}^{(k)}\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^4\varphi}{\partial v^4}\middle|\, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^4\psi}{\partial v^4}\right). \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Здесь $k > 5$ и i равно $0, 1, 2, 3, \ldots, k$, причем $i + j = k$. Выражения $P_{ij}^{(k)}$ и $Q_{ij}^{(k)}$ суть рациональные функции всех входящих в них букв и многочлены от производных функций φ и ψ (от первых до четвертых включительно).

Важно заметить, что вовсе нет никакой необходимости предполагать в многочленах P_{ij} и Q_{ij}, а также в $P_{ij}^{(k)}$ и $Q_{ij}^{(k)}$ фигурирующими непременно все производные порядка $\leqslant 4$ функций φ и ψ. Таковых, если причислить сюда и самые функции φ и ψ, которые мы рассматриваем как производные нулевого порядка, имеется всего 30, но 18 из них выразимы через 12 остальных (целым образом через 10 производных не нулевого порядка и рациональным образом через φ и ψ).

В изображенной здесь схеме:

$$\begin{array}{c|c}
\varphi & \psi \\
\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\ \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \\
\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\right)\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right) & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right) \\
\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial u^3}\left(\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\,\partial v}\right)\left(\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial u\,\partial v^2}\right)\left(\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial v^3}\right) & \dfrac{\partial^3\psi}{\partial u^3}\left(\dfrac{\partial^3\psi}{\partial u^2\,\partial v}\right)\left(\dfrac{\partial^3\psi}{\partial u\,\partial v^2}\right)\left(\dfrac{\partial^3\psi}{\partial v^3}\right) \\
\left(\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial u^4}\right)\left(\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial u^3\partial v}\right)\left(\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial u^2\,\partial v^2}\right)\left(\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial u\,\partial v^3}\right)\left(\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial v^4}\right) & \dfrac{\partial^4\psi}{\partial u^4}\left(\dfrac{\partial^4\psi}{\partial u^3\,\partial v}\right)\left(\dfrac{\partial^4\psi}{\partial u^2\partial v^2}\right)\left(\dfrac{\partial^4\psi}{\partial u\,\partial v^3}\right)\left(\dfrac{\partial^4\psi}{\partial v^4}\right)
\end{array}$$

содержащей все 30 производных порядков $\leqslant 4$ (включая сюда производные нулевого порядка), все выразимые производные поставлены в скобках, причем каждая из них выразима целым образом через невыразимые производные не нулевого порядка, стоящие в той же строке и выше, и рациональным образом через самые функции φ и ψ.

Для того чтобы убедиться в указанном свойстве производных порядка $\leqslant 4$, обратимся к данной нам системе (Σ^{**}).

Эта система (Σ^{**}) непосредственно не связывает ни самих функций φ и ψ, ни их четырех первых производных $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial\psi}{\partial u}$, $\frac{\partial\psi}{\partial v}$. Но уже вторые производные оказываются связанными посредством уравнений этой системы. Вторых производных всего шесть, а связей три. Значит, в принципе, мы можем надеяться выразить три из вторых производных через другие три и низшие производные.

Это ожидание является оправданным, так как, введя для вторых производных обозначения:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = x_0,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = x_1,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = x_2,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} = y_0,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v} = y_1,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = y_2,$$

мы можем переписать данную нам систему (Σ^{**}) в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi^2x_0 + 2\varphi x_1 + x_2 \equiv 0\ (\mathrm{I}^{**}),\\ &\psi^2x_0 + 2\psi x_1 + x_2 - (\varphi^2y_0 + 2\varphi y_1 + y_2) \equiv 0\ (\mathrm{II}^{**}),\\ &\psi^2y_0 + 2\psi y_1 + y_2 \equiv 0\ (\mathrm{III}^{**}), \end{aligned}\right\} \qquad (\Sigma^{**})$$

где знак сравнения $\equiv$, сопровождаемый нулем, показывает, что в правой части находится выражение, содержащее лишь производные 1-го порядка и самые функции φ и ψ. При этом напомним, что выражения эти суть целые относительно указанных производных, степени не выше 2, и рациональные относительно φ и ψ.

Последнее сравнение системы (Σ^{**}) можно разрешить относительно буквы y_2. Подставив результат в первые два сравнения, мы решаем их относительно букв x_1 и x_2. Это законно, так как определитель из коэффициентов при этих буквах есть

$$\begin{vmatrix} 2\varphi & 1 \\ 2\psi & 1 \end{vmatrix} = 2(\varphi - \psi) \neq 0.$$

Таким образом, наша система дает нам буквы y_2, x_1, x_2, что и показывает выразимость производных

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right),\ \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\right),\ \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right).$$

Переходя к третьим производным, мы дифференцируем один раз по u и по v каждое из сравнений системы (Σ^{**}). Это дает нам, если мы введем обозначения:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^i\partial v^j} = x_j \text{ и } \frac{\partial^3\psi}{\partial u^i\partial v^j} = y_j \quad (i + j = 3).$$

сравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi^2 x_0 + 2\varphi x_1 + x_2 \equiv 0\\
&\varphi^2 x_1 + 2\varphi x_2 + x_3 \equiv 0\\
&\psi^2 x_0 + 2\psi x_1 + x_2 - (\varphi^2 y_0 + 2\varphi y_1 + y_2) \equiv 0\\
&\psi^2 x_1 + 2\psi x_2 + x_3 - (\varphi^2 y_1 + 2\varphi y_2 + y_3) \equiv 0\\
&\psi^2 y_0 + 2\psi y_1 + y_2 \equiv 0\\
&\psi^2 y_1 + 2\psi y_2 + y_3 = 0
\end{aligned}\right\}. \qquad (\Sigma_1^{**})$$

Пользуясь готовыми формулами (29) и (30), мы имеем:

$$x_m \equiv (-1)^{m-1}\left[(m-1)\varphi^m x_0 + m\varphi^{m-1} x_1\right], \tag{29}$$

$$y_m \equiv (-1)^{m-1}\left[(m-1)\psi^m y_0 + m\psi^{m-1} y_1\right], \tag{30}$$

где $m = 2, 3$. Следовательно, уже четыре производных 3-го порядка x_2, x_3, y_2, y_3 выражены через остальные производные 3-го порядка x_0, x_1, y_0, y_1. На последние у нас остаются только два уравнения, которые получаются из двух средних сравнений системы (Σ^{**}) подстановкой найденных x_2, x_3, y_2, y_3 и которые, согласно уже готовой формуле (31), пишутся в виде (если положить $m = 0$ и $m = 1$):

$$\begin{gathered}
x_0(\psi + \varphi) + x_1 2 + y_0(\psi + \varphi) + y_1 2 \equiv 0,\\
x_0 2\varphi^2 + x_1(3\varphi - \psi) + y_0 2\psi^2 + y_1(3\psi - \varphi) \equiv 0.
\end{gathered}$$

Определитель, составленный из коэффициентов, стоящих при буквах x_1 и y_1, есть

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3\varphi - \psi & 3\psi - \varphi \end{vmatrix} = 8(\psi - \varphi).$$

Мы видим, что он отличен от нуля, так как $\varphi \neq \psi$. Поэтому эти сравнения допускают решение относительно букв x_1 и y_1, что и показывает, что единственными невыразимыми третьими производными остаются

$$x_0 = \frac{\partial^3\varphi}{\partial u^3} \quad \text{и} \quad y_0 = \frac{\partial^3\psi}{\partial u^3}.$$

Нам осталось рассмотреть четвертые производные от функций φ и ψ. Полагая опять

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial u^i \partial v^j} = x_j \quad \text{и} \quad \frac{\partial^4\psi}{\partial u^i \partial v^j} = y_j \qquad (i + j = 4)$$

и применив к данной системе (Σ^{**}) операторы

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}, \quad \frac{\partial^2}{\partial v^2},$$

мы получаем систему сравнений:

$$\left.\begin{array}{r}\varphi^2x_0+2\varphi x_1+x_2 \equiv 0\\ \varphi^2x_1+2\varphi x_2+x_3 \equiv 0\\ \varphi^2x_2+2\varphi x_3+x_4 \equiv 0\\ \psi^2x_0+2\psi x_1+x_2-(\varphi^2y_0+2\varphi y_1+y_2)\equiv 0\\ \psi^2x_1+2\psi x_2+x_3-(\varphi^2y_1+2\varphi y_2+y_3)\equiv 0\\ \psi^2x_2+2\psi x_3+x_4-(\varphi^2y_2+2\varphi y_3+y_4)\equiv 0\\ \psi^2y_0+2\psi y_1+y_2\equiv 0\\ \psi^2y_1+2\psi y_2+y_3\equiv 0\\ \psi^2y_2+2\psi y_3+y_4\equiv 0\end{array}\right\}. \qquad (\Sigma_2^{**})$$

Крайние сравнения системы (Σ_2^{**}), т. е. три верхних и три нижних, разрешимы относительно $x_2, x_3, x_4, y_2, y_3, y_4$. Для них мы имеем готовые формулы:

$$x_m=(-1)^{m-1}[(m-1)\varphi^m x_0+m\varphi^{m-1}x_1], \qquad (29)$$

$$y_m=(-1)^{m-1}[(m-1)\psi^m y_0+m\psi^{m-1}y_1] \qquad (30)$$

для $m=2, 3, 4$. Формулы эти выражают шесть производных 4-го порядка $x_2, x_3, x_4, y_2, y_3, y_4$ через остальные производные 4-го порядка x_0, x_1, y_0, y_1. На эти последние у нас имеются три средних сравнения системы (Σ_2^{**}), которые, после замены x_m и y_m $(m=2, 3, 4)$ по формулам (29) и (30), дадут три сравнения (31) для $m=0$, 1 и 2.

В развернутом виде эти сравнения пишутся так:

$$\left.\begin{array}{r}x_0(\varphi+\psi)+x_1 2+y_0(\varphi+\psi)+y_1 2\equiv 0;\\ x_0 2\varphi^2+x_1(3\varphi-\psi)+y_0 2\psi^2+y_1(3\psi-\varphi)\equiv 0;\\ x_0\varphi^2(\psi-3\varphi)+x_1 2\varphi(\psi-2\varphi)+y_0\psi^2(\varphi-3\psi)+y_1 2\psi(\varphi-2\psi)\equiv 0.\end{array}\right\} (48)$$

Мы видим, что определитель, составленный из коэффициентов, стоящих при буквах x_0, x_1 и y_1, есть

$$D=\begin{vmatrix}\varphi+\psi & 2 & 2\\ 2\varphi^2 & 3\varphi-\psi & 3\psi-\varphi\\ \varphi^2(\psi-3\varphi) & 2\varphi(\psi-2\varphi) & 2\psi(\varphi-2\psi)\end{vmatrix}.$$

Вычитая из второй колонны третью и удаляя общий множитель за знак определителя у новой второй колонны, получаем:

$$D=-4(\psi-\varphi)\begin{vmatrix}\varphi+\psi & 0 & 2\\ 2\varphi^2 & 1 & 3\psi-\varphi\\ \varphi^2(\psi-3\varphi) & -(\psi+\varphi) & 2\varphi\psi-4\psi^2\end{vmatrix}.$$

Умножая вторую строку на $(\psi+\varphi)$ и прибавляя к третьей строке, имеем:

$$D=-4(\psi-\varphi)\begin{vmatrix}\varphi+\psi, & 0 & 2\\ 2\varphi^2 & 1 & 3\psi-\varphi\\ 3\varphi^2\psi-\varphi^3, & 0, & 4\varphi\psi-\psi^2-\varphi^2\end{vmatrix},$$

откуда

$$D=-4(\psi-\varphi)\begin{vmatrix}\varphi+\psi, & 2\\ 3\varphi^2\psi-\varphi^3, & 4\varphi\psi-\psi^2-\varphi^2\end{vmatrix}.$$

Умножая вторую колонну на φ, вычитая из первой и вынося общий множитель за знак определителя, имеем:

$$D=-4(\psi-\varphi)^2\begin{vmatrix}1 & 2\\ \varphi\psi & 4\varphi\psi-\varphi^2-\psi^2\end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$D=4(\psi-\varphi)^4\neq 0.$$

Мы видим, что определитель D во всех случаях отличен от нуля, так как предполагается, что $\varphi\neq\psi$.

Отсюда мы заключаем, что система (48) сравнений разрешима во всех случаях относительно букв x_0, x_1 и y_1. Это означает, что единственной невыразимой четвертой производной является $y_0=\frac{\partial^4\psi}{\partial u^4}$.

Таким образом, мы пришли к следующему общему предложению: все частные производные $\frac{\partial^k\varphi}{\partial u^i\,\partial v^j}$, $\frac{\partial^k\psi}{\partial u^i\,\partial v^j}$ функций φ и ψ порядка выше 4-го выразимы в виде совершенно определенных многочленов от десяти производных

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u},\ \frac{\partial\varphi}{\partial v},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2},\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial u^3},\ \frac{\partial\psi}{\partial u},\ \frac{\partial\psi}{\partial v},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v},\ \frac{\partial^3\psi}{\partial u^3},\ \frac{\partial^4\psi}{\partial u^4}$$

с коэффициентами, зависящими рационально от φ и ψ, а также от E, F, G и их частных производных. При этом составление таких выражений для пятых производных, требующее относительно небольшого числа дифференцирований, прямых подстановок и разрешения систем линейных уравнений с определителем не выше 4-го порядка и отличным от нуля, может быть фактически выполнено.

Здесь мы должны весьма внимательно отнестись к следующему важному обстоятельству: мы вовсе не утверждаем, что указанные 10 производных действительно нельзя выразить одни через другие. Более того, весьма вероятно, что между указанными 10-ю производными имеются связи, позволяющие выразить некоторые из этих производных через другие. Такие связи могут существовать хотя бы вследствие того, что изменение порядка дифференцирования

$$\left(\frac{\partial^k}{\partial u^i\,\partial v^j}\right)\left(\frac{\partial^l}{\partial u^p\,\partial v^q}\right)\varphi=\left(\frac{\partial^l}{\partial u^p\,\partial v^q}\right)\left(\frac{\partial^k}{\partial u^i\,\partial v^j}\right)\varphi\,.$$

где

$$i+j=k$$

и

$$p+q=l,$$

должно привести к одному и тому же численному результату, но может при этом привести к совершенно различным выражениям через указанные 10 производных и φ, ψ.

Мы отказываемся входить в какие-либо рассуждения относительно этого, так как пока нам не указан хорошо фиксированный порядок, ранее которого указанное обстоятельство наверное должно случиться, мы не выйдем за пределы бесполезных гаданий.

Сделаем следующие замечания о структуре выражений всех производных, начиная с 5-го порядка, через указанные 12 производных (включая сюда и самые функции φ и ψ).

Во-первых, указанный нами ход вычислений приводит к одному и только одному определенному выражению для всякой производной, начиная с пятого порядка, через указанные 12 производных. Это явствует из того, что выражения для пятых производных получаются решением системы четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными при определителе, заведомо отличном от нуля, а для высших производных дифференцированием этих выражений и прямой подстановкой пятых производных через низшие, причем мы всегда можем ограничиться для каждой производной одним определенным расположением дифференцирований, что и доказывает единственность изображения (при принятом расположении дифференцирований).

Во-вторых, можно уточнить вид этих выражений. Выражения эти все суть многочлены от указанных 12 производных, со знаменателями, равными степеням кривизны K и разности $\psi-\varphi$.

Это обстоятельство весьма важно, так как показывает, что на этой стадии рассуждений не приходится искать никаких особых частных случаев, потому что знаменатели могут уничтожаться лишь для развертывающихся поверхностей, $K=0$, которые мы с самого начала исключили из рассмотрения, как вполне тривиальный случай, и потому что мы предполагаем, что $\varphi \neq \psi$.

Факт выразимости пятых производных через низшие есть основной, и мы в следующих параграфах укажем на важные геометрические следствия этого факта.

§ 6. Мы видели, что система (Σ^{**})

$$\left.\begin{aligned}
\varphi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+2\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}&=H_1,\\
\psi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+2\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\left(\varphi^2\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+2\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)&=H_2,\\
\psi^2\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+2\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}&=H_3,
\end{aligned}\right\}(\Sigma^{**})$$

определяющая главное основание (φ, ψ) для линейного элемента $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, позволяет все частные производные 5-го порядка от функций φ и ψ выразить через их производные низшего порядка. При этом оказывается, что полученные выражения

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^5\varphi}{\partial u^i\,\partial v^j} &= P_i\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots \middle| \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^4\varphi}{\partial v^4} \middle| \psi, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^4\psi}{\partial v^4}\right), \\ \frac{\partial^5\psi}{\partial u^i\,\partial v^j} &= Q_i\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots \middle| \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^4\varphi}{\partial v^4} \middle| \psi, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^4\psi}{\partial v^4}\right) \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

суть многочлены от всех входящих в них букв и их частных производных, деленные на целую положительную степень кривизны K и разности $\psi - \varphi$.

Мы предполагаем линейный элемент ds^2 заданным; это означает, что мы рассматриваем три функции E, F и G как фиксированные. Мы предполагаем эти функции голоморфными в точке (u_0, v_0) и кривизну K отличной от нуля в этой точке, $(K_0) \neq 0$.

Заметив это, применим к системе (Σ^{**}) теорию Рикье — Жанэ.

Согласно этой теории, мы должны начать с расположения всех производных функций φ и ψ в определенную линейную последовательность так, чтобы из двух каких-нибудь производных одна была «предшествующей», а другая «последующей». Для краткости мы будем называть предшествующую производную «младшей», а последующую производную «старшей». Самое расположение производных в линейную последовательность осуществляется следующим образом: из двух производных мы считаем предшествующей ту, у которой порядок меньше; в случае равных порядков производная функции φ считается предшествующей производной функции ψ; наконец, в случае двух производных равных порядков от одной и той же функции предшествует та, у которой порядок по букве v меньше. Другими словами, производные располагаются сначала по их порядкам, затем по функциям, от которых они происходят, и наконец по им порядку относительно аргумента v.

Указанное правило располагает все производные функций φ и ψ во вполне определенную линейную последовательность.

Введем теперь для удобства следующее определение: какая-нибудь система конечного числа уравнений с частными производными от функций φ и ψ называется редуцированной, когда в левой части каждого уравнения стоит производная, а в правой части стоит выражение, составленное из предшествующих производных, и когда производные, стоящие в левых частях, все различны.

Всякой конечной системе уравнений с производными от функций φ и ψ можно придать редуцированный вид, производя исключительно одни только «алгебраические» выкладки; здесь слово «алгебраические» употреблено в расширенном смысле, т. е. как синоним «недифференциальные». Чтобы видеть это, достаточно в данной системе уравнений (S_0) отыскать уравнение, содержащее самую старшую производную, решить его относительно нее и внести полученное выражение во все остальные уравнения этой системы, совокупность которых после этой подстановки мы обозначим через (S_1). Систему (S_1) мы можем трактовать в точности таким же образом, как мы трактовали первоначальную систему (S_0), и так далее. Ясно, что, продолжая поступать указанным образом, мы в конце концов придем к системе (S) разрешенных уравнений, в левых частях которых стоят производные, отличные одна от другой, и в правых частях стоят выражения, составленные из предшествующих производных. Поэтому система (S) будет редуцированной системой, алгебраически эквивалентной первоначальной системе (S_0).

Мы называем главными производными функций φ и ψ все производные, находящиеся в левых частях редуцированной системы (S), а также все производные этих производных. Остальные производные функций φ и ψ называются параметрическими производными.

Дальнейший шаг, требуемый теорией Рикье — Жанэ, заключается в составлении условий полной интегрируемости редуцированной системы (S). Здесь не место давать полное изложение теории Рикье — Жанэ, и мы ограничимся лишь самыми краткими указаниями на прием, которым составляются эти условия полной интегрируемости.

Прежде всего мы всякий оператор $\dfrac{\partial^{i+j}}{\partial u^i\, \partial v^j}$ изображаем геометрически в виде точки ij на плоскости uOv с координатами $u=i$, $v=j$. Если мы возьмем две плоскости — φ-плоскость и ψ-плоскость, то левые части редуцированной системы (S) дадут на этих плоскостях конфигурации точек эти конфигурации мы обозначаем через k_φ и k_ψ); каждая из них состоит из конечного числа точек. Если через какую-нибудь точку M одной из этих конфигураций мы проведем две полупрямые, параллельные положительным направлениям осей Ou и Ov, то целочисленные точки, принадлежащие этим полупрямым, будут изображать последовательные частные производные по аргументу u и по аргументу v от той производной, которая изображена точкой M. Поэтому, если мы возьмем две полупрямые, исходящие из двух различных точек M_1 и M_2 конфигурации, причем одна из этих полупрямых параллельна оси Ou, а другая — оси Ov, то точка N встречи этих полупрямых (если предположить, что таковая имеется) дает одно из условий полной интегрируемости системы (S), потому что мы приходим к производной, изображаемой точкой пересечения N, двумя разными путями, исходя сначала от главной производной, изображаемой точкой M_1, а потом — из главной производной, изображаемой точкой M_2, посредством последовательных дифференцирований сначала только по аргументу u, а потом только по аргументу v. Следовательно, мы приходим к двум различным выражениям для производной, изображаемой точкой N, и численное равенство этих выражений дает нам одно из необходимых условий полной интегрируемости системы (S). Так как в правых частях уравнений системы (S) стоят выражения, составленные только из параметрических производных и независимых переменных u и v, то рассматриваемое необходимое условие полной интегрируемости системы (S), соответствующее точке N, дает связь параметрических производных и независимых переменных u и v.

Заслуга Рикье в том, что он дал твердое правило для отыскания всех нужных нам точек N, совокупность которых дает необходимые и вместе с тем достаточные условия полной интегрируемости системы (S). Рикье дал простой, чисто геометрический, рецепт определения всех точек N, таких, что соответствующие им уравнения не являются паразитными, т. е. следствиями других таких же уравнений. Совокупность уравнений, соответствующих этим точкам N, является полным, т. е. необходимым и достаточным, условием для того, чтобы система (S) была вполне интегрируемой.

Итак, составим для рассматриваемой редуцированной системы (S) по правилу Рикье все необходимые условия полной интегрируемости этой системы, совокупность которых является вместе с тем и достаточным условием для полной интегрируемости системы (S). К полученным новым уравнениям, которые находятся в конечном числе, мы можем применить редукционный процесс и, выполнив его, присоединить эти редуцированные уравнения к уравнениям системы (S). Полученную новую редуцированную систему уравнений обозначим через (S'). Отметим, что в левых частях новой системы (S') стоят различные друг от друга производные, так как новые добавленные уравнения имеют в левых частях только параметрические производные относительно прежней системы (S). Само собою разумеется, что для системы (S') эти производные будут уже главными.

Так как новая система (S') является расширением прежней системы (S), то геометрические конфигурации k'_φ и k'_ψ для системы (S') являются в свою очередь расширением геометрических конфигураций k_φ и k_ψ прежней системы (S).

Дальнейшие шаги, требуемые теорией Рикье — Жанэ, заключаются в выведении из системы (S') новой, еще более расширенной, системы (S''), а из этой последней — новой расширенной системы (S'''), и так далее. Другими словами, мы строим последовательность расширенных систем:

$$(S),\ (S'),\ (S''),\ \ldots,\ (S^{(k)}),\ \ldots,$$

причем всякий раз полученную расширенную систему $(S^{(k)})$ мы трактуем таким же образом, как трактовали первую систему (S), и выводим из нее следующую расширенную систему $(S^{(k+1)})$.

Важный пункт теории Рикье — Жанэ состоит в том, что указанная последовательность систем никогда не будет бесконечной, но необходимо оборвется на некоторой системе $(S^{(m)})$, где m есть число натуральное Это может произойти только вследствие одной из двух следующих причин:

1) или расширение последней системы $(S^{(m)})$ содержит, среди других уравнений, уравнение, не содержащее никаких производных и связывающее

независимые переменные u и v; в этом случае предложенная система (S) не допускает никакого решения (φ, ψ);

2) или расширение последней системы $(S^{(m)})$ совсем не допускает никакого расширения, так как все условия полной интегрируемости системы $(S^{(m)})$ суть тождества, не содержащие ни производных, ни независимых переменных; в этом случае предложенная система (S) заведомо имеет решения (φ, ψ).

Чтобы оценить степень допустимого произвола в решении (φ, ψ) системы (S), нужно обратить внимание на то, что последняя система $(S^{(m)})$ вполне интегрируема. Мы должны просто сосчитать число параметрических производных системы $(S^{(m)})$: если их число бесконечно, «общее» решение (φ, ψ) предложенной системы (S) зависит от произвольной функции, одной или нескольких; если же число параметрических производных системы $(S^{(m)})$ конечно, «общее» решение (φ, ψ) предложенной системы (S) зависит от конечного числа произвольных параметров. Надо иметь в виду, что вследствие полной интегрируемости последней системы $(S^{(m)})$ каждая из ее параметрических производных, не будучи чем-нибудь связана, должна быть заменена произвольным постоянным.

Самый подсчет параметрических производных системы $(S^{(m)})$ исключительно легкий: нужно выбросить из φ-плоскости и ψ-плоскости все те целочисленные точки, которые принадлежат прямому углу, имеющему вершину в какой-нибудь точке M конфигурации $k_\varphi^{(m)}$ или конфигурации $k_\psi^{(m)}$ и сторонами полупрямые, ориентированные согласно пopoложительным направлениям осей координат uOv. Действительно, всякая целочисленная точка P, находящаяся внутри такого прямого угла или принадлежащая одной из его сторон, соответствует производной от производной, отвечающей вершине M угла; поэтому производная, отвечающая точке P, есть главная производная системы $(S^{(m)})$ и, следовательно, не будет параметрической производной для этой системы. Удалив таким образом целочисленные точки φ- и ψ-плоскостей посредством прямых углов, опирающихся своими вершинами на точки конфигураций $k_\varphi^{(m)}$ и $k_\psi^{(m)}$, мы сразу можем составить суждение о параметрических производных системы $(S^{(m)})$ и, следовательно, судить о степени произвола «общего» решения (φ, ψ) предложенной системы (S).

§ 7. Применим сказанное к системе (Σ^{**}).

Сначала самым грубым образом оценим степень произвола ее «общего» решения (φ, ψ). Предполагаем, что система (Σ^{**}) имеет решения.

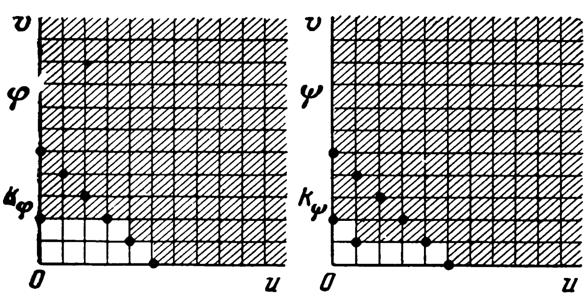
Для этого мы просто присоединим к системе (Σ^{**}) уравнения (49). Так как последние являются следствиями системы (Σ^{**}) (следствиями не «алгебраическими», но дифференциальными), понятно, что присоединение их к системе (Σ^{**}) отнюдь не уменьшит общности решения этой системы. Уравнения (49) имеют редуцированную форму. Уравнения же системы (Σ^{**}) еще не имеют редуцированной формы. Легко сообразить, не производя никаких вычислений, каковы будут левые части уравнений системы (Σ^{**}), когда мы ей придадим редуцированный вид. В самом деле, две самые старшие производные, содержащиеся в системе (Σ^{**}), суть

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} \text{ и } \frac{\partial^2\psi}{\partial u\, \partial v}.$$

Они содержатся только в двух последних уравнениях системы (Σ^{**}) и совсем не содержатся в первом уравнении этой системы. Так как эти производные входят линейным образом в два последние уравнения и имеют определитель при них равным $-2(\psi-\varphi)$, мы можем разрешить эти уравнения относительно них. Самой же старшей производной, фигурирующей в первом уравнении, является $\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}$. Поэтому система (Σ^{**}) в редуцированном виде будет иметь в левых частях три производные:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial u\, \partial v} \text{ и } \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}.$$

Обозначим через (S) систему, составленную из трех редуцированных уравнений системы (Σ^{**}) и двенадцати уравнений (49). Система (S) редуцирована, и геометрическая схема этой системы состоит из двух конфи-



Фиг. 1

гураций k_φ и k_ψ (фиг. 1). Мы видим, что прямые $u+v=5$ в φ- и ψ-плоскостях образуют барьер, за которым лежат только точки, соответствующие главным производным системы (S). Следовательно, точки с параметрическими производными могут находиться только по эту сторону барьера, т. е. там, где лежит начало координат O. Значит, a priori мы можем утверждать, что число параметрических производных для системы (S) конечно и равно 15. Но это не означает еще, что произвол «общего» решения системы (Σ^{**}) есть ∞^{15}, так как систему (S) мы должны еще подвергнуть, согласно теории Рикье — Жанэ, ряду расширений, состоящих в последовательном присоединении все новых и новых условий полной интегрируемости, причем каждое такое условие, не тождественное нулю, заведомо уменьшает на одну единицу число прежних параметрических точек. Действительно, в первой части настоящей работы (в § 5) мы видели, что из 15-ти параметрических производных системы (S) независимыми могут оказаться самое большее 12. Во всяком случае, не прибегая к вычислениям первой части этой работы, можно уже теперь заключить, что для всякого линейного элемента $ds^2 = E\,du^2 + 2\,F du dv + G dv^2$

неразвертывающейся поверхности произвол «общего» решения (φ, ψ) системы (Σ^{**}) уравнений главного основания не функциональный, а параметрический, именно зависящий от конечного числа $(\leqslant 12)$ произвольных параметров.

Само собой разумеется, что это заключение должно сопровождаться доказательством того, что зависимость «общего» решения (φ, ψ) системы (Σ^{**}) от произвольных параметров есть аналитическая. Без такого сопровождающего доказательства сделанное заключение не имеет никакой законности, потому что с помощью кривой Пеано (Peano) можно любое число произвольных параметров свести только к одному произвольному параметру. Это обстоятельство имеет силу и для того случая, когда число произвольных параметров счетное, т. е. когда мы имеем дело с функциональным произволом. Факт тот, что и любой «функциональный» произвол мы имеем право рассматривать как «параметрический», даже как однопараметрический (т. е. как ∞^1), если ввести в рассмотрение кривые Пеано, т. е. непрерывные функции, не всегда имеющие производную. Если же мы находимся в области аналитических зависимостей, то там различие «функционального» произвола от «параметрического» получает абсолютный характер, как и различие однопараметрического произвола от двупараметрического, и так далее: в области аналитических зависимостей символ ∞^k, изображающий k-параметрический произвол, имеет абсолютное значение.

§ 8. На первый раз может показаться, что предыдущие заключения удались лишь благодаря тому случайному обстоятельству, что нам были известны уравнения (49), т. е. предложение о выразимости всех производных 5-го порядка через производные низших порядков. Самое же это предложение получено путем вычислений, удавшихся до известной степени благодаря случайному стечению благоприятных обстоятельств, точнее, благодаря удобным частностям. Поэтому предыдущие заключения могут не возбуждать внимания.

На самом же деле совершенно к таким же заключениям, только еще с большей ясностью, приводит только одно простое планомерное и систематическое применение теории Рикье — Жанэ к системе (Σ^{**}) трех уравнений главного основания.

Это обстоятельство мы считаем весьма важным, потому что доведение до конца процесса теории Рикье — Жанэ для системы уравнений (Σ^{**}) главного основания даст нам в руки «результаты» системы (Σ^{**}), т. е. условия совместности уравнений системы (Σ^{**}) и точную оценку степени произвола «общего» решения (φ, ψ) этой системы. Обладание же условиями совместности системы (Σ^{**}) даст полное решение большинства проблем изгибания на главном основании, остававшихся до сих пор неразрешенными и создавших репутацию неприступности.

Это доведение до конца теории Рикье — Жанэ для системы (Σ^{**}) требует относительно небольшого числа вычислений. Вычисления эти пока еще несколько громоздки, так как не создан упрощающий их аппарат.

Поэтому мы не делаем их предметом изложения в настоящей работе. Но существенно то, что в свете теории Рикье — Жанэ исчезает всякая неопределенность, все гадания о необходимых «дифференцированиях», «исключениях» и т. д. Здесь нет места таким неопределенным высказываниям, как, например: «поступая так же, мы через конечное число шагов придем к...» или «дифференцируя достаточно большое число раз, мы будем иметь...», или «в конце концов мы получаем...», и т. д. Выражения эти вполне научны, но для изучения главного основания сами по себе они не дают ничего, потому что дают лишь описание процесса, неизвестно, когда и где заканчивающегося. Голое existence конца процесса не дает ничего. Совсем иное дело в теории Рикье — Жанэ, где в точности указано, какие именно вычисления нужно предпринять и сколько именно их надо сделать.

Мы укажем здесь лишь несколько первых шагов теории Рикье—Жанэ для системы (Σ^{**}), остановившись там, где вычисления начнут представлять громоздкость.

Первый шаг. Данную систему

$$\left.\begin{aligned} \varphi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+2\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}&=H_1\\ \psi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+2\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\left(\varphi^2\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+2\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)&=H_2\\ \psi^2\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+2\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}&=H_3 \end{aligned}\right\}\quad(\Sigma^{**})$$

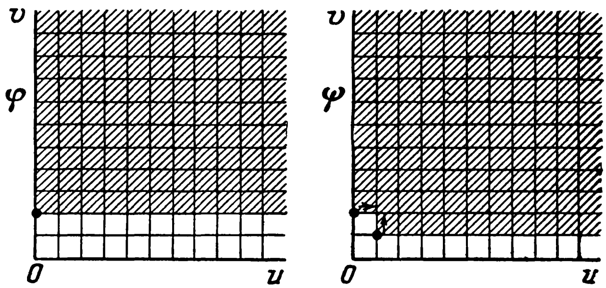
приводим к редуцированному виду. Самой старшей производной служит $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}$. Решая относительно нее третье уравнение и подставляя найденное выражение во второе уравнение, мы видим, что самой старшей производной становится $\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}$. Решая полученное уравнение относительно нее и первое уравнение относительно $\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}$, мы даем системе ($\Sigma^{**}$) редуцированный вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=-\varphi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-2\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+H_1;\\ &\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}=-\frac{\varphi+\psi}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-\frac{\varphi+\psi}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{H_2-H_1+H_3}{2(\psi+\varphi)};\\ &\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}=\psi(\psi+\varphi)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+2\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+\varphi\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\psi H_1+\psi H_2-\varphi H_3}{\psi-\varphi}. \end{aligned}\right\}\quad(\Sigma^{**})$$

Геометрическая схема этой системы, приведенная на фиг. 2, показывает, что система (Σ^{***}) имеет бесконечное множество параметрических производных как для функции φ, так и для функции ψ. Параметрических производных 2-го порядка имеется три: $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}$. Следовательно, все шесть производных 2-го порядка выразимы через них. Параметрических производных 3-го порядка имеется также три: $\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\partial v}$, $\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^3}$ и

$\frac{\partial^3\psi}{\partial u^3}$; следовательно, все восемь производных 3-го порядка выразимы через них (и через низшие производные).

Необходимое и достаточное условие полной интегрируемости системы (Σ^{***}) только одно. Оно дается на схеме ψ-плоскости точкой пересечения двух полупрямых, проведенных параллельно положительным направлениям осей координат через обе точки этой схемы.



Фиг. 2

Движение, параллельное оси абсцисс Ou, соответствует однократному дифференцированию по аргументу u производной $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}$; движение, параллельное оси ординат Ov, соответствует однократному дифференцированию по аргументу v производной $\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}$.

Равенство численных результатов

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u\;\partial v}\right)$$

и дает нам необходимое и достаточное условие полной интегрируемости системы (Σ^{***}). Так как это уравнение содержит лишь производные 3-го порядка (и низшие), отсюда мы заключаем о возможности отыскать старшую параметрическую производную 3-го порядка от функции ψ, т. е. $\frac{\partial^3\psi}{\partial u^3}$.

Вычисление вполне подтверждает это предвидение. В самом деле, мы имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3\psi}{\partial u^3}=\frac{3\psi+5\varphi}{\psi-\varphi}\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^3}+\frac{8}{\psi-\varphi}\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\partial v}+\Big\{\Big[3(\psi-3\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\\
+(3\varphi+7\psi)\frac{\partial\psi}{\partial u}+2\frac{\partial\varphi}{\partial u}+2\frac{\partial\psi}{\partial v}\Big]\frac{1}{(\psi-\varphi)^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\\
+\Big[-\frac{8}{(\psi-\varphi)^2}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{8}{(\psi-\varphi)^2}\frac{\partial\psi}{\partial u}\Big]\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\;\partial v}+\\
+\Big[(3\psi-\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial u}+(3\varphi-\psi)\frac{\partial\psi}{\partial u}+2\frac{\partial\varphi}{\partial v}+2\frac{\partial\psi}{\partial v}\Big]\frac{1}{(\psi-\varphi)^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\\
+\frac{4}{(\psi-\varphi)^2}\Big[\frac{\varphi+\psi}{2}\frac{\partial}{\partial u}\frac{H_2-H_1+H_3}{2(\psi-\varphi)}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{H_2-H_1+H_3}{2(\psi-\varphi)}+\\
+\frac{\partial}{\partial u}\frac{(2\psi-\varphi)H_1-\psi H_2-\varphi H_3}{\psi-\varphi}\Big]\Big\}.\end{aligned}\tag{50}$$

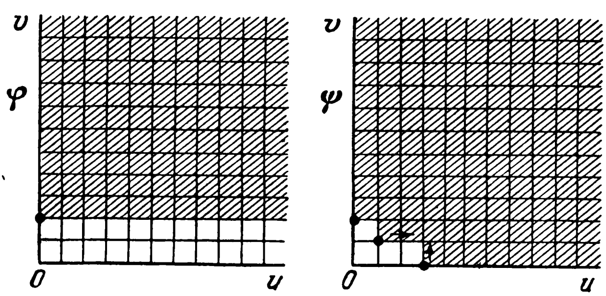
Это равенство мы напишем сокращенно в виде:

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial u^3}=\frac{3\psi+5\varphi}{\psi-\varphi}\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^3}+\frac{8}{\psi-\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2\partial v}+F, \tag{51}$$

где F обозначает определенное выражение, содержащее производные 2-го порядка (и ниже): это многочлен от всех входящих в него букв и частных производных, деленный на натуральную степень кривизны K и разности $\psi-\varphi$.

Второй шаг. Присоединим к редуцированной системе равенство (51). Получим новую редуцированную систему:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=-\varphi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-2\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+H_1;\\
&\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}=-\frac{\varphi+\psi}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-\frac{\varphi+\psi}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{H_2-H_1+H_3}{2(\psi-\varphi)};\\
&\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}=\psi(\psi+\varphi)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+2\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+\varphi\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\psi H_1-\psi H_2-\varphi H_3}{\psi-\varphi};\\
&\frac{\partial^3\psi}{\partial u^3}=\frac{3\psi+5\varphi}{\psi-\varphi}\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^3}+\frac{8}{\psi-\varphi}\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\partial v}+F.
\end{aligned}\right\}(\Sigma_1^{***}).$$



Фиг. 3

Геометрическая схема этой системы (фиг. 3) показывает, что система (Σ_1^{***}) имеет уже конечное число параметрических производных для функции ψ, именно четыре:

$$\psi,\ \frac{\partial\psi}{\partial v},\ \frac{\partial\psi}{\partial u},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2},$$

но продолжает иметь бесконечное множество параметрических производных для функции φ. Параметрических производных 2-го порядка имеется по-прежнему три:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}.$$

Следовательно, все шесть производных 2-го порядка выразимы через них. Но параметрических производных 3-го порядка здесь уже две: $\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\partial v}$ и $\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^3}$. Следовательно, все восемь производных 3-го порядка выразимы через них (и через низшие производные). Параметрических производных

4-го порядка тоже только две: $\frac{\partial^4\varphi}{\partial u^3\partial v}$ и $\frac{\partial^4\varphi}{\partial u^4}$. Следовательно, все 10 производных 4-го порядка выразимы через них (и через низшие производные).

Необходимое и достаточное условие полной интегрируемости системы (Σ_1^{***}) только одно. Оно дается на схеме ψ-плоскости точкой пересечения двух полупрямых, проведенных параллельно положительным направлениям осей координат uOv через две точки (*1*, *1*) и (*3*, *0*) этой схемы.

Горизонтальная полупрямая соответствует двукратному дифференцированию по аргументу u производной $\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}$. Вертикальная полупрямая соответствует однократному дифференцированию по аргументу v производной $\frac{\partial^3\psi}{\partial u^3}$.

Равенство численных результатов

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial u^3}\right)$$

и дает нам необходимое и достаточное условие полной интегрируемости системы (Σ_1^{***}). Так как это уравнение содержит лишь производные 4-го порядка (и низшие), то мы заключаем о возможности отыскать старшую параметрическую производную 4-го порядка уже от функции φ, т. е. $\frac{\partial^4\varphi}{\partial u^3\partial v}$.

Вычисление вполне подтверждает это предвидение. В самом деле, мы имеем равенство:

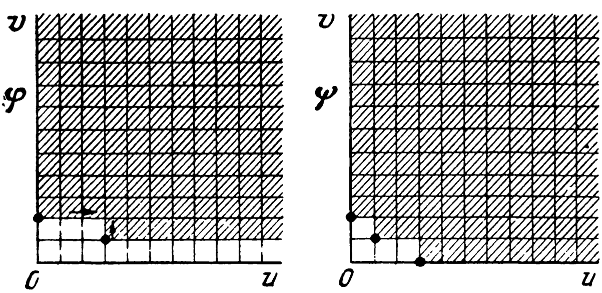
$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial u^3\partial v}=-\frac{\psi+3\varphi}{4}\frac{\partial^4\varphi}{\partial u^4}+G, \tag{52}$$

где G обозначает определенное выражение, содержащее производные 3-го порядка (и ниже); это многочлен от всех входящих в него букв и их частных производных, деленный на натуральную степень кривизны K и разности $\psi-\varphi$.

Третий шаг. Присоединим к редуцированной системе (Σ_1^{***}) полученное равенство (52). Получаем новую редуцированную систему:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=-\varphi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-2\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+H_1;\\
&\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}=-\frac{\varphi+\psi}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-\frac{\varphi+\psi}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{H_2-H_1+H_3}{2(\psi-\varphi)};\\
&\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}=\psi(\psi+\varphi)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+2\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+\varphi\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\psi H_1-\psi H_2-\varphi H_3}{\psi-\varphi};\\
&\frac{\partial^3\psi}{\partial u^3}=\frac{3\psi+5\varphi}{\psi-\varphi}\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^3}+\frac{8}{\psi-\varphi}\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\,\partial v}+F;\\
&\frac{\partial^4\varphi}{\partial u^3\,\partial v}=-\frac{\psi+3\varphi}{4}\frac{\partial^4\varphi}{\partial u^4}+G.
\end{aligned}\right\}\quad(\Sigma_2^{***})$$

Геометрическая схема этой системы (фиг. 4) показывает, что множество параметрических производных для функции φ, хотя и уменьшилось, продолжает оставаться бесконечным. Число параметрических производных 2-го порядка по-прежнему три: $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}$. Точно так же параметрическими производными 3-го порядка остаются две производные: $\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\,\partial v}$ и $\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^3}$. Но уже параметрических производных 4-го порядка имеется лишь одна: $\frac{\partial^4\varphi}{\partial u^4}$. Следовательно, все 10 производных 4-го порядка выразимы через нее (и через низшие производные). Параметрических производных 5-го порядка имеется также только одна: $\frac{\partial^5\varphi}{\partial u^5}$. Следовательно, все 12 производных 5-го порядка выразимы через нее (и через низшие производны).



Фиг. 4

Необходимое и достаточное условие полной интегрируемости системы (Σ_2^{***}) только одно. Оно дается уже на схеме φ-плоскости точкой пересечения двух полупрямых, проведенных параллельно положительным направлениям осей координат uOv через две точки конфигурации на этой плоскости.

Горизонтальная полупрямая соответствует трехкратному дифференцированию по аргументу u производной $\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}$. Вертикальная полупрямая соответствует однократному дифференцированию по аргументу v производной $\frac{\partial^4\varphi}{\partial u^3\partial v}$.

Равенство численных результатов

$$\frac{\partial^3}{\partial u^3}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial u^3\partial v}\right)$$

и дает нам необходимое и достаточное условие полной интегрируемости системы (Σ_2^{***}). Так как это уравнение содержит производные 5-го порядка (и низшие) и так как мы только что показали, что все производные 5-го порядка выразимы через единственную параметрическую производную 5-го порядка $\frac{\partial^5\varphi}{\partial u^5}$, то мы заключаем о возможности фактически отыскать эту единственную параметрическую производную 5-го порядка: $\frac{\partial^5\varphi}{\partial u^5}$.

Вычисление вполне подтверждает это предвидение, так как после приведения подобных членов коэффициентом при $\frac{\partial^5\varphi}{\partial u^5}$ оказывается $\frac{(\psi-\varphi)^2}{4}$.

Таким образом, мы имеем равенство:

$$\frac{\partial^5\varphi}{\partial u^5} = L, \tag{53}$$

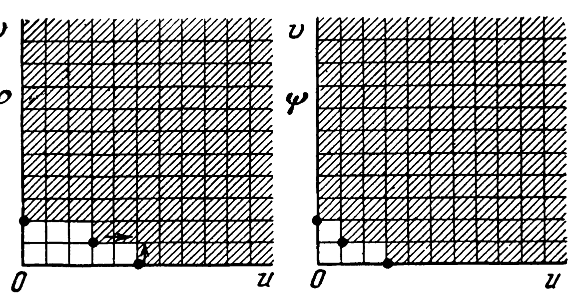
где L обозначает определенное выражение, содержащее производные только 4-го порядка и ниже и имеющее форму многочлена от всех входящих в него букв и их частных производных, деленного на целую положительную степень кривизны K и разности $\psi - \varphi$.

Дальнейшие шаги. Следующий, четвертый шаг состоит в том, что мы присоединяем к редуцированной системе (Σ_2^{***}) полученное равенство (53). Мы получаем, таким образом, новую редуцированную систему:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} &= -\varphi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - 2\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + H_1,\\
\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v} &= -\frac{\varphi+\psi}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} - \frac{\varphi+\psi}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{H_2 - H_1 + H_3}{2(\psi-\varphi)},\\
\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} &= \psi(\psi+\varphi)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + 2\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + \varphi\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\psi H_1 - \psi H_2 - \varphi H_3}{\psi-\varphi},\\
\frac{\partial^3\psi}{\partial u^3} &= \frac{3\psi+5\varphi}{\psi-\varphi}\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^3} + \frac{8}{\psi-\varphi}\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\partial v} + F,\\
\frac{\partial^4\varphi}{\partial u^3\partial v} &= -\frac{\psi+3\varphi}{4}\frac{\partial^4\varphi}{\partial u^4} + G,\\
\frac{\partial^5\varphi}{\partial u^5} &= L.
\end{aligned}\right\} (\Sigma_3^{**})$$

Геометрическая схема этой системы (фиг. 5) обнаруживает важный факт, что число всех параметрических производных системы (Σ_3^{***}) конечно и равно 12; эти параметрические производные суть:

$$\varphi,\ \psi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial u},\ \frac{\partial\varphi}{\partial v},\ \frac{\partial\psi}{\partial u},\ \frac{\partial\psi}{\partial v},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2},\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial u^3},\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\partial v},\ \frac{\partial^4\varphi}{\partial u^4}.$$



Фиг. 5

Знание численных величин этих производных влечет полное знание соответствующего решения (φ, ψ) предложенной системы (Σ^{**}), определяющей главное основание (φ, ψ) линейного элемента $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G dv^2$. Таким образом, любой линейный элемент ds^2 имеет многообразие главных оснований степени произвола не выше ∞^{12}.

Здесь важно сделать следующие замечания.

Процесс, указываемый теорией Рикье — Жанэ, отнюдь не заканчивается на системе (Σ_3^{***}), но должен быть продолжен и далее.

Таким образом, мы должны составить необходимое и достаточное условие для того, чтобы рассматриваемая система была вполне интегрируемой. Это условие только одно. Оно дается на схеме φ-плоскости точкой пересечения двух указанных стрелками полупрямых и выражается равенством численных результатов:

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial u^3\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^5\varphi}{\partial u^5}\right). \tag{54}$$

Здесь не нужно думать о том, что придется иметь дело с вычислением производных 6-го порядка или еще более высоких порядков. В самом деле, вычислением производной $\frac{\partial^5\varphi}{\partial u^5}$ по формуле (53) заканчивается вычисление всех производных 5-го порядка, которые, таким образом, получают выражение через низшие производные, именно через 12 единственных параметрических производных системы (Σ_3^{***}). Поэтому, если производные 5-го порядка все выражены через 12 параметрических производных системы (Σ_3^{***}), то и производные 6-го порядка

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^5\varphi}{\partial u^4\partial v}\right) \text{ и } \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^5\varphi}{\partial u^5}\right)$$

также явятся выражениями, составленными только из параметрических производных системы (Σ_3^{***}). Следовательно, условие полной интегрируемости (54) есть не что иное, как просто связь между собой 12-ти параметрических производных системы (Σ_3^{***}). Решая уравнение (54) относительно самой старшей параметрической производной, в нем фактически содержащейся, и присоединяя это разрешенное уравнение к системе (Σ_3^{***}), мы получаем новую редуцированную систему (Σ_4^{***}). Геометрическая схема этой системы в φ- и ψ-плоскостях содержит, по крайней мере, одной незаштрихованной клеткой меньше, чем в геометрической схеме для системы (Σ_3^{***}), где незаштрихованных клеток было 12. Составив условия полной интегрируемости для системы (Σ_4^{***}), разрешив их относительно старших параметрических производных относительно системы (Σ_4^{***}) и присоединив эти разрешенные уравнения к системе (Σ_4^{***}), мы получим новую редуцированную систему (Σ_5^{***}), геометрическая схема которой содержит незаштрихованных клеток еще меньше, чем их имеется в схеме предыдущей системы (Σ_4^{***}), и так далее.

Описанный процесс последовательного получения все более и более расширяющихся редуцированных систем

$$(\Sigma^{***}),\ (\Sigma_1^{***}),(\Sigma_2^{***}),\ (\Sigma_3^{***}),\ (\Sigma_4^{***}),(\Sigma_5^{***}),\ldots$$

закончится ранее составления системы (Σ_{16}^{***}), потому, что система (Σ_3^{***}) имеет в составе своей геометрической схемы 12 незаштрихованных клеток, а всякая последующая система имеет в составе своей геометрической схемы по крайней мере на одну незаштрихованную клетку меньше, чем предыдущая система.

Но на самом деле описанный процесс, вероятно, закончится гораздо раньше, потому что легко может случиться, что геометрическая схема какой-нибудь системы (Σ_i^{***}) потребует составления не одного, а нескольких необходимых и достаточных условий полной интегрируемости этой системы. Это означает, что переход к геометрической схеме следующей системы (Σ_{i+1}^{***}) будет сопровождаться уничтожением не одной клетки, а целой группы незаштрихованных клеток, что значительно ускорит наступление конца процесса.

Этот конец процесса пока еще неясен и представляет выдающийся интерес. По-видимому, он протекает для разных линейных элементов $ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$ по-разному.

Действительно, здесь нужно принять во внимание следующие обстоятельства.

Прежде всего, как общее правило, данный линейный элемент $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,du^2$ не допускает никакого главного основания. Посмотрим, вследствие каких причин это может произойти.

Каждая из систем

$$(\sum^{***}), (\sum_1^{***}), (\sum_2^{***}), \ldots | (\sum_{16}^{***}) \tag{55}$$

состоит из конечного числа уравнений, в левых частях которых находятся главные производные, а в правых — рациональные выражения, сформированные из параметрических производных неизвестных функций φ и ψ, из букв E, F и G и их частных производных по аргументам u и v; самые эти аргументы explicite в правые части нигде не входят. Каждая система (Σ_i^{***}) полная и переход от системы (Σ_i^{***}) к следующей системе (Σ_{i+1}^{***}) осуществляется тем, что сначала составляются необходимые и достаточные условия полной интегрируемости предыдущей системы (Σ_i^{***}), затем они редуцируются, т. е. разрешаются относительно старших параметрических производных систем (Σ_i^{***}), и, наконец, полученные таким образом новые уравнения присоединяются к этой системе. Таким образом и возникает следующая система (Σ_{i+1}^{***}), пополняемая, если нужно, дифференцированием своих уравнений для того, чтобы она стала тоже полной.

Здесь нужно обратить внимание на следующее возможное обстоятельство: когда, по составлении необходимых и достаточных условий полной интегрируемости системы (Σ_i^{***}), эти условия подвергаются редукционной обработке, может случиться, что наряду с соотношениями, разрешаемыми относительно параметрических производных системы (Σ_i^{***}), мы получим одно или несколько соотношений, не содержащих совсем функций φ и ψ и их частных производных и вместе с тем не являющихся тождествами. Такие соотношения непременно должны содержать по крайней мере одну из букв E, F и G или одну из их частных производных, потому что иначе не могло бы быть ни одного линейного элемента $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, допускающего главное основание, а мы знаем, что такие линейные элементы ds^2 все же существуют. Таким образом, такие соотношения должны иметь форму:

$$R\left(E,\ F,\ G,\ \frac{\partial E}{\partial u},\ \ldots\right)=0 \tag{56}$$

и, следовательно, быть уравнениями с частными производными относительно функций E, F и G. Заметим, что в этих соотношениях (56) аргументы u и v explicite не фигурируют и, что важнее всего, в этих соотношениях уже нет никаких других функций, кроме E, F, G и их частных производных. Иными словами, соотношения (56) имеют уже абсолютный характер, так как никаких буквенных коэффициентов, кроме чисто численных, в них содержаться не может. Заметим еще, что соотношения (56) имеют рациональный вид.

Условимся называть рассматриваемые соотношения (56) результантами. Из всего сказанного следует, что при переходе от системы (Σ_i^{***}) к следующей системе (Σ_{i+1}^{***}) может получиться один или несколько результантов.

Результанты непременно должны быть удовлетворены, если рассматриваемый линейный элемент ds^2 допускает главное основание. Другими словами, для того чтобы линейный элемент $ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$ имел главное основание, необходимо, чтобы была удовлетворена функциями E, F, G вся система результантов, получающихся при переходах от одной системы к следующей в ряде систем:

$$\left(\sum^{***}\right),\left(\sum\nolimits_1^{***}\right),\left(\sum\nolimits_2^{***}\right),\ldots\,|\left(\sum\nolimits_{16}^{***}\right). \tag{55}$$

Следовательно, для существования главного основания необходимым условием является удовлетворение конечного числа уравнений с частными производными и с численными коэффициентами

$$R\left(E,\ F, G, \frac{\partial E}{\partial u},\ \ldots\right)=0 \tag{56}$$

от функций E, F, G. Число этих уравнений не должно превышать числа всех условий полной интегрируемости системы (55), и, значит, не может быть большим, потому что всякое условие полной интегрируемости расходует две точки точечных конфигураций $k_\varphi^{(i)}$ и $k_\psi^{(i)}$.

При этом система (Σ_i^{***}) вовсе не обязательно должна производить результант. Действительно, результант может получиться лишь как продукт редукционной обработки условий полной интегрируемости этой системы. Но редукционная обработка их может и не дать ни одного результанта; это, например, непременно будет тогда, когда все условия полной интегрируемости системы (Σ_i^{***}) имеют различные входящие в них старшие параметрические производные этой системы.

В системах (55) результантов не имеют системы

$$\left(\sum^{***}\right),\left(\sum\nolimits_1^{***}\right),\left(\sum\nolimits_2^{***}\right),\left(\sum\nolimits_3^{***}\right);$$

относительно других систем ряда (55) мы пока не знаем ничего.

Рассмотрим теперь самый конец процесса, т. е. последнюю возможную систему в ряду

$$(\Sigma^{***}), (\Sigma_1^{***}), (\Sigma_2^{***}), \ldots | (\Sigma_{16}^{***}). \tag{55}$$

Какая-нибудь система (Σ_μ^{***}), $\mu < 16$, этого ряда является последней возможной системой, если переход от нее к следующей системе $(\Sigma_{\mu+1}^{***})$ неосуществим.

Невозможность такого перехода может проистекать только по одной из следующих трех причин:

1. Условия полной интегрируемости системы (Σ_μ^{***}) могут разрешиться в ряде тождеств.

В этом случае система (Σ_μ^{***}) вполне интегрируема. Легко видеть, что по крайней мере одна из предыдущих систем производит результант. В самом деле, если бы результантов совсем не было, тогда всякий линейный элемент ds^2 имел бы главное основание, что невозможно. Ясно, что в рассматриваемом случае необходимым и достаточным условием совместности данной системы (Σ^{***}) служит одновременно уничтожение всех результантов систем ряда (55); в этом и состоит необходимое и достаточное условие существования главного основания у линейного элемента ds^2.

2. Условия полной интегрируемости системы (Σ_μ^{***}) могут разрешаться в ряд результантов (и тождеств).

В этом случае очевидно, что необходимым и достаточным условием совместности данной системы (Σ^{***}), т. е. существования у линейного элемента ds^2 главного основания, служит по-прежнему одновременное уничтожение всех результантов систем ряда (55), как рассматриваемой последней возможной системы (Σ_μ^{***}), так и предшествующих ей систем, если таковые имеют результанты.

3. Система (Σ_μ^{***}) может совсем не иметь никаких условий полной интегрируемости, в то время как все предшествующие ей системы (Σ_i^{***}) их имеют. Это происходит тогда и только тогда, когда обе функции φ и ψ получают полную определенность в системе (Σ_μ^{***}), являясь выраженными в конечном виде через E, F, G и их частные производные:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \Phi\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots\right), \\ \psi &= \Psi\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots\right). \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Здесь выражения Φ и Ψ суть рациональные от E, F, G и их частных производных с численными рациональными коэффициентами.

В этом случае мы обязаны подставить во все три уравнения данной первоначальной системы (Σ^{***}) найденные выражения (57) вместо φ и ψ. Мы получаем, таким образом, три соотношения рационального вида:

$$R_1\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots\right) = 0, \ R_2 = 0 \text{ и } R_3 = 0, \tag{58}$$

содержащие только E, F, G и их частные производные и не имеющие других коэффициентов, кроме рациональных чисел.

Соотношения (58) являются необходимым условием совместности данной системы (Σ^{***}). Ясно, что если они удовлетворены, данная система (Σ^{***}) действительно совместна, так как формулами (57) определены в конечном виде функции φ и ψ, удовлетворяющие системе (Σ^{***}). Мы видим, таким образом, что в этом случае система результантов, уничтожение которых является необходимым и достаточным условием существования главного основания (φ, ψ) у линейного элемента $ds = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, состоит только из трех результантов (58).

В приведенных трех пунктах мы исчерпали все могущие логически представиться случаи; мы видели, что все они приводят к одному и тому же заключению.

Таким образом, строго доказано предложение:

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы данный, линейный элемент $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ имел главное основание, состоит в одновременном удовлетворении конечного числа соотношений

$$P_1\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots\right) = 0, \; P_2 = 0, \ldots, P_\nu = 0, \tag{59}$$

где всякое P_i есть многочлен от E, F и G и их частных производных, имеющий коэффициентами целые числа.

На первый взгляд кажется, что не всегда мы можем требовать, чтобы коэффициенты многочленов (59) оказались целыми числами; например, в случае изгибания поверхностей постоянной кривизны K в результантах должна фигурировать численная величина этой кривизны K, которая может быть произвольным действительным числом. Однако и в этом случае легко добиться целых коэффициентов. В самом деле, известно, что гауссова кривизна K выражается целым образом через символы Кристоффеля и их производные. Следовательно, K выражается рациональным образом через E, F, G и их частные производные, причем коэффициенты этого выражения суть рациональные числа. И так как самый факт постоянства гауссовой кривизны K записывается в виде двух равенств:

$$\frac{\partial K}{\partial u} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial K}{\partial v} = 0, \tag{60}$$

мы заключаем, что ценою увеличения числа ν результантов (59) равенствами (60) мы в рассматриваемом случае достигаем того, что коэффициенты их делаются целыми числами.

Аналогично мы поступаем в случае постоянства той или иной части результанта. Заметим, наконец, что в случае выбора частной системы криволинейных координат u, v (например, выбирая линии координат асимптотическими или геодезическими) или при рассмотрении частных семейств поверхностей нам все равно придется присоединять к результантам (59) те или иные соотношения между E, F, G и их частными производными.

Впрочем, добиваться непременно целых коэффициентов у результантов можно лишь с целью определенности логического порядка и совершенно не нужно для самой геометрии.

Наиболее вероятным нам кажется лишь третий случай, когда φ и ψ являются выраженными в конечном виде через E, F, G и их частные производные по формулам (57). Мы видели, что в этом случае имеются лишь три результанта (58), образующие необходимое и достаточное условие существования главного основания у линейного элемента ds^2. При этом может случиться, что какой-нибудь из них явится алгебраическим или дифференциальным следствием остальных.

Задача изгибания поверхностей на главном основании и заключается в фактическом получении этих результантов, так как, имея их, мы можем судить о степени произвола линейного элемента ds^2, допускающего главное основание; для оценки степени произвола достаточно снова применить теорию Рикье — Жанэ, но на этот раз уже к уравнениям, содержащим только E, F, G и их частные производные и имеющим все коэффициенты численными. Впрочем, для этой цели нам не нужно иметь эти результанты фактически написанными, достаточно иметь лишь некоторые сведения об их виде и их порядках. Заметим, что система результантов, рассматриваемая как определяющая функции E, F, G, есть система совместная, так как все же имеются линейные элементы ds^2, допускающие главное основание.

Мы видим, что самый конец процесса в ряде систем

$$(\Sigma^{***}), (\Sigma_1^{***}), (\Sigma_2^{***}), \ldots | (\Sigma_{16}^{***}) \tag{55}$$

представляет еще много неясностей. И среди вопросов, остающихся не выясненными, весьма важным является вопрос о числе главных оснований (φ, ψ) для данного линейного элемента ds^2 в предположении, что таковой их имеет.

Представляется возможным, что данный линейный элемент ds^2, допускающий главное основание (φ, ψ), имеет его, вообще говоря, в единственном числе, именно определяемым формулами (57). Если это правильно, тогда совокупность поверхностей S, имеющих $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ своим линейным элементом, содержит (если отвлечься от положения в пространстве) лишь одну непрерывную серию ∞^1 поверхностей, изгибающихся на главном основании. Эта серия поверхностей определяется через данные E, F, G и через коэффициенты δ, δ', δ'' второй квадратичной формы по формулам (11), (20) и (23):

$$\delta = (ax) + \left(\frac{b}{x}\right), \quad -\delta' = (ax)\varphi + \left(\frac{b}{x}\right)\psi, \quad \delta'' = (ax)\varphi^2 + \left(\frac{b}{x}\right)\psi^2, \tag{11}$$

где

$$a = b = \frac{\sqrt{K}}{\psi - \varphi} \tag{20}$$

и

$$x=\sqrt{\frac{\alpha^* C+\beta^*}{\gamma^* C+1}}, \tag{23}$$

причем α^*, β^* и γ^* суть вполне определенные функции аргументов u и v, а C есть произвольное постоянное.

Спрашивается, как тогда объяснить известный факт существования индивидуальных поверхностей S с ∞^1 главных оснований, а также существование ∞^1 главных оснований на минимальном геликоиде, установленное С. П. Финиковым? Ведь для таких индивидуальных поверхностей S их линейный элемент ds^2 допускает по меньшей мере ∞^1 и соответственно ∞^2 главных оснований.

Единственное объяснение этого факта заключается в том, что для таких индивидуальных функций E_0, F_0, G_0 ряд систем

$$(\Sigma^{***}), (\Sigma_1^{***}), (\Sigma_2^{***}), \ldots | (\Sigma_{16}^{***}) \tag{55}$$

ведет себя иначе, чем для других функций E, F, G, оставляя место большему числу произвольных постоянных. Это может случиться только в том случае, если какая-нибудь производная функции φ или ψ, впервые ставшая главной в некоторой системе (Σ_i^{***}) и, следовательно, впервые получившая вполне определенное выражение через младшие параметрические производные этой системы [и поэтому не имевшая такового в предыдущей системе (Σ_{i-1}^{***})], вновь теряет это выражение при индивидуальных функциях E_0, F_0, G_0. Утрата этого выражения, рационального относительно всех входящих в него функций, может произойти только в случае, если будут уничтожаться одновременно числитель и знаменатель этого выражения при замене E, F, G индивидуальными функциями E_0, F_0, G_0.

Таким образом, мы получаем для рассматриваемой производной неопределенность $0/0$.

Таким образом и может случиться, что, заставляя E, F, G пробегать те или другие индивидуальные функции, при условии, разумеется, соблюдения совместности первоначальной системы (Σ^{***}), мы будем получать то большее, то меньшее число произвольных постоянных.

В этих условиях особый интерес приобретает проблема отыскания линейного элемента

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

с максимальным числом главных оснований, т. е. функций E, F, G, сообщающих общему решению (φ, ψ) системы (Σ^{***}) наибольшее число произвольных постоянных.

Кроме того, необходимо строго установить существование линейных элементов ds^2 с одним только главным основанием (φ, ψ), т. е. без всяких произвольных постоянных.

Мы полагаем, что, отвлекаясь от линейных элементов ds^2, совсем лишенных главного основания, случай единственности главного основания есть самый общий случай.

§ 9. Отыскание необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять функции E, F и G для того, чтобы данный линейный элемент

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{1}$$

допускал главное основание, образует то, что следует назвать общей проблемой. От этой общей проблемы нужно отличать ограниченную проблему, состоящую в отыскании необходимых и достаточных условий для того, чтобы данная поверхность S допускала главное основание.

Теория Рикье — Жанэ показывает, что ограниченная проблема много проще общей проблемы и, вероятно, в скором времени будет разрешена до конца.

В самом деле, в ограниченной проблеме рассматриваемая поверхность S задается шестью функциями

$$E,\ F,\ G,\ \delta,\ \delta' \text{ и } \delta'',$$

являющимися коэффициентами первой и второй квадратичной формы: как известно, ими поверхность S определяется вполне (до положения в пространстве).

Отыскиваемое главное основание (φ, ψ) поверхности S, разумеется, определяется по-прежнему тремя уравнениями:

$$\Phi = 0 \ \text{(I)},\ \Phi_1 = 0 \ \text{(II)},\ \Phi_2 = 0 \ \text{(III)}, \tag{Σ}$$

но только к ним теперь добавляется конечное уравнение

$$\delta\varphi\psi + \delta'(\varphi + \psi) + \delta'' = 0. \tag{10}$$

Это присоединение конечного уравнения (10) к уравнениям системы (Σ) имеет тот эффект, что отпадает второе уравнение $\Phi_1 = 0$ (II) этой системы, становящееся следствием остальных, и, таким образом, мы приходим к системе (Σ') двух уравнений с частными производными относительно неизвестных функций φ и ψ и одному конечному уравнению, связывающему вместе обе эти функции:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi = 0 \ \text{(I)},\ \Phi_2 = 0 \ \text{(III)},\\ &\delta\varphi\psi + \delta'(\varphi + \psi) + \delta'' = 0\,(10). \end{aligned}\right\} \tag{Σ'}$$

Разрешая это конечное уравнение относительно ψ и подставляя найденное выражение в первые два уравнения (I) и (III) системы (Σ'), мы приходим только к двум уравнениям с частными производными относительно одной неизвестной функции φ.

Определение необходимых и достаточных условий совместности этих двух уравнений и составляет сущность рассматриваемой ограниченной проблемы.

В рассмотренной выше общей проблеме задаваемые функции E, F и G могут быть произвольными аналитическими функциями аргументов u и v

(лишь бы гауссова кривизна K, выражающаяся через них, была отлична от нуля). В рассматриваемой теперь ограниченной проблеме задаваемые функции E, F, G, δ, δ' и δ'' уже не могут быть взяты произвольно, так как коэффициенты $\delta, \delta', \delta''$ второй квадратичной формы связаны с E, F, G двумя уравнениями Кодацци с частными производными и конечным уравнением Гаусса. Таким образом, принимая во внимание отыскание чисто геометрических свойств поверхностей S, допускающих главное основание, мы видим, что нет никакой необходимости удерживать возможно полный аналитический произвол исходных данных E, F, G, δ, δ' и δ'': мы теперь имеем право выбирать исходные данные в каком-либо специальном виде, лишь бы этим нисколько не была уменьшена геометрическая общность рассматриваемой проблемы.

С этой целью естественно относить рассматриваемую поверхность S к какой-нибудь специальной системе криволинейных координат u и v, например, к асимптотическим линиям. Пользуясь асимптотическими линиями на поверхности S как координатной сетью, мы, как известно, имеем:

$$\delta = 0 \quad \text{и} \quad \delta'' = 0.$$

Отсюда конечное уравнение (10) дает

$$\psi = -\varphi, \tag{61}$$

и, следовательно, в рассматриваемом случае система (Σ') прямо сводится к двум уравнениям:

$$\Phi = 0 \text{ (I)}, \ \Phi_2 = 0 \text{ (III)},$$

в которых надо лишь положить $\psi = -\varphi$.

Поэтому, приняв во внимание форму уравнений $\Phi = 0$ (I) и $\Phi_2 = 0$ (III) в системе (Σ^{**}), мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} \varphi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + 2\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} &= H_1, \\ \varphi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - 2\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} &= -H_3, \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

где H_1 и H_3 суть рациональные функции от количеств

$$E,\ F,\ G,\ \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots \Big| \ \varphi,\ \frac{\partial \varphi}{\partial u},\ \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

являющиеся многочленами второй степени от обеих частных производных первого порядка $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$.

Что же касается определения самой поверхности S, то ее вполне определяют (до положения в пространстве) коэффициенты двух первых квадратичных форм:

$$E,\ F,\ G,\ 0,\ \sqrt{-K},\ 0,$$

так как в рассматриваемом случае уравнение Гаусса сводится к равенству $-\delta'^2 = K$.

К сожалению, функции E, F, и G уже не произвольны, но связаны двумя уравнениями с частными производными:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \ln K}{\partial u} &= -4\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}, \\ \frac{\partial \ln K}{\partial v} &= -4\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

получающимися подстановкой в уравнения Кодацци коэффициентов 0, $\sqrt{-K}$, 0 второй квадратичной формы.

Обращаясь теперь к уравнениям $\Phi=0\,(\mathrm{I})$ и $\Phi_2=0\,(\mathrm{III})$ системы $(\sum)$, в которых функция ψ еще не подвергалась никакой подстановке, мы замечаем в них то интересное свойство, что члены 2-го порядка относительно первых производных функций φ и ψ совершенно не зависят от E, F и G.

В самом деле, согласно сделанным в § 4 этой работы вычислениям, мы имеем:

$$\Delta_\varphi \ln\left\{\frac{\Delta_\varphi\varphi - \begin{vmatrix}p(\varphi) & 1\\ q(\varphi) & \varphi\end{vmatrix}}{K}\right\} = \frac{\Delta_\varphi\Delta_\varphi\varphi - \Delta_\varphi\begin{vmatrix}p(\varphi) & 1\\ q(\varphi) & \varphi\end{vmatrix}}{\Delta_\varphi\varphi - \begin{vmatrix}p(\varphi) & 1\\ q(\varphi) & \varphi\end{vmatrix}} - \Delta_\varphi \ln K =$$

$$= \frac{3\Delta_\varphi\varphi - \Delta_\psi\varphi - 2\begin{vmatrix}p(\varphi) & 1\\ q(\varphi) & \psi\end{vmatrix}}{\psi-\varphi}.$$

Отсюда, освобождаясь от знаменателя, мы заключаем, что можем написать:

$$\Delta_\varphi\Delta_\varphi\varphi + \left(\frac{3\Delta_\varphi\varphi - \Delta_\psi\varphi}{\psi-\varphi}\right)\Delta_\varphi\varphi = H^*\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \psi\right), \tag{64}$$

где выражение H^* содержит производные 1-го порядка $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ уже линейным образом.

Освобождаясь в левой части этого уравнения от операторов $\Delta\varphi$ и $\Delta\psi$, мы придаем ему вид:

$$\varphi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + 2\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \frac{2}{\psi-\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 =$$

$$= H^*\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \psi\right). \tag{65}$$

Так как уравнение $\Phi_2=0\,(\mathrm{III})$ системы $(\sum)$ отличается от уравнения $\Phi_1=0\,(\mathrm{I})$ этой системы лишь перестановкой φ и ψ, мы можем сразу написать:

$$\psi^2\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + 2\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + \frac{2}{\psi-\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v} + \psi\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 = H^*\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial v}, \varphi\right). \tag{66}$$

Полагая в полученных уравнениях (65) и (66) $\psi=-\varphi$, имеем:

$$\left.\begin{aligned}\varphi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+2\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2&=H_1^*\left(\varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial u},\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),\\ \varphi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-2\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2&=H_3^*\left(\varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial u};\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),\end{aligned}\right\}\tag{67}$$

где выражения H_1^* и H_3^* суть уже линейные относительно производных $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$.

Мы видим, что система (67) является лишь дальнейшим уточнением формы написанной выше системы (62), так как здесь выявлены члены второй степени относительно первых производных $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$.

Выражения H_1^* и H_3^*, линейные относительно $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, суть многочлены шестой степени относительно самой буквы φ, деленные на φ; следовательно, это — рациональные выражения относительно неизвестной функции. Если мы теперь пожертвуем рациональностью этих выражений и сделаем подстановку, идею которой заимствуем у С. П. Финикова[1],

$$\varphi=e^{\Phi},$$

то система (67) освободится совсем от членов второй степени относительно первых производных $\frac{\partial\Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial v}$ неизвестной функции Φ, так как мы получим:

$$\left.\begin{aligned}e^{3\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+2e^{2\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}+e^{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}&=H_1^*\left(e^{\Phi},\ e^{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial u},\ e^{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right),\\ e^{3\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}-2e^{2\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}+e^{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}&=H_3^*\left(e^{\Phi},\ e^{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial u},\ e^{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right).\end{aligned}\right\}\tag{68}$$

Чтобы иметь эту систему в редуцированном виде, сложим и вычтем эти уравнения. Получим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}&=\overline{H}_1^*\left(e^{\Phi},\ \frac{\partial\Phi}{\partial u},\ \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right),\\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}&=-e^{2\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\overline{H}_3^*\left(e^{\Phi},\ \frac{\partial\Phi}{\partial u},\ \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right),\end{aligned}\right\}\tag{69}$$

где $\overline{H}_1^*$ и $\overline{H}_3^*$ суть линейные выражения относительно производных $\frac{\partial\Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial v}$ и многочлены степеней соответственно 4 и 6 относительно e^{Φ}, деленные на $e^{2\Phi}$. Так как в этих многочленах отсутствуют члены с нечетными степенями количества e^{Φ}, то подстановка

$$\Phi=\frac{1}{2}\omega$$

[1] См. его цитированную выше диссертацию «Общая задача изгибания на главном основании» (М., 1917, стр. 33).

дает нам окончательно:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} &= H_1^{**}\left(\omega, \frac{\partial\omega}{\partial u}, \frac{\partial\omega}{\partial v}\right), \\ \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} &= -e^{\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + H_3^{**}\left(\omega, \frac{\partial\omega}{\partial u}, \frac{\partial\omega}{\partial v}\right), \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

где H_1^{**}, H_3^{**} — линейные относительно $\frac{\partial\omega}{\partial u}$, $\frac{\partial\omega}{\partial v}$ функции и многочлены соответственно второй и третьей степени относительно количества e^{ω}, деленные на e^{ω}.

Уравнения (70) были даны С. П. Финиковым еще в 1913 г.[1] и притом в совершенно раскрытом виде:

$$2\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial u\,\partial v} = 2\frac{\partial \ln\varphi}{\partial u}\varphi^2\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} + 2\frac{\partial \ln\varphi}{\partial v}\frac{1}{\varphi^2}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} + \varphi^2\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} - \frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial u^2}\varphi^2 + \frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial v^2} = \frac{\partial \ln\varphi}{\partial u}\left[\varphi_2\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right) + 3\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right] +$$

$$+\frac{\partial \ln\varphi}{\partial v}\left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + 3\varphi^2\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right] - \left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + \varphi^2\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}^2\right] +$$

$$+\left[\varphi\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right) + \frac{1}{\varphi}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right]^2 + \varphi^2\left[\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right)\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial v}\left(\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}.$$

Поэтому мы будем писать уравнения (70) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} &= Ae^{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial u} + Be^{-\omega}\frac{\partial\omega}{\partial v} + \left(\frac{\partial A}{\partial u}e^{\omega} - \frac{\partial B}{\partial v}e^{-\omega}\right), \\ \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} &= -e^{\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + (Ce^{\omega} + 3B)\frac{\partial\omega}{\partial u} + (3Ae^{\omega} + D)\frac{\partial\omega}{\partial v} + \\ &\quad + (-2A^2e^{2\omega} + Me^{\omega} + N + 2B^2e^{-\omega}), \end{aligned} \tag{Σ_0'}$$

где, согласно уравнениям С. П. Финикова, мы имеем:

$$A = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix},\quad B = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix},\quad C = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix},\quad D = \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix},$$

$$M = -4AD + 2C^2 + 2\frac{\partial A}{\partial v} - 2\frac{\partial C}{\partial u},$$

$$N = 4BC - 2D^2 + 2\frac{\partial D}{\partial v} - 2\frac{\partial B}{\partial u}.$$

Таким образом, количества A, B, C, D, M и N — вполне определенные выражения, составленные из символов Кристоффеля и их частных производных; следовательно, эти выражения пишутся при помощи только букв E, F, G и их частных производных.

Система (Σ_0') имеет редуцированную форму. Применим к ней теорию Рикье—Жанэ. Геометрическая схема этой системы (фиг. 6) показывает, что необходимое и достаточное условие полной интегрируемости ее дается равенством численных результатов:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right).$$

[1] С. П. Фиников. Об изгибании поверхности 2-го порядка на главном основании. «Математич. сборник», 1912, 28.

Так как $\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}$ выражается только через производные 1-го порядка, а $\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}$ содержит единственную производную 2-го порядка $\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}$, то написанное равенство численных результатов должно давать производную 3-го порядка $\frac{\partial^2\omega}{\partial u^3}$, выраженную через производные низших порядков.

Вычисление дает:

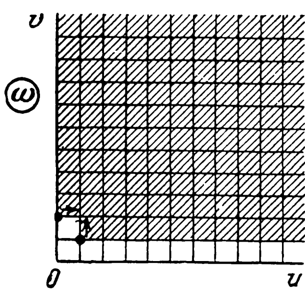
$$\frac{\partial^3\omega}{\partial u^3} = \left(-\frac{\partial\omega}{\partial u} + C + 4Be^{-\omega}\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + C\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2 + 2A\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v} + Be^{-2\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2 + \\ + e^{-2\omega}P_3(e^\omega)\frac{\partial\omega}{\partial u} + e^{-2\omega}P_2(e^\omega)\frac{\partial\omega}{\partial v} + e^{-3\omega}P_4(e^\omega), \tag{71}$$

где $P_i(e^\omega)$ — вполне определенный многочлен от e^ω степени i, имеющий коэффициентами многочлены от количеств A, B, C, D, M, N и их частных производных. Важно заметить, что в выражении (70) для $\frac{\partial^3\omega}{\partial u^3}$ совсем нет знаменателей, могущих уничтожиться.

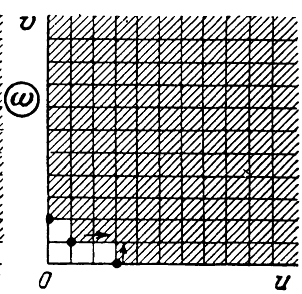
Присоединяя к начальной системе (Σ_0') выведенное уравнение (71), приходим к следующей системе:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} = \ldots, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = \ldots, \quad \frac{\partial^3\omega}{\partial u^3} = \ldots, \tag{Σ_1'}$$

геометрическая схема которой приведена на фиг. 7.



Фиг. 6



Фиг. 7

Из фиг. 6 и 7 мы непосредственно усматриваем, что параметрических производных начальная система (Σ_0') имеет бесконечно много, а следующая система (Σ_1') — только четыре. Из этого следует, что при всяких возможных индивидуальных функциях E, F, G *общее решение* ω начальной системы зависит самое большее от четырех произвольных постоянных, и, значит, на аналитической поверхности S не может быть больше ∞^4 главных оснований. На самом же деле их не может быть больше ∞^2, да и то это максимальное число имеется лишь у минимального геликоида. Оба эти факта установлены С. П. Финиковым в богатой ценными идеями главе V («Возможное число главных оснований на поверхности») его диссертации, цитированной нами выше. Представляет безусловный интерес восстановление этих фактов планомерным применением теории Рикье — Жанэ с целью приобретения полной ясности в аналитической обстановке.

Это планомерное применение теории Рикье — Жанэ не может быть продолжительным. В самом деле, благодаря четырем пустым клеткам схемы фиг. 7 мы видим, что процесс Рикье — Жанэ закончится уже через четыре шага и, следовательно, ряд систем не может быть длиннее ряда

$$(\Sigma_0'),\ (\Sigma_1'),\ (\Sigma_2'),\ (\Sigma_3'),\ (\Sigma_4'), | (\Sigma_5').$$

Из схемы фиг. 7 видно, что необходимое и достаточное условие полной интегрируемости системы (Σ_1') дается равенством численных результатов:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial u^3}\right).$$

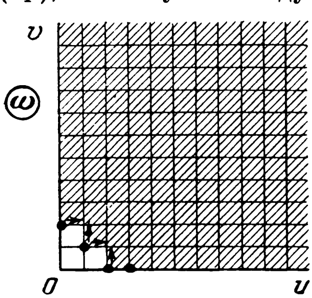
Это равенство дает выражение до сих пор недостававшей нам второй производной $\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}$ через первые производные $\frac{\partial \omega}{\partial u}$, $\frac{\partial \omega}{\partial v}$ и через самую неизвестную функцию ω. Это выражение имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} = \Big[&- 2Ae^{\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial u}\right)^3 - 2Be^{-2\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial v}\right)^3 + \\ &+ \left\{\left(4AC - 5\frac{\partial A}{\partial u}\right)e^{\omega} + \left(10AB + \frac{\partial C}{\partial v}\right)\right\}\left(\frac{\partial \omega}{\partial u}\right)^2 + \\ &+ 2\left\{2A^2e^{\omega} + \left(AD + \frac{\partial A}{\partial v}\right) + \left(2BC - \frac{\partial B}{\partial u}\right)e^{-\omega} + 7B^2e^{-2\omega}\right\}\frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial \omega}{\partial v} + \\ &+ \left\{\left(8AB - \frac{\partial D}{\partial u}\right)e^{-\omega} + \left(5\frac{\partial B}{\partial v} + 2BD\right)e^{-2\omega}\right\}\left(\frac{\partial \omega}{\partial v}\right)^2 + \\ &+ P(e^{\omega})e^{-2\omega}\frac{\partial \omega}{\partial u} + Q(e^{\omega})e^{-3\omega}\frac{\partial \omega}{\partial v} + R(e^{\omega})e^{-3\omega}\Big] : \\ &: \left[6Ae^{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial u} + 6Be^{-\omega}\frac{\partial \omega}{\partial v} + \left(6\frac{\partial A}{\partial u}e^{\omega} - 5\frac{\partial B}{\partial v}e^{-\omega} + \frac{\partial D}{\partial u} - \frac{\partial C}{\partial v}\right)\right],\end{aligned}$$

где P и Q — многочлены четвертой степени от e^{ω}, а R — многочлен пятой степени от e^{ω}; все они имеют коэффициентами многочлены от A, B, C, D, M, N и их частных производных.

Присоединив найденное выражение для $\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}$ к уравнениям системы (Σ_1'), мы получим следующую за ней систему (Σ_2'):

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v} = \ldots,\quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \ldots,$$
$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial u^3} = \ldots,\quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} = \ldots, \qquad (\Sigma_2')$$



Фиг. 8

геометрическая схема которой приведена на фиг. 8.

Наличие только трех пустых клеток в схеме фиг. 8 показывает, что общее решение первоначальной системы (Σ_0') может самое большее зависеть от трех произвольных постоянных и что, следовательно, на данной аналитической поверхности S может иметься самое большее ∞^3 главных оснований. Но здесь имеется одно важное обстоятельство, которого не было в предыдущих системах: знаменатель выражения для $\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}$ может обратиться в нуль. Тогда и числитель этого выражения также должен быть нулем. Мы получаем таким образом два уравнения 1-го порядка относительно неизвестной функции ω, одно из которых третьей степени относительно производных $\frac{\partial\omega}{\partial u}$, $\frac{\partial\omega}{\partial v}$, а другое линейное. Здесь могут быть разные обстоятельства. Уравнение третьей степени может оказаться (при индивидуальных возможных функциях E, F, G) алгебраическим следствием линейного уравнения, но может быть и независимым. Наконец, мыслимо обращение в тождество $0=0$ того или другого уравнения (при частных возможных функциях E, F, G). Вероятно, на этом пути и лежит открытое С. П. Финиковым свойство минимального геликоида.

Если же уничтожение знаменателя не имеет места, тогда можно итти дальше и приступить к составлению условий полной интегрируемости системы (Σ_2'). Как показывают стрелки схемы фиг. 8, этих условий два и они даются равенствами численных результатов:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right) \text{ и } \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\right). \tag{72}$$

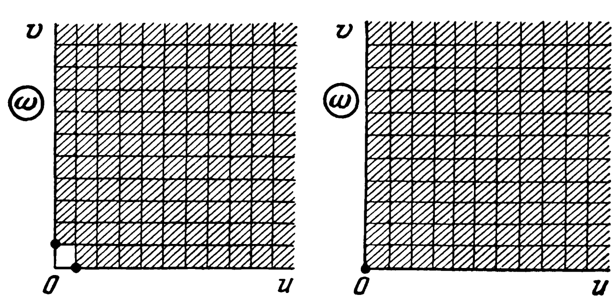
Вследствие того, что в системе (Σ_2') все три частные производные 2-го порядка выражены рациональным образом через $\frac{\partial\omega}{\partial u}$, $\frac{\partial\omega}{\partial v}$ и ω, равенства (72) должны дать два уравнения с двумя неизвестными $\frac{\partial\omega}{\partial u}$ и $\frac{\partial\omega}{\partial v}$. В общем случае, т. е. при самых общих возможных функциях E, F, G, связанных между собою лишь двумя уравнениями (63), вероятно, уравнения (72) алгебраически совместны и при разрешении их относительно $\frac{\partial\omega}{\partial u}$, $\frac{\partial\omega}{\partial v}$ дадут выражения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial u}&=\Omega_1\left(\omega,\ E,\ F,\ G,\ \frac{\partial E}{\partial u},\dots\right),\\ \frac{\partial\omega}{\partial v}&=\Omega_2\left(\omega,\ E,\ F,\ G,\ \frac{\partial E}{\partial u},\dots\right).\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Присоединив равенства (73) к породившей их системе (Σ_2'), мы получим следующую за ней систему (Σ_3'):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}=\dots,\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=\dots,\quad \frac{\partial^3\omega}{\partial u^3}=\dots,\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}=\dots\\ &\frac{\partial\omega}{\partial u}=\Omega_1,\quad \frac{\partial\omega}{\partial v}=\Omega_2,\end{aligned}\right\} \qquad (\Sigma_3'($$

имеющую своей геометрической схемой левую схему фиг. 9.



Фиг. 9

Наличие одной пустой клетки в этой схеме говорит о том, что общее решение первоначальной системы (Σ'_0) может самое большее зависеть от одного произвольного постоянного и что, следовательно, на аналитической поверхности S может вообще иметься самое большее ∞^1 главных оснований. Но это заключение перестает быть корректным, как раньше, в указанном выше случае уничтожения знаменателя в выражении для $\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}$, так и теперь, в том случае, когда система двух уравнений (72) будет для возможных индивидуальных функций E, F, G представлять частные особенности, в форме ли сведения двух уравнений (72) к одному (случай, когда одно из них есть алгебраическое следствие другого), в форме ли обращения какого-нибудь из них в тождество $0=0$, или, наконец, в форме прямой их алгебраической несовместимости. Но за общее заключение говорит тот факт, что большинство до сих пор известных поверхностей, допускающих главное основание, допускают ∞^1 главных оснований.

Наконец, если система двух уравнений (72) не имеет при рассматриваемом общем случае возможных E, F, G [т. е. связанных только уравнениями (63)] никакой частной особенности и если, следовательно, мы можем разрешить эти уравнения относительно производных $\frac{\partial\omega}{\partial u}$, $\frac{\partial\omega}{\partial v}$ и получить формулы (73), тогда можно идти дальше и приступить к составлению условия полной интегрируемости системы (Σ'_3).

Как показывает левая схема фиг. 9, это условие дается равенством численных результатов:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right),$$

что, в силу формул (73), дает одно уравнение с одним неизвестным ω:

$$F\left(\omega,\ E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \dots\right)=0, \tag{74}$$

присоединяя которое (после его разрешения относительно ω) к системе (Σ'_3), мы получаем последнюю систему (Σ'_4):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}=\dots,\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=\dots,\quad \frac{\partial^3\omega}{\partial u^3}=\dots,\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}=\dots,\\ &\frac{\partial\omega}{\partial u}=\Omega_1,\quad \frac{\partial\omega}{\partial v}=\Omega_2,\quad \omega=f\left(E,\ F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \dots\right).\end{aligned}\right\}\ (\Sigma'_4)$$

Если при частных индивидуальных функциях E, F и G уравнение (74) обратится в тождество $0=0$, то на такой поверхности S имеется ∞^1 главных оснований, потому что в этом случае предыдущая система (Σ'_3) вполне интегрируема. Но если, как естественно ожидать в общем случае, уравнение (74) фактически содержит ω, то в системе (Σ'_4) функция f обозначает вполне определенное выражение, составленное из букв E, F, G и их частных производных. Так как ничто не доказывает, что найденное выражение f является решением первоначальной системы (Σ'_0), мы должны заменить в обоих уравнениях системы (Σ'_0) букву ω выражением f. Это даст два результата:

$$\left.\begin{aligned} R_1\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots\right) = 0, \\ R_2\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Неудовлетворение этих условий показывает, что на рассматриваемой поверхности S совсем нет никакого главного основания. Но удовлетворение их, показывая наличие на поверхности S главного основания, еще не доказывает, что их на S имеется ∞^1. По-видимому, в общем случае, при наличии главных оснований, система (Σ_0') имеет только одно решение; это соответствует тому, что на рассматриваемой поверхности S имеется лишь одно (вообще, конечное число) главное основание.

Данный нами анализ «ограниченной проблемы» имеет лишь предварительный характер. Целью его было только показать тот интерес, который представляет полное доведение до конца процесса Рикье—Жанэ для двух уравнений главного основания, составленных С. П. Финиковым. Это доведение до конца бросило бы свет на роль неприводимости многочленов, которою пользовался С. П. Фиников в главе V своей диссертации, когда он открывал свойство минимального геликоида.

§ 10. Мы должны восполнить здесь фундаментальный пробел в наших рассуждениях и строгим образом доказать, что решение рассматриваемых систем уравнений с частными производными есть аналитическая функция от произвольных постоянных. Без этой теоремы теряет смысл самый подсчет произвольных постоянных, равно как и различение параметрического произвола от функционального.

Итак, возвратимся к первоначальной системе (Σ^{**}) трех уравнений с частными производными от двух неизвестных φ и ψ. Мы предполагаем, что функции E, F и G нам уже даны, т. е. что они строго фиксированы и что они голоморфны в некоторой фиксированной точке (u_0, v_0), в которой гауссова кривизна K отлична от нуля, $(K)_0 \neq 0$.

Одновременно с системой (Σ^{**}) мы рассмотрим систему (46) двенадцати уравнений с частными производными:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^5\varphi}{\partial u^i \partial v^j} &= P_{ij}\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^4\varphi}{\partial v^4} \middle| \psi, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^4\psi}{\partial v^4}\right), \\ \frac{\partial^5\psi}{\partial u^i \partial v^j} &= Q_{ij}\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^4\varphi}{\partial v^4} \middle| \psi, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^4\psi}{\partial v^4}\right), \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

где $i + j = 5$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ и P_{ij}, Q_{ij} суть многочлены от производных функций φ и ψ порядка $\leqslant 4$, имеющие знаменателями целые положительные степени гауссовой кривизны K и разности $\psi - \varphi$.

Мы уже знаем, что все уравнения системы (46) являются дифференциальными следствиями первоначальной системы (Σ^{**}). Это означает, что всякое решение (φ, ψ) системы (Σ^{**}) есть вместе с тем решение системы (46). Обратное вообще не имеет места: решение (φ, ψ) системы (46) не должно непременно быть решением первоначальной системы (Σ^{**}). Исследуем более внимательно обстоятельства, связанные с этим пунктом.

Для этого предположим, что заданные нам функции E, F, G таковы, что система (Σ^{**}) заведомо имеет бесчисленное множество решений (φ, ψ), зависящее от одного или нескольких произвольных постоянных. Иначе говоря, мы предполагаем, что при заданных функциях E, F, G процесс Рикье — Жанэ приводит к некоторой редуцированной системе (Σ_{μ}^{**}), $\mu<16$, заведомо вполне интегрируемой, т. е. такой, у которой все ее параметрические производные суть произвольные постоянные.

Из § 7 мы знаем, что все параметрические производные системы (Σ_{μ}^{**}) имеют порядки $\leqslant 4$, причем сами неизвестные функции φ и ψ мы рассматриваем как параметрические производные этой системы, имеющие своим порядком число нуль. Что же касается непараметрических производных порядков $\leqslant 4$ этой системы, то всякая из них получается решением некоторого алгебраического уравнения и, значит, есть определенная алгебраическая функция A от параметрических производных. Так как всех вообще производных порядков $\leqslant 4$ у неизвестных функций φ и ψ имеется 30, то отсюда следует, что непараметрические производные системы (Σ_{μ}^{**}), имеющие порядки $\leqslant 4$, представляются в виде определенных алгебраических функций A_1, $A_2, \ldots$ числом < 30, имеющих своими аргументами параметрические производные этой системы. Пусть число этих последних равно k: из § 7 мы знаем, что $1 \leqslant k \leqslant 12$. Будем обозначать через C_1, $C_2, \ldots$, C_k эти параметрические производные, причем две параметрические производные нулевого порядка, φ и ψ, мы обозначим соответственно C_1 и C_2. Таким образом, все непараметрические производные порядков $\leqslant 4$ системы (Σ_{μ}^{**}) представятся в виде алгебраических функций: $A_1(C_1, C_2, \ldots, C_k)$, $A_2(C_1, C_2, \ldots C_k), \ldots$, число которых меньше 30.

Перейдем теперь к рассмотрению системы (46). Как показывает самая форма уравнений этой системы, параметрическими производными этой системы являются все производные порядков $\leqslant 4$ и только такие производные. Поэтому, когда мы применяем к системе (46) процесс Рикье—Жанэ, каждый шаг этого процесса существенно убавляет число параметрических производных, и когда мы, развертывая шаг за шагом этот процесс, придем через конечное число $\nu\,(\nu < 30)$ шагов к последней системе (46_{ν}), всякая ее параметрическая производная окажется уже произвольной постоянной, потому что последняя система процесса Рикье—Жанэ всегда вполне интегрируема. Отсюда следует, что параметрические производные системы (46_{ν}) имеются в конечном числе $m\,(m < 30)$ и все содержатся среди производных порядков $\leqslant 4$ функций φ и ψ.

Но мы видели, что всякое решение (φ, ψ) первоначальной системы (Σ^{**}) является вместе с тем решением и системы (46). И так как всякое решение (φ, ψ) системы (Σ^{**}) вполне определяется численными значениями k параметрических производных C_1, $C_2, \ldots$, C_k системы (Σ_{μ}^{**}), то отсюда следует, что все параметрические производные системы (Σ_{μ}^{**}) содержатся среди параметрических производных системы (46_{ν}). Поэтому мы имеем право обозначить параметрические производные системы (46_{ν}) через

C_1, $C_2,\ldots$, C_k, $C_{k+1},\ldots$, C_m, где имеем неравенство $k \leqslant m < 30$. Здесь $C_{k+1},\ldots$, C_m обозначают те параметрические производные системы (46_ν), которые не являются параметрическими производными для системы (Σ_μ^{**}) и которые, следовательно, выразимы в виде алгебраических функций:

$$C_{k+1} = A_{k+1}(C_1,\ C_2,\ldots,\ C_k),\ldots,\ C_m = A_m(C_1,\ C_2,\ldots,\ C_k) \tag{76}$$

от букв C_1, $C_2,\ldots$, C_k.

Всякое решение (φ, ψ) вполне определяется численными значениями произвольных постоянных C_1, $C_2,\ldots$, C_m. Следовательно, общее решение (φ, ψ) системы (46) должно писаться в виде:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \Phi(u,\ v,\ C_1,\ C_2,\ldots,\ C_k,\ C_{k+1},\ldots,\ C_m), \\ \psi &= \Psi(u,\ v,\ C_1,\ C_2,\ldots,\ C_k,\ C_{k+1},\ldots,\ C_m), \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

где Φ и Ψ суть аналитические функции от аргументов u и v и функции неизвестной природы от букв C_1, $C_2,\ldots$, C_k, $C_{k+1},\ldots$, C_m.

Чтобы получить из общего решения (77) системы (46) общее решение первоначальной системы (Σ^{**}), очевидно нужно в равенствах (77) заменить буквы $C_{k+1},\ldots,C_m$ по формулам (76), т. е. надо подставить в равенства (77) вместо букв $C_{k+1},\ldots$, C_m алгебраические функции A_{k+1} $(C_1,C_2,\ldots,C_k),\ldots,A_m(C_1,C_2,\ldots,C_k)$ от букв C_1, $C_2,\ldots,C_k$. Отсюда следует, что если мы установим аналитический характер зависимости функций Φ и Ψ от аргументов C_1, $C_2,\ldots$, C_k, $C_{k+1},\ldots$, C_m, то этим самым немедленно установим аналитичность общего решения (φ, ψ) первоначальной системы (Σ^{**}), рассматриваемого как функции аргументов u, v, C_1, $C_2,\ldots$, C_k. Действительно, аналитические функции Φ или Ψ не утрачивают своей аналитичности, когда заменяют аргументы $C_{k+1},\ldots$, C_m алгебраическими функциями $A_{k+1},\ldots$, A_m, т. е. когда рассматривают функции от функций $\Phi(u,\ v,\ C_1,\ldots,\ C_k,\ A_{k+1},\ldots,\ A_m)$ и $\Psi(u,\ v,\ C_1,\ldots,\ C_k,\ A_{k+1},\ldots,\ A_m)$.

Таким образом, все дело сводится к доказательству, что общее решение (77) системы (46) есть аналитическая функция от всех букв.

Установив это, напишем формальным образом разложения Тэйлора для функций φ и ψ в точке (u_0, v_0):

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \Sigma\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\varphi}{\partial u^{\alpha_1}\,\partial v^{\alpha_2}}\right)_0 \frac{(u-u_0)^{\alpha_1}(v-v_0)^{\alpha_2}}{\alpha_1!\ \alpha_2!}, \\ \psi &= \Sigma\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\psi}{\partial u^{\alpha_1}\,\partial u^{\alpha_2}}\right)_0 \frac{(u-u_0)^{\alpha_1}(v-v_0)^{\alpha_2}}{\alpha_1!\ \alpha_2!}. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Если функции φ и ψ, даваемые разложениями (78), суть решение системы (46), то произвольными являются лишь параметрические производные $\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\varphi}{\partial u^{\alpha_1}\,\partial v^{\alpha_2}}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\psi}{\partial u^{\alpha_1}\,\partial v^{\alpha_2}}\right)_0$ системы (46_ν), обозначенные нами выше через C_1, $C_2,\ldots$, C_m.

Все же остальные коэффициенты $\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\varphi}{\partial u^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\psi}{\partial u^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}}\right)_0$ разложений (78), если $\alpha_1+\alpha_2\leqslant 4$, суть алгебраические функции B аргументов C_1, $C_2,\ldots, C_m$. В самом деле, все эти коэффициенты суть непараметрические производные порядков $\leqslant 4$ системы (46_ν) и, значит, получаются решением алгебраических уравнений, содержащих, кроме них, лишь параметрические производные этой системы. Рассматриваемые алгебраические функции

$$B_1(C_1, C_2,\ldots, C_m),\ B_2(C_1, C_2,\ldots, C_m),\ldots \tag{79}$$

имеются лишь в конечном числе s $(s<30)$, так как производных порядков $\leqslant 4$ у функций φ и ψ имеется лишь 30, $s=30-m$.

Последнее обстоятельство очень важно. В самом деле, написав алгебраические функции B сначала с их первоначальными аргументами $C_1, C_2,\ldots, C_k, C_{k+1},\ldots, C_m$:

$$B_1(C_1, C_2,\ldots, C_k,\ C_{k+1},\ldots, C_m),\ldots, B_s(C_1, C_2,\ldots, C_k, C_{k+1},\ldots, C_m), \tag{80}$$

а затем с аргументами $C_{k+1},\ldots, C_m$, замененными на алгебраические функции $A_{k+1}(C_1, C_2,\ldots, C_k),\ldots, A_m(C_1, C_2,\ldots, C_k)$, т. е. написав:

$$B_1(C_1, C_2,\ldots, C_k,\ A_{k+1},\ldots A_m),\ldots,B_s(C_1, C_2,\ldots, C_k, A_{k+1},\ldots, A_m), \tag{81}$$

мы получаем систему $2s$ алгебраических функций аргументов C_1, $C_2,\ldots$, C_m. Но когда нам дается конечная система алгебраических функций, мы всегда можем отыскать такие фиксированные значения аргументов (мы их будем называть «начальными значениями»), в которых все рассматриваемые алгебраические функции голоморфны. В нашем случае мы можем найти такие начальные значения C_1^0, $C_2^0,\ldots$, C_m^0 аргументов $C_1, C_2,\ldots, C_m$, что рассматриваемые алгебраические функции (80) и (81), все без исключения, будут голоморфны в кругах Γ_1, $\Gamma_2,\ldots$, Γ_m, имеющих своими центрами точки C_1^0, $C_2^0,\ldots$, C_m^0 и радиусом некоторое положительное фиксированное число ρ, $\rho>0$. При этом, имея в виду, что по самому смыслу главного основания функции φ и ψ существенно различны, $\varphi\neq\psi$, мы должны предположить начальные значения C_1^0 и C_2^0 существенно неравными, $C_1^0\neq C_2^0$; это обстоятельство позволяет нам предположить оба круга Γ_1 и Γ_2 удаленными один от другого на некоторое ненулевое расстояние; достаточно, например, предположить, что радиус ρ выбран меньшим, чем одна треть расстояния точек C_1^0 и C_2^0.

Но из § 5 мы знаем, что все производные порядка $\leqslant 5$ функций φ и ψ, образующих решение (φ, ψ) системы (46), выражаются в виде многочленов от производных этих функций порядков $\leqslant 4$, имеющих знаменателями целые положительные степени гауссовой кривизны K и разности $\psi-\varphi$. Отсюда тотчас же следует, что все коэффициенты $\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\varphi}{\partial u^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\psi}{\partial u^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}}\right)_0$ формальных разложений Тэйлора (78) суть алгебраические функции аргументов C_1, $C_2,\ldots,C_k$, $C_{k+1},\ldots,C_m$, голоморфные в кругах

$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k, \Gamma_{k+1}, \ldots, \Gamma_m$ и продолжающие оставаться голоморфными в $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$, когда мы заменим в них аргументы $C_{k+1}, \ldots, C_m$ алгебраическими функциями $A_{k+1}(C_1, C_2, \ldots, C_k), \ldots, A_m(C_1, C_2, \ldots, C_k)$ аргументов $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Это заключение очень важно.

Установив это, заменим во всех уравнениях системы (46) аргументы u, v и неизвестные функции φ, ψ другими аргументами u^*, v^* и неизвестными функциями φ^*, ψ^* по формулам:

$$u = u_0 + u^*, \quad v = v_0 + v^*, \quad \varphi = \sigma + \varphi^*, \quad \psi = \tau + \psi^*, \tag{82}$$

где σ и τ суть многочлены от букв u^*, v^* степени не выше 4. Мы предполагаем эти два многочлена σ и τ выбранными таким образом, чтобы начальные значения (т. е. значения при $u^* = 0$, $v^* = 0$) этих многочленов и их частных производных порядков $\leqslant 4$ были все в точности равны соответствующим коэффициентам $\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\varphi}{\partial u^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\psi}{\partial u^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}}\right)_0$ рядов Тэйлора (78). При таком выборе многочленов σ и τ уравнения (46) после подстановки (82) получают вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^5\varphi^*}{\partial u^{*i}\,\partial v^{*j}} &= P^*_{ij}\left(\varphi^*, \frac{\partial\varphi^*}{\partial u^*}, \ldots, \frac{\partial^4\varphi^*}{\partial v^{*4}}\,\middle|\,\psi^*, \frac{\partial\psi^*}{\partial u^*}, \ldots, \frac{\partial^4\psi^*}{\partial v^{*4}}\right), \\ \frac{\partial^5\psi^*}{\partial u^{*i}\,\partial v^{*j}} &= Q^*_{ij}\left(\varphi^*, \frac{\partial\varphi^*}{\partial u^*}, \ldots, \frac{\partial^4\psi^*}{\partial v^{*4}}\,\middle|\,\psi^*, \frac{\partial\psi^*}{\partial u^*}, \ldots, \frac{\partial^4\psi^*}{\partial v^{*4}}\right), \end{aligned}\right\} \tag{46*}$$

причем на этот раз правые части P^*_{ij}, Q^*_{ij} зависят явным образом от $C_1, C_2, \ldots, C_m$ и суть рациональные функции от этих букв, голоморфные в кругах $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$, при условии, что численные величины букв u^*, v^* φ^*, ψ^* будут удовлетворять неравенствам:

$$\left.\begin{aligned} |u^*| &\leqslant h \qquad (\gamma_1), \\ |v^*| &\leqslant h \qquad (\gamma_2), \\ |\varphi^*| &\leqslant h \qquad (\gamma_3), \\ |\psi^*| &\leqslant h \qquad (\gamma_4), \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

где h — положительное фиксированное число, достаточно малое.

Важно заметить, что для того, чтобы получить решение (φ, ψ) системы (46), определенное численными величинами $C_1, C_2, \ldots, C_m$ произвольных постоянных, нам нужно найти решение (φ^*, ψ^*) системы (46*), определенное тем единственным условием, что φ^* и ψ^* уничтожаются в точке $u^* = 0$, $v^* = 0$, так же как все их производные порядков $\leqslant 4$.

Заметим, что при достаточно малом h, $h > 0$ все функции P^*_{ij}, Q^*_{ij} голоморфны в кругах $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_m$, определенных выше для параметров $C_1, C_2, \ldots, C_m$, а также в четырех кругах γ_1, γ_2, γ_3 и γ_4, определенных формулами (83) для букв u^*, v^*, φ^*, ψ^*, рассматриваемых как независимые переменные.

Отсюда тотчас же следует, что функция

$$f = \frac{M}{1 - \dfrac{u^* + v^* + \varphi^* + \dfrac{\partial\varphi^*}{\partial u} + \ldots + \dfrac{\partial^4\varphi^*}{\partial v^{*4}} + \psi^* + \dfrac{\partial\psi^*}{\partial u^*} + \ldots + \dfrac{\partial^4\psi^*}{\partial v^{*4}}}{r}} \tag{84}$$

является мажорантой [1]:

$$P^*_{ij} \ll f, \qquad Q^*_{ij} \ll f \tag{85}$$

сразу для всех двенадцати функций P^*_{ij}, Q^*_{ij}, если только положительное число M будет выбрано достаточно большим и положительное число r достаточно малым, причем важно заметить, что фиксированные числа M и r совершенно не зависят от параметров $C_1, C_2, \ldots C_m$, лишь бы они оставались в кругах $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$.

Так как функция f есть мажоранта для P^*_{ij} и Q^*_{ij}, то отсюда следует, что решение $(\overline{\varphi}^*, \overline{\psi}^*)$ системы

$$\frac{\partial^5\overline{\varphi}^*}{\partial u^{*i}\partial v^{*j}} = \frac{\partial^5\overline{\psi}^*}{\partial u^{*i}\partial v^{*j}} = \frac{M}{1 - \dfrac{u^* + v^* + \overline{\varphi}^* + \ldots + \dfrac{\partial^4\overline{\varphi}^*}{\partial v^{*4}} + \overline{\psi}^* + \ldots + \dfrac{\partial^4\overline{\psi}^*}{\partial v^{*4}}}{r}}, \tag{86}$$

---

[1] Здесь уместно напомнить определение и основные свойства мажорант (см. Janet. Systèmes d'équations, стр. 38).

Пусть имеем какие-нибудь две функции g и G от тех же самых независимых переменных $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k$:

$$g = \sum g_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} y_1^{\alpha_1}, y_2^{\alpha_2}, \ldots, y_k^{\alpha_k}, \quad G = \sum G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} y_1^{\alpha_1}, y_2^{\alpha_2}, \ldots, y_k^{\alpha_k}.$$

Мы говорим, что G есть мажоранта для g, если имеем:

$$|g_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}| \leqslant G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k},$$

каковы бы ни были индексы α. При этом мы пишем:

$$g \ll G \text{ или } G \gg g.$$

1. Если имеем $g \ll G$, то имеем также и

$$\frac{\partial y}{\partial y_i} \ll \frac{\partial G}{\partial y_i} \text{ и } y_i g \ll y_i G.$$

Если $g_1 \ll G_1$ и $g_2 \ll G_2$, то имеем также

$$g_1 + g_2 \ll G_1 + G_2.$$

2. Предположим, что $y_1, y_2, \ldots, y_k$ обозначают переменные x_i и некоторые частные производные функции u, именно: $z_1, z_2, \ldots, z_h$ (сама функция u также может находиться среди z_i). Пусть $\dfrac{d}{dx_i}$ есть полная производная по x_i, т. е.

$$\frac{dg}{dx_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial g}{\partial z_\lambda}\,\frac{\partial z_\lambda}{\partial x_i}.$$

Некоторые из производных $\dfrac{\partial z_\lambda}{\partial x_i}$ могут не встречаться среди $z_1, z_2, \ldots, z_h$; в таком случае мы обозначим эти производные через $z_{h+1}, z_{h+2}, \ldots, z_H$. В выражениях уничтожающееся в точке $u^*=0$, $v^*=0$ вместе со всеми своими производными по u^* и по v^* порядков $\leqslant 4$, служит мажорантой для решения (φ^*, ψ^*) системы (46*), уничтожающегося в точке $u^*=0$, $v^*=0$ вместе со всеми производными порядков $\leqslant 4$, если, разумеется, будет установлено, что все коэффициенты обоих рядов Тэйлора для $\overline{\varphi}^*$ и $\overline{\psi}^*$ не отрицательны. Таким образом, для того чтобы доказать

$$\varphi^* \ll \overline{\varphi}^* \quad \text{и} \quad \psi^* \ll \overline{\psi}^*,$$

нужно установить существование указанного решения $(\overline{\varphi}^*, \overline{\psi}^*)$ системы (86).

Но система (86) допускает, очевидно, решение

$$\overline{\varphi}^* = \overline{\psi}^* = \Omega(u+v), \tag{87}$$

где $\Omega(z)$ — аналитическая функция одного аргумента z, голоморфная в точке $z=0$ и имеющая все коэффициенты Тэйлора положительными или нулевыми.

Действительно, полагая $z = u^* + v^*$, мы имеем для определения искомой функции $\Omega(z)$ обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^5\Omega}{dz^5} = \frac{M}{1 - \dfrac{z + 2\Omega + 4\dfrac{d\Omega}{dz} + 6\dfrac{d^2\Omega}{dz^2} + 8\dfrac{d^3\Omega}{dz^2} + 10\dfrac{d^4\Omega}{dz^4}}{r}}, \tag{88}$$

которое при начальных данных

$$\Omega(0) = \Omega'(0) = \Omega''(0) = \Omega'''(0) = \Omega^{(\mathrm{IV})}(0) = 0 \tag{89}$$

вполне определяет искомую функцию $\Omega(z)$, не имеющую, очевидно, отрицательных коэффициентов Тэйлора.

Из доказанного следует, что коэффициенты $\left(\dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\varphi}{\partial u^{\alpha_1}\,\partial v^{\alpha_2}}\right)_0$, $\left(\dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\psi}{\partial u^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}}\right)_0$ формально написанных рядов Тэйлора (78), начиная с $\alpha_1+\alpha_2 \geqslant 5$, меньше по абсолютной величине (модулю) соответствующих коэффициентов разложений для решения $(\overline{\varphi}^*, \overline{\psi}^*)$ системы (86), причем мы знаем, что это решение, определенное условием уничтожения в точке $u^*=0$, $v^*=0$ вместе со всеми производными порядков $\leqslant 4$, заведомо существует, что оно

$\dfrac{dg}{dx_i}$ и $\dfrac{dG}{dx_i}$ будем рассматривать все x_i и все $z_1, z_2, \ldots, z_h, z_{h+1}, \ldots, z_H$ как независимые переменные. В силу предшествующих замечаний имеем:

$$\frac{dg}{dx_i} \ll \frac{dG}{dx_i}.$$

3. Если $g \ll G$ и если $|y_i| \ll Y_i$, каково бы ни было i, имеем неравенство:

$$\left|\sum g_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_k^{\alpha_k}\right| \ll \sum G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} Y_1^{\alpha_1} Y_2^{\alpha_2} \ldots Y_k^{\alpha_k}.$$

4. Пусть g_0 и G_0 — численные величины выражений g и G для $y_1 = y_2 = \ldots = y_k = 0$. В этом случае, если $g \ll G$, имеем также $g - g_0 \ll G - G_0$.

голоморфно в точке $u^* = 0$, $v^* = 0$ и что его разложение в ряд Тэйлора не имеет отрицательных коэффициентов. Так как эти коэффициенты суть вполне определенные числа, совершенно не зависящие ни от параметров, ни от переменных, ни от каких-либо букв, то отсюда следует, что ряды Тэйлора (78) — равномерно сходящиеся внутри кругов $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ для параметров $C_1, C_2, \ldots, C_m$ и внутри кругов

$$|u - u_0| \leqslant h, \quad |v - v_0| \leqslant h$$

при h достаточно малом и положительном. Это и показывает, что общее решение (φ, ψ) системы (46), написанное в виде формулы (77), есть аналитическая функция параметров $C_1, C_2, \ldots, C_m$, голоморфная внутри кругов $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$, и что голоморфизм в кругах $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ не нарушается, когда параметры $C_{k+1}, \ldots, C_m$ заменяют алгебраическими функциями $A_{k+1}(C_1, C_2, \ldots, C_k) \ldots A_m(C_1, C_2, \ldots, C_k)$ параметров $C_1, C_2, \ldots, C_k$. А это и показывает, что общее решение (φ, ψ) первоначальной системы (Σ^{**}) есть голоморфная функция от параметров $C_1, C_2, \ldots, C_k$ в кругах $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$.

§ **11**. Переходим к последнему и главному пункту настоящего исследования: к доказательству того, что каждый данный линейный элемент

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{1}$$

имеет бесчисленное множество поверхностей $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$, лишенных всякого главного основания. Само собой разумеется, что мы предполагаем гауссову кривизну K отличной от нуля $(K \neq 0)$, так как не рассматриваем развертывающихся поверхностей.

Начинаем с того, что отбрасываем все те линейные элементы ds^2, которые совсем не имеют поверхностей S, допускающих главное основание. Для настоящего исследования такие линейные элементы ds^2 не представляют, очевидно, никакого интереса. Заметим лишь, что этот случай как раз и является самым общим. Действительно, в сообщении Академии в марте 1938 г. [1] нами доказано, что для любых заданных аналитических функций $F(u, v)$ и $G(u, v)$ двух независимых переменных u, v всегда можно подобрать такой многочлен $E(u, v)$ от букв u, v с целыми коэффициентами, что линейный элемент $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ будет совершенно лишен поверхностей, допускающих главное основание. Доказательство этого предложения там было проведено с достаточной полнотой, и к нему нет надобности возвращаться. Важно, что отбрасываемые линейные элементы ds^2 порождаются двумя произвольными функциями $F(u, v)$ и $G(u, v)$ двух аргументов.

Остающиеся линейные элементы ds^2 таковы, что для каждого из них заведомо имеются поверхности S, допускающие главное основание.

[1] См. «О существовании алгебраических поверхностей, не имеющих главного основания. III, IV». Докл. АН СССР, 1938, 19, № 4.

Проблема, которая естественно встает перед нами, такова: узнать, существуют ли такие линейные элементы ds^2, у которых всякая поверхность $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$ допускает главное основание.

Мы сейчас докажем, что это невозможно и что всякий линейный элемент ds^2 содержит поверхности S, лишенные главного основания; притом такие поверхности как раз и образуют главную массу поверхностей, принадлежащих линейному элементу ds^2. Поверхности S, принадлежащие ds^2 и допускающие главное основание, являются исключительными.

Чтобы видеть это, оценим сначала произвол поверхности $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$, принадлежащей данному линейному элементу $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$.

Для определения всех таких поверхностей S в нашем распоряжении имеются лишь два уравнения Кодацци с частными производными:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\delta}{\partial v} - \frac{\partial\delta'}{\partial u} + p\delta + p'\delta' + p''\delta'' = 0, \\ &\frac{\partial\delta''}{\partial u} - \frac{\partial\delta'}{\partial v} + q\delta + q'\delta' + q''\delta'' = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

и одно конечное уравнение Гаусса

$$\delta\delta'' - \delta'^2 = K. \tag{7}$$

Здесь p, p', p'', q, q', q'' — символы Кристоффеля (до множителя); никаких других уравнений, связывающих коэффициенты δ, δ', δ'' второй квадратичной формы, мы не имеем.

Если мы определим из уравнения Гаусса δ'', $\delta'' = \frac{K + \delta'^2}{\delta}$, и подставим в уравнения Кодацци (6), то получим два уравнения с частными производными 1-го порядка от двух неизвестных функций $\delta(u, v)$ и $\delta'(u, v)$. Так как система этих двух уравнений имеет нормальную форму Коши — Ковалевской, полное определение неизвестных функций $\delta(u, v)$ и $\delta'(u, v)$, а с ними и поверхности S (до положения ее в пространстве), проходит с заданием начальных условий по типу Коши — Ковалевской, т. е. произвольным заданием двух аналитических функций $\delta(u, v_0)$ и $\delta'(u, v_0)$ одного независимого переменного u.

Следовательно, многообразие всех поверхностей $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$, принадлежащих данному линейному элементу $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, есть многообразие функциональное, образуемое двумя произвольными аналитическими функциями одного независимого переменного.

Оценим теперь произвол поверхности $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$, принадлежащей данному линейному элементу ds^2 и допускающей главное основание.

Так как линейный элемент ds^2 дан, т. е. даны функции E, F, G, то, как мы видели, общее решение (φ, ψ) системы (Σ^{**}), определяющей главное основание (φ, ψ), пишется в виде:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \Phi(u, v, C_1, C_2, \ldots, C_k), \\ \psi &= \Psi(u, v, C_1, C_2, \ldots, C_k), \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — произвольные постоянные, число k которых не может превысить двенадцати $1 \leqslant k \leqslant 12$. Что же касается функций Φ и Ψ, то они суть аналитические функции от всех букв, в частности от букв $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Таким образом, многообразие всех главных оснований (φ, ψ), принадлежащих данному линейному элементу ds^2, есть параметрическое, и оно не выше ∞^{12}.

Важно теперь заметить, что знание индивидуального главного основания (φ, ψ) определяет с параметрическим произволом ∞^1 все три коэффициента $\delta, \delta', \delta''$ второй квадратичной формы.

Действительно, выведенные нами ранее формулы:

$$\delta = (ax) + \left(\frac{b}{x}\right), \quad -\delta' = (ax)\varphi + \left(\frac{b}{x}\right)\psi, \quad \delta'' = (ax)\varphi^2 + \left(\frac{b}{x}\right)\psi^2 \tag{11}$$

и

$$a = b = \frac{\sqrt{K}}{\psi - \varphi} \tag{20}$$

водят определение $\delta, \delta', \delta''$ к определению буквы x. Но для определения буквы x мы имеем одно уравнение Риккати (21), интегрирование которого дает нам выражение для буквы x в виде:

$$x = \sqrt{\frac{\alpha^* C + \beta^*}{\gamma^* C + 1}}, \tag{23}$$

где $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ — совершенно определенные аналитические функции двух аргументов u, v и C — новое произвольное постоянное.

Мы видим, что совокупность формул (11), (20) и (23) определяет коэффициенты $\delta, \delta', \delta''$ второй квадратичной формы с параметрическим произволом ∞^1 через функции φ и ψ. С другой стороны, принимая во внимание, что сами функции φ и ψ определяются с параметрическим произволом не высшим, чем ∞^{12}, заключаем, что $\delta, \delta', \delta''$ определяются с параметрическим произволом не высшим, чем ∞^{13}.

Сопоставим найденные факты: с одной стороны, многообразие всех поверхностей $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$, принадлежащих данному линейному элементу ds^2, функциональное, образуемое двумя произвольными функциями одного аргумента; с другой стороны, многообразие поверхностей $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$, принадлежащих линейному элементу ds^2 и имеющих главное основание, параметрическое, не высшее, чем ∞^{13}. Отсюда обычно делают заключение, что поверхностей S, принадлежащих ds^2 и не имеющих главного основания, неизмеримо больше, чем поверхностей, принадлежащих ds^2 и имеющих главное основание.

Это заключение, носящее, собственно, лишь качественный характер, не представляет никакой надежности для математического анализа, потому что множество пар $\delta(u, v_0)$, $\delta'(u, v_0)$ произвольных аналитических функций одного аргумента и множество численных значений тринадцати параметров $C_1, C_2, \ldots, C_{12}\ C$ суть множества одной и той же мощности (мощности continuum'а). Поэтому отсюда еще нельзя непосредственно заключать о существовании поверхности S, принадлежащей ds^2 и лишенной главного основания.

Однако можно предыдущему смутному качественному рассуждению дать точную форму. Для этого заменим в формулах (90), (11), (20) и (23) переменное v фиксированным численным значением v_0, $v=v_0$. Тогда получим для δ и δ' выражения в виде совершенно определенных аналитических функций Δ и Δ', зависящих от одного аргумента u и от $k+1$ $(k+1\leqslant 13)$ произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_k, C$:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \Delta(u, C_1, C_2, \ldots, C_k, C), \\ \delta' &= \Delta'(u, C_1, C_2, \ldots, C_k, C). \end{aligned}\right\} \qquad (91)$$

Разлагая аналитические функции Δ и Δ' в точке $u=u_0$ в ряды Тэйлора, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n (u-u_0)^n, \\ \delta' &= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta'_n (u-u_0)^n, \end{aligned}\right\} \qquad (92)$$

где Δ_n и Δ'_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots)$ — вполне определенные аналитические функции от букв $C_1, C_2, \ldots, C_k, C$, голоморфные в некоторой точке $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_k^0, C^0$.

Отсюда мы выводим, что между всякими $k+2$ коэффициентами Тэйлора Δ_i или Δ'_i имеется зависимость, не сводящаяся к тождеству. В частности, мы имеем две зависимости, не сводящиеся к тождеству:

$$\left.\begin{aligned} F(\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_k) &= 0, \\ F_1(\Delta'_0, \Delta'_1, \ldots, \Delta'_k) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (93)$$

не содержащие никаких других переменных величин, ни каких-либо букв, и позволяющие выразить один из коэффициентов $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_k$ через другие, например:

$$\Delta_i = f(\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{i-1}, \Delta_{i+1}, \ldots, \Delta_n). \qquad (94)$$

Заметим, что правая часть f равенства (94) есть аналитическая функция k аргументов $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{i+1}, \ldots, \Delta_k$.

Вообще говоря, f есть функция многозначная, потому что аналитическое продолжение по тому или иному пути функции f при возвращении в прежнюю точку $(\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{i-1}, \Delta_{i+1}, \ldots, \Delta_k)$ может привести к новому численному значению коэффициента Δ_i. Но каковы бы ни были пути аналитического продолжения, здесь продолжает иметь силу известная теорема Вольтерра — Пуанкарэ о том, что аналитическое продолжение функции может привести самое большее к счетному множеству новых значений.

Таким образом, при заданных численных значениях коэффициентов $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{i-1}, \Delta_{i+1}, \ldots, \Delta_k$ коэффициент Δ_i может получить самое большее счетное множество численных значений. С другой стороны, функции $\delta(u, v_0)$ и $\delta'(u, v_0)$ могут быть выбраны произвольно; это означает, что все коэффициенты Δ_n и Δ_n' $(n = 0, 1, 2, 3\ldots)$ должны быть совершенно независимы друг от друга, так как они могут быть взяты произвольно [при условии, разумеется, сходимости рядов Тэйлора (92)]. Отсюда следует, что, фиксируя произвольно численные значения коэффициентов $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{i-1}, \Delta_{i+1}, \ldots, \Delta_k$ и выбирая произвольно численную величину коэффициента Δ_i, заведомо не принадлежащую его возможным численным значениям, получаемым аналитическим продолжением функции f, мы наверное имеем функцию $\delta(u, v_0)$ такую, что соответствующая поверхность $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$ не имеет главного основания, каковы бы ни были остальные коэффициенты Δ_n, $n > k$, функции $\delta(u, v_0)$ и какова бы ни была произвольно выбранная функция $\delta'(u, v_0)$.

Написав в этом случае функцию $\delta(u, v_0)$ в виде:

$$\delta(u, v_0) = \Delta_0 + \Delta_1(u - u_0) + \ldots + \Delta_k(u - u_0)^k + (u - u_0)^{k+1}\cdot\Phi(u), \quad (95)$$

мы видим, что, каковы бы ни были две произвольные аналитические функции $\Phi(u)$ и $\delta'(u, v_0)$, голоморфные в точке $u = u_0$, определяемая ими поверхность $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$ заведомо не имеет главного основания.

Таким образом, для всякого линейного элемента ds^2 всегда существует многообразие поверхностей S, образуемое двумя произвольными и независимыми одна от другой функциями одного аргумента u, заведомо не обладающих никаким главным основанием.

Например, полагая в разложениях (92) все коэффициенты Δ_n и Δ_n равными нулю, когда $n > k$, мы превращаем обе функции $\delta(u, v_0)$ и $\delta'(u, v_0)$ просто в многочлены степени $k\,(k \leqslant 12)$. И мы видим, что всегда можно выбрать коэффициенты этих многочленов $\delta(u, v_0)$ и $\delta'(u, v)$ таким образом, чтобы уравнения Кодацци при таких начальных данных определили поверхность $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$, лишенную главного основания.

В частности, учитывая, что всякое изгибание поверхности постоянной кривизны приводит опять к поверхности постоянной кривизны, мы видим, что существует бесконечно много аналитических поверхностей постоянной кривизны (произвольной ненулевой), не имеющих никакого главного основания.

Например, известно, что поверхность сферы S допускает главное основание. Но если мы из сферы S вырежем кусок S^* по какому-нибудь замкнутому аналитическому контуру k, то, изгибая этот кусок S^*, мы можем придать ему такую форму, при которой с S^* сбегут все главные основания.

Заключение

Проблема изгибания поверхности на главном основании постоянно привлекала внимание московской геометрической школы и с момента опубликования работ Карла Михайловича Петерсона (1866 г.) служила излюбленной темой работ московских геометров. Начало этой проблемы положено знаменитым мемуаром московского геометра К. М. Петерсона об отношениях и сродствах между кривыми поверхностями, появившимся в свет в 1866 г. Хотя немецкий перевод работ К. М. Петерсона был вскоре же (в 1868 г.) издан, однако напечатанная небольшая книжка («Ueber Kurven und Flächen», 1868) затерялась среди другой научной литературы, и фактически Запад ничего не знал о работах К. М. Петерсона. Лишь когда в 1891 г. французский геометр Рибокур близко подошел к этой теме, введя найденное им независимым образом понятие «сопряженной сети, общей двум поверхностям», необходимость нового перевода работ К. М. Петерсона сделалась ясной, и таковой появился в 1905 г. на французском языке в «Annales de Toulouse». Но еще несколько ранее частичные сведения о работах К. М. Петерсона стали известными Западу благодаря стараниям Раффи (Raffy), знавшего русский язык; Раффи первый перевел на французский язык некоторые термины, в том числе термин «главное основание» (réseau conjugué persistant). С тех пор число работ на Западе, посвященных изгибанию на главном основании, начало быстро расти. Среди геометров как отечественных, так и зарубежных, работы которых содействовали расширению или углублению наших сведений о свойствах главного основания или их иллюстрированию, были Бианки, Б. К. Млодзеевский, Фосс, Рацабони, Гишар, Коссера, Раффи, Гурса, Адам, Штеккель, Чичейка, Дарбу, Д. Ф. Егоров, Демулен, Сервант, Драх, Тахауер, Смит, Эйзенхарт, Сегре, С. П. Фиников, С. С. Бюшгенс, Руже, Лагалли, Террачини, Либман, Шур, Фрейбанк, Шафф и в последнее время Гамбье, А. Ф. Маслов, Вассёр, Ловетт, С. Д. Россинский, Лебель, Л. Н. Сретенский, Винченсини.

Несмотря на большое число сильных геометров, занимавшихся изгибанием поверхностей на главном основании, самая проблема общности такого изгибания оставалась в тени. Было исследовано громадное число уже известных классов поверхностей, оказавшихся способными изгибаться на главном основании, были открыты новые весьма интересные семейства поверхностей, допускающих главное основание, но все эти исследования приобретали частный характер и относительно общей проблемы о существовании или о несуществовании главного основания на аналитической поверхности имелся лишь ряд догадок, более или менее правдоподобных.

По приглашению С. П. Финикова, которому считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность за необходимую ориентацию в чуждой для меня области, мною выполнено здесь систематическое исследование этой проблемы.

Согласно окончательным результатам, свойство поверхности «допускать главное основание» оказывается весьма частным свойством. Как общее правило, данный линейный элемент

$$ds^2 = E\,du + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

не имеет ни одной поверхности $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$, допускающей главное основание. Таких линейных элементов ds^2 большинство, потому что в них мы можем произвольно задавать функции $F(u, v)$ и $G(u, v)$ двух аргументов u и v. Но и те линейные элементы ds^2, для которых заведомо существуют поверхности $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$, допускающие главное основание, основную массу поверхностей $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$ имеют лишенными главного основания: эта масса образуется двумя произвольными функциями одного аргумента, т. е. здесь та же самая степень произвола, какая имеется вообще у поверхностей $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$, принадлежащих данному линейному элементу ds^2. Напротив, произвол поверхностей $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$, принадлежащих данному линейному элементу ds^2 и имеющих главное основание, не функциональный, но лишь параметрический, не превосходящий ∞^{13}. Таким образом, и в тех линейных элементах ds^2, где заведомо имеются поверхности $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$, допускающие главное основание, эти поверхности вкраплены бесконечно тонкими прослойками в основной функциональный массив поверхностей, совсем лишенных главного основания.

Все это заставляет смотреть на свойство поверхности «обладать главным основанием» как на весьма частное свойство, имеющееся лишь в исключительных случаях. Не может быть никакого сравнения, по нашему мнению, сети главного основания с сетью линий кривизны, асимптотических линий, семейством геодезических линий и т. д. Последние имеются на каждой аналитической поверхности, и их изучение, по всей справедливости, образует главы классической дифференциальной геометрии, тогда как феномен главного основания, заслуживающий названия «феномена Петерсона», может составлять не главу, но лишь параграф дифференциальной геометрии[1].

Таким образом, по нашему мнению, не приходится переоценивать в настоящее время значение этого феномена.

Но, с другой стороны, не следует и недооценивать смысл этого феномена. Если бы главное основание составляло особенность какого-нибудь одного, ранее известного, классического семейства поверхностей, интерес феномена Петерсона был бы сведен на нет, так как главное основание было бы просто свойством этого семейства поверхностей. И в таком случае это обстоятельство, без сомнения, было бы давно усмотрено. Но на самом деле этого нет, и феномен Петерсона дает нам какую-то, еще мало понятную «косую» классификацию поверхностей, при которой наличие главного основания оказывается затрагивающим многие классические семейства поверхностей без того, чтобы содержать их целиком. Надо учесть еще, что погоня за общностью осуществляется ценою утраты глубины и открытия неожиданных, хотя и частных, но глубоких соотно-

[1] По крайней мере, до тех пор, пока еще нет понятия «главного основания с точностью до ε». Отметим здесь же некоторую условность этого пункта, так как, с одной стороны, условием является деление той или другой теории на «главы» и на «параграфы» и, с другой стороны, сказанное является лишь личным мнением автора, собственно далекого от классической геометрии.

шений. Так, на долю теории чисел выпало бы весьма мало теорем, если бы она сосредоточивалась на понятии общего иррационального числа и не имела в своем распоряжении квадратичных чисел, придающих ей бесконечное богатство свойств и глубоких соотношений.

Феномен Петерсона глубок и поэтому и впредь будет привлекать к себе заслуженное внимание геометров и аналистов. Достаточно, например, указать на его неожиданную и глубокую связь с квадратичными решениями уравнения Лапласа, уже послужившую предметом внимания ряда геометров, среди которых мы должны назвать имена Гишара, Д. Ф. Егорова, Драха, Террачини, Серванта, Лагалли, Цицейка, Эйзенхарта и в последнее время Гамбье, Демулена и, особенно, А. Ф. Маслова.

В заключение должен указать на постоянную помощь Надежды Михайловны Лузиной в осуществлении моих изысканий.

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ТЕОРЕМЫ ЖАНЭ — РИКЬЕ. I*

1. Формулировка теоремы. Известно, что формальные и абсолютно строгие теории, которыми мы обязаны Рикье (Riquier) и Жанэ (Janet), легко распространимы на некоторые системы уравнений с частными производными, где число неизвестных функций равно числу уравнений. Если, например, имеются три неизвестные функции u, v, w, мы будем предполагать, что рассматриваемые три уравнения имеют соответственно своими левыми частями: производную от u, производную от v и производную от w:

$$\frac{\partial^{\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_m}u}{\partial x_1^{\rho_1}\partial x_2^{\rho_2}\ldots\partial x_m^{\rho_m}}, \quad \frac{\partial^{\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_m}v}{\partial x_1^{\sigma_1}\partial x_2^{\sigma_2}\ldots\partial x_m^{\sigma_m}}, \quad \frac{\partial^{\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_m}w}{\partial x_1^{\tau_1}\partial x_2^{\tau_2}\ldots\partial x_m^{\tau_m}}.$$

Мы свяжем с каждым переменным x_i и с неизвестными u, v, w $s+1$ целых чисел, которые будем называть отметками этого переменного или этой неизвестной, причем первые отметки независимых переменных всегда равны 1. Пусть будут $1, C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{is}$ — отметки для x_i и $U_0, U_1, \ldots, U_s$ — отметки для u. Свяжем с каждой производной от u

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}}$$

$s+1$ отметок:

$$\Gamma_0 = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m+U_0,$$
$$\Gamma_k = \alpha_1 C_{1k}+\alpha_2 C_{2k}+\ldots+\alpha_m C_{mk}+U_k,$$

и поступим аналогично с производными от v и от w. Из двух каких-нибудь производных D, D' от u, v, w (безразлично, происходящих или нет от одной и той же функции), имеющих своими отметками соответственно

$$\Gamma_0,\ \Gamma_1,\ \ldots,\ \Gamma_s,$$
$$\Gamma_0',\ \Gamma_1',\ \ldots,\ \Gamma_s',$$

D будет называться последующей или предшествующей по отношению к D', смотря по тому, будет ли первая из разностей

$$\Gamma_0-\Gamma_0',\ \Gamma_1-\Gamma_1',\ \ldots,\ \Gamma_s-\Gamma_s',$$

которая не равна нулю, положительной или отрицательной. Если бы случилось, что все эти разности $\Gamma_0-\Gamma_0'$, $\Gamma_1-\Gamma_1', \ldots, \Gamma_s-\Gamma_s'$ оказались

---

* Докл. АН СССР, 1941, 31, № 1, 5—8.

равными нулю, мы поместили бы тогда обе производные D, D' в тот же самый класс.

Таким образом, все производные оказываются распределенными по классам C_1, C_2, ..., C_ν,..., обладающим следующими свойствами: 1) всякий класс состоит только из конечного числа элементов; 2) если $\nu' < \nu$, каждая производная из $C_{\nu'}$ есть предшествующая всякой производной из C_ν.

Мы будем предполагать, что каждое из данных уравнений содержит в своей правой части, кроме независимых переменных, только такие производные, которые предшествуют производной, написанной в левой его части.

Зададимся теперь теми начальными производными функциями, которые соответствуют системе:

$$\frac{\partial^{\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_m} u}{\partial x_1^{\rho_1} \partial x_2^{\rho_2} \ldots \partial x_m^{\rho_m}} = 0, \qquad \frac{\partial^{\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_m} v}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \ldots \partial x_m^{\sigma_m}} = 0,$$

$$\frac{\partial^{\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_m} w}{\partial x_1^{\tau_1} \partial x_2^{\tau_2} \ldots \partial x_m^{\tau_m}} = 0.$$

Проблема, к постановке которой мы приходим, заведомо допускает (под обычными условиями голоморфизма) голоморфное решение (u, v, w) и только одно такое решение.

Эта теорема охватывает как частный случай классическую теорему Коши — Ковалевской.

Теорема продолжает оставаться верной и тогда, когда в правой части каждого уравнения содержатся производные, не предшествующие производной, написанной в левой его части; но для этого нужно, чтобы первые отметки производных, стоящих направо, не превышали первой отметки производной, написанной в левой части, и чтобы были соблюдены некоторые неравенства.

2. Частный случай. Предположим, что $m = 1$, и рассмотрим систему (S) дифференциальных уравнений (не в частных производных), в которой содержится столько же уравнений, сколько неизвестных функций:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{array}\right\} \qquad (S)$$

где x_i суть неизвестные функции, зависящие от одного переменного t, a_{ij} — многочлены с постоянными коэффициентами степени не выше 2 относительно буквы D, $D = \frac{d}{dt}$, и b_i — данные функции от t.

Свяжем с переменными t и с неизвестными функциями x_i такую систему отметок, чтобы всякий из классов C_ν, порожденных ею, состоял только из одного элемента; это произойдет, например, если мы примем следующую систему отметок[1]:

$$\begin{array}{cccccc} t & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{array}$$

Раз система (S) дана, мы можем рассматривать самую последнюю производную D_1, которая в ней фигурирует, т. е. ту, которая есть следующая за всеми другими. Далее, мы можем разрешить относительно нее одно из тех уравнений системы (S), которые фактически ее содержат, и затем внести полученное выражение для D_1 во все другие уравнения, содержащие D_1. Наконец, мы можем трактовать образовавшуюся систему, всех уравнений, прежних и новых, не содержащих D_1, таким же образом как мы трактовали первоначальную систему (S), и так далее. Оперируя указанным образом, мы в конце концов придем к некоторой системе (Σ) уравнений, разрешенных относительно производных, в правой части каждого из которых содержатся только производные, предшествующие производной, написанной в его левой части; при этом левые части системы (Σ) все существенно различны. Следует заметить, что полученная система (Σ) алгебраически эквивалентна первоначальной системе (S) и что правые части системы (Σ) суть линейные выражения относительно производных порядков 0, 1 и 2 неизвестных функций x_i с постоянными коэффициентами за исключением свободных членов, сформированных при помощи данных функций b_i. Левые части системы (Σ) и их производные называются главными производными; все другие производные неизвестных x_i называются параметрическими для (Σ).

Напишем теперь условия (C) полной интегрируемости системы (Σ). Так как все эти условия проистекают только из трех тождеств,

$$\frac{d^2}{dt^2}(x) = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ и } \frac{d}{dt}(x) = \frac{dx}{dt},$$

то мы получим некоторые соотношения в конечном числе; они будут связывать независимое переменное t и параметрические производные для (Σ); если система (Σ) не была уже вполне интегрируемой, все полученные соотношения не могут оказаться тождественными.

Мы разрешаем эти соотношения так, как раньше разрешали уравнения заданной системы (S), и присоединяем полученные уравнения к уравнениям системы (Σ). Таким образом мы получаем систему (Σ'), состоящую из разрешенных уравнений, в правых частях которых содержатся лишь производные, предшествующие соответствующим производным, написанным в левых частях, причем эти последние все друг от друга отличны и имеют порядок $\leqslant 2$. Левые части D' системы (Σ') включают

[1] Иначе говоря, сначала производные располагаются по их порядкам, и затем уже по тем функциям, от которых они происходят.

в себя все левые части D системы (Σ), но, кроме них, содержат еще такие производные, которые не могут быть производными ни от какой производной D, потому что они являются параметрическими для (Σ). Далее, мы трактуем систему (Σ') точно таким же образом, как ранее трактовали систему (Σ), и так далее.

Мы теперь утверждаем, что указанный процесс не может продолжаться бесконечно. В самом деле, та основная операция, с помощью которой строятся последовательные системы $(\Sigma^{(\nu)})$, состоит каждый раз в обогащении множества главных производных путем присоедчнения к ним параметрических производных. Но мы уже видели, что эти последние имеют всегда порядок $\leqslant 2$, и, следовательно, они будут лишь в ограниченном числе. Отсюда мы заключаем, что начиная с известного момента ν последовательные системы $(\Sigma^{(\nu)})$ будут тождественными друг другу. А это и значит, что наступит момент, когда совершение операции окажется невозможным вследствие отсутствия условий (C): полученная финальная система (Ω) необходимо будет вполне интегрируемой. Однако может случиться, что по дороге нами будет получено соотношение между некоторыми постоянными и одним только независимым переменным t, что будет свидетельствовать о невозможности предложенной системы (S).

Установив это, предположим, что данная система (S) заведомо возможна и что ее общее решение зависит лишь от произвольных постоянных в конечном числе. Мы хотим теперь охарактеризовать степень произвола решения $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системы (S).

Прежде всего финальная система (Ω) эквивалентна системе (S) в дифференциальном смысле (а не в алгебраическом). Будучи вполне интегрируемой, система (Ω) должна содержать в своих левых частях производные лишь от существенно различных функций. А так как общее решение системы (S) не может зависеть от произвольной функции, то финальная система (Ω) фактически содержит в своих левых частях производные от *всех* неизвестных функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Отсюда следует, что (Ω) есть система с одинаковым числом неизвестных функций и уравнений, и раз каждое уравнение системы (Ω) содержит в правой части лишь производные, предшествующие производной, написанной в левой части, то отсюда ясно, что финальная система Ω написана в нормальной форме Жанэ — Рикье.

Вот заключение, к которому мы приходим: всякая система (S), возможная и без решения, зависящего от произвольной функции, может быть написана в нормальной форме Ω Жанэ — Рикье. Следовательно, можно задаться произвольными величинами для $(x_i)_{t=t_0}$ и $\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{t=t_0}$, если в (Ω) фактически фигурирует вторая производная от x_i, и можно брать произвольно только $(x_i)_{t=t_0}$, если (Ω) содержит лишь первую производную от x_i; указанные величины целиком определяют решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ предложенной системы (S). Мы видим, какова степень общности решения системы (S): если (Ω) не содержит второй производной от x_i, произвол запрещается для $\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{t=t_0}$, а если (Ω) не содержит никакой производной от x_i, произвол запрещен даже для $(x_i)_{t=t_0}$.

Следовательно, нужно быть чрезвычайно осмотрительным в выборе совместных начальных условий, т. е. таких, которые действительно отвечают решению $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системы (S). Такой осмотрительности не требуется лишь в том исключительном случае, когда финальная система (Ω) имеет нормальную форму Коши.

Указанный путь, соединенный с теоремой Коши относительно одного уравнения, приводит нас к новой манере трактовать системы (S) каких-нибудь дифференциальных уравнений (не в частных производных).

Примечание. Первой проблемой, которая ставится по поводу совместных начальных условий, является проблема нулевых начальных условий: это название дают системе условий $[x_i(t_0) = 0, \quad x_i'(t_0) = 0]$, где индекс i принимает все значения $1, 2, 3, \ldots, n$. Здесь будет осуществлен очевидный прогресс, когда будет найден необходимый и достаточный критерий для совместности нулевых начальных условий по отношению к заданной системе (S) дифференциальных уравнений. Академик В. С. Кулебакин заметил мне, что является весьма желательным, чтобы были получены какие-нибудь общие результаты, касающиеся указанной совместности по отношению к системам дифференциальных уравнений, нелинейных и любого порядка, удовлетворяющих условию инвариантности для x_i. Эта проблема заслуживает внимания аналистов, так как она тесно связана с некоторыми проблемами механики.

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ТЕОРЕМЫ ЖАНЭ — РИКЬЕ. II, III*

1. Критерий осуществления нулевых начальных условий. Рассмотрим систему (S) дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{array}\right\} \qquad (S)$$

где x_i суть неизвестные функции, зависящие от одного переменного t, a_{ij} — многочлены с постоянными коэффициентами степени не выше 2 относительно буквы D,

$$D = \frac{d}{dt}$$

и b_i — аналитические функции, голоморфные для $t = t_0$. Мы предполагаем, что определитель $D = |a_{ij}|$ системы (S) не тождественен нулю.

В этих предположениях мы уточним нормальную форму (Ω) Жанэ — Рикье системы (S). Для этого мы обозначим через (Ω) совокупность таких уравнений системы (Ω), у которых в левых частях стоят производные k-го порядка, и соответственно через x_k совокупность тех неизвестных функций x_i, от которых берутся эти производные; здесь $k = 0$, 1 и 2. Так как в системе (Ω) число уравнений равно числу неизвестных функций и так как эта система содержит в левых частях производные от *всех* неизвестных функций, то мы имеем $(\Omega) = (\Omega_2) + (\Omega_1) + (\Omega_0)$ и $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_2 + x_1 + x_0$, где множества x_2, x_1 и x_0 не имеют попарно общих элементов. Это приводит к тому, что если мы пишем $x_2\{x_s\}$, $x_1 = \{x_r\}$ и $x_0 = \{x_p\}$, то величины индексов s, r и p образуют соответственно три множества Z_2, Z_1 и Z_0, составленные из натуральных чисел, не имеющие попарно общих элементов, соединение которых совпадает с совокупностью натуральных чисел, меньших, чем $n+1 : \{1,2,3,\ldots,n\} = Z_2 + Z_1 + Z_0$. С другой стороны, каждое уравнение системы (Ω) содержит в своей правой части только такие производные, которые *предшествуют* производной, написанной в его левой части; а так как система (Ω) есть вполне интегрируемая, то системы (Ω_2), (Ω_1) и (Ω_0) представятся в следующем виде:

---

* Докл. АН СССР, 1941, **31**, № 5, 417—424.

$$x_s'' = \sum \alpha_{s,\sigma} \cdot x_\sigma' + \sum \beta_{s,\sigma}\, x_\sigma + \sum \gamma_{s,\rho}\, x_\rho + B_s, \qquad (\Omega_2)$$

$$x_r' = \sum \alpha_{r,\sigma} \cdot x_\sigma' + \sum \beta_{r,\sigma}\, x_\sigma + \sum \gamma_{r,\rho}\, x_\rho + B_r, \qquad (\Omega_1)$$

$$x_p = \qquad \sum \beta_{p,\sigma}\, x_\sigma + \sum \gamma_{p,\rho} x_\rho + B_p, \qquad (\Omega_0)$$

где буквы α, β, γ с двумя индексами суть численные постоянные, зависящие от коэффициентов многочленов a_{ij} (и не зависящие от функции b_i), латинские индексы s, r и p суть произвольные элементы соответственных множеств Z_2, Z_1 и Z_0, греческие индексы σ и ρ принадлежат соответственно множествам Z_2 и Z_1 и B_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ суть некоторые линейные однородные выражения относительно производных заданных функций b_i с постоянными коэффициентами, зависящими только от n^2 многочленов a_{ij}.

Найденный вид системы (Ω) приводит нас к очевидному предложению: *необходимый и достаточный критерий для того, чтобы данная система* (S) *допускала решение* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *с нулевыми начальными условиями* $[x_i(t_0) = 0,\ x_1'(t_0) = 0]$, *состоит в том, что все функции* B и B_p *должны уничтожаться для* $t = t_0$.

2. Уточнение. Особенно интересен тот случай, когда мы имеем $b_1 = f(t)$, $b_2 = b_3 = \ldots = b_n = 0$.

Здесь более трудная проблема, заслуживающая большего интереса, чем предыдущая, состоит в вопросе: допускает или нет система (S) решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с нулевыми начальными условиями в предположении, что $f(t)$ есть любая аналитическая функция, голоморфная для $t = t_0$? Иными словами, если многочлены a_{ij} нам даны, а $f(t)$ есть произвольная функция, голоморфная для $t = t_0$, то требуется узнать, когда мы можем утверждать и когда вынуждены отрицать существование у такой системы (S) решения с нулевыми начальными условиями.

Прежде всего, в этом случае ясно, что все функции B_i имеют вид $B_i = A_i f(t)$, где A_i есть многочлен от буквы D, $D = \frac{d}{dt}$, с постоянными коэффициентами, зависящими только от n^2 многочленов a_{ij}. Отсюда немедленно заключаем, что необходимый и достаточный критерий для того, чтобы система (S) допускала решение с нулевыми начальными условиями при всякой функции $f(t)$, состоит в тождественном уничтожении операторов A_r и A_p.

Мы хотим теперь уточнить вид оператора A_s. Для этого нам достаточно проследить шаг за шагом за образованием системы (Ω) Жанэ — Рикье.

По самому определению системы (Ω) мы сначала встречаемся с системой (Σ), выведенной из первоначальной системы (S) и ей алгебраически эквивалентной. Система эта образована разрешенными уравнениями, причем каждое из них содержит в его правой части только такие производные, которые предшествуют производной, стоящей в его левой части;

заметим, что левые части уравнений системы (Ω) все отличны друг от друга. Что же касается правых частей этой системы, то каждая из них состоит из двух частей: из линейного однородного выражения относительно производных (порядков 0, 1 и 2) неизвестных функций x_i с постоянными коэффициентами и из члена, не зависящего от неизвестных x_i и сформированного при помощи $f(t)$. Раз система (Σ) алгебраически эквивалентна системе (S), указанный член имеет вид $af(t)$, где a есть численный множитель, зависящий от a_{ij}. Важно заметить, что если рассматриваемое уравнение не содержит производных порядка 2, то численный множитель a должен быть нулем [если бы этого не было, система (S) не могла бы допускать решения с нулевыми начальными условиями при всякой $f(t)$].

Мы должны теперь изучить переход к следующей системе (Σ'). Для этого мы должны сначала ввести условия (C) полной интегрируемости полученной системы (Σ). Так как все эти условия проистекают из трех тождеств

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2}{dt^2}(x) = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}(x) = \frac{dx}{dt}$$

и так как выражения для $\frac{dx}{dt}$ и x (в функции неизвестных x_i и параметрических производных) не содержат никакого члена $af(t)$, мы не будем иметь ни членов $af'(t)$, ни членов $af''(t)$. Но чтобы иметь систему (Σ'), нужно разрешить уравнения, проистекающие из условий (C) полной интегрируемости системы (Σ), так, как мы разрешили уравнения первоначально данной системы (S), и затем присоединить полученные уравнения к таковым системы (Σ). Отсюда заключаем немедленно, что полученная система (Σ') продолжает еще сохранять свойство [предшествующей системы (Σ): содержать в уравнениях члены $af(t)$ только в точности порядка 2.

Установив это, мы переходим к следующей системе (Σ''), поступая с системой (Σ') точно таким же образом, как это мы делали с системой (Σ), и так далее.

Но среди последовательных систем (Σ), (Σ'), (Σ'') искомая система (Ω) Жанэ — Рикье есть самая последняя.

Таким образом мы приходим к предложению:

Если система (S) допускает решение с нулевыми начальными условиями при всякой функции $f(t)$, голоморфной в точке t_0, то все операторы A_s имеют вид $a_s f(t)$, где a_s есть численный множитель, зависящий только от индексов i и j.

3. Однородные системы. Пусть $\|c_{ij}\|$ есть какая-нибудь прямоугольная матрица, имеющая p строк и q колонн и составленная из pq многочленов c_{ij} от буквы D, $D = \frac{d}{dt}$, с постоянными коэффициентами и *любых степеней.*

Теорема. *Критерий, необходимый и достаточный для того, чтобы система (H) дифференциальных уравнений:*

$$\left.\begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1j}\,x_j \ + \ldots + c_{1n}\,x_n = 0, \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2j}\,x_j \ + \ldots + c_{2n}\,x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{i1}\,x_1 + c_{i2}\,x_2 + \ldots + c_{ij}\,x_i \ + \ldots + c_{in}\,x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}\,x_1 + c_{n2}\,x_2 + \ldots + c_{nj}\,x_j + \ldots + c_{nn}\,x_n = 0, \end{array}\right\} \qquad (H)$$

допускала общее решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с k *произвольными функциями* x, *состоит в том, что матрица* $\|c_{ij}\|$ *системы* (H) *должна иметь своим рангом* $q-k$. *Если* Δ *есть какая-нибудь квадратная таблица порядка* $q-k$, *полученная из* $\|c_{ij}\|$ *уничтожением некоторых строк и колонн и имеющая определитель, не тождественно равный нулю, то можно произвольно выбирать те неизвестные функции* x, *колонны которых не принадлежат таблице* Δ; *тогда полное определение остальных неизвестных* x *зависит от произвольных постоянных, число которых ограничено.*

В самом деле, предположим (что всегда возможно) таблицу Δ составленной пересечением первых $q-k$ строк и колонн. Рассмотрим известный и вполне определенный процесс, дающий приведенную систему Эрмита (H^*), эквивалентную предложенной системе (H), посредством серии элементарных операций, употребленных в конечном числе.

Приведенная система Эрмита (H^*) есть система вида:

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{*}{c}_{11}x_1 & = 0, \\ \overset{*}{c}_{21}\,x_1 + \overset{*}{c}_{22}x_2 & = 0, \\ \overset{*}{c}_{31}x_1 + \overset{*}{c}_{32}x_2 + \overset{*}{c}_{33}x_3 & = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \overset{*}{c}_{m1}x_1 + \overset{*}{c}_{m2}x_2 + \overset{*}{c}_{m3}\,x_3 + \ldots & = 0, \end{array}\right\} \qquad (H^*)$$

где операторы $\overset{*}{c}_{ij}$ тождественны нулю, когда $j > i$. Элементарные операции, посредством которых строят последовательные системы дифференциальных уравнений, эквивалентных друг другу, отправляясь от заданной системы (H), состоят: 1) в транспозиции, проделываемой над двумя уравнениями уже полученной системы; 2) в умножении на постоянное, отличное от нуля, одного какого-нибудь уравнения; 3) в прибавлении к какому-нибудь уравнению уже полученной системы другого уравнения этой системы, предварительно подвергнутого действию некоторого оператора $P(D)$, где P есть многочлен от буквы D с постоянными коэффициентами. Важно заметить, что от совершения элементарной операции не изменяется ранг никакой матрицы, составленной из любых колонн матрицы $\|c_{ij}\|$. Отсюда немедленно заключают, что ни один из первых $q-k$ диагональных операторов $c^*_{11}, c^*_{22}, \ldots, c^*_{q-k,\,q-k}$ не есть тождественный нуль и что все операторы c^*_{ij}, $i > q-k$ суть тождественные нули. Отсюда следует, что $q-k$ первых неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{q-k}$ можно определить одно за другим, выполняя последовательно интегрирование цепочки дифференциальных уравнений, и что остальные неизвестные можно выбирать произвольным образом.

Следствие. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы системы:*

$$c_{12}x_2 + c_{13}x + \ldots + c_{1m}x_m = c_1 f(t),$$
$$c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2m}x_m = c_2 f(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_{m2}x_2 + c_{m3}x_3 + \ldots + c_{mm}x_m = c_m f(t),$$

или

$$a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = f(t),$$
$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = 0$$

были совместны при любой функции $f(t)$, состоит в тождественном уничтожении соответствующих определителей:

$$D' = \begin{vmatrix} c_1 c_{12} c_{13} & \cdot & \cdot & \cdot\, c_{1m} \\ c_2 c_{22} c_{23} & \cdot & \cdot & \cdot\, c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_m c_{m2} c_{m3} & \cdot & \cdot & c_{mm} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Мы, очевидно, предполагаем здесь ранги этих определителей соответственно равными $m-1$ и $n-2$; c_i суть численные множители.

4. Первая основная теорема. Предполагаем, что система

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= f(t), \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (S)$$

допускает решение с нулевыми начальными условиями, *какова бы ни была функция $f(t)$*. Кроме того, предполагаем, что определитель $D = |a_{ij}|$ этой системы не тождественен нулю и что, напротив, его минор D_{11} тождественен нулю. Пусть

$$x_s'' = \sum \alpha_{s,\sigma} x_\sigma' + \sum \beta_{s,\sigma} x_\sigma + \sum \gamma_{s,\rho} x_\rho + a_s f(t), \qquad (\Omega_2)$$

$$x_r' = \sum \alpha_{r,\sigma} \sigma_\sigma' + \sum \beta_{r,\sigma} x_\sigma + \sum \gamma_{r,\rho} x_\rho, \qquad (\Omega_1)$$

$$x_p = \qquad \sum \beta_{p,\sigma} x_\sigma + \sum \gamma_{p,\rho} x_\rho \qquad (\Omega_0)$$

есть нормальная форма (Ω) Жанэ — Рикье данной системы (S). Мы утверждаем, что если индекс 1 есть один из индексов s, то соответствующий численный множитель a_1 строго равен нулю. В самом деле, раз мы имеем тождество $D_{11} \equiv 0$, то данная система (S) останется совместной, какова бы *ни была функция* $f(t)$, и тогда, когда мы вынем из системы (S) все члены, зависящие от x_1. *То же самое, очевидно, должно происходить и с системой* (Ω). С другой стороны, определитель δ порядка n системы (Ω) не тождественен нулю. Поэтому в силу предыдущего следствия определитель δ должен стать тождественным нулю, когда мы заменим его колонну, соответствующую букве x_1, на колонну численных коэффициентов a_i. Пусть δ_1 — определитель, выведенный указанным образом из определителя δ, $\delta_1 \equiv 0$. Но, очевидно, мы получим член определителя δ_1 с самой высокой степенью буквы D, составив произведение элементов определителя δ_1, стоящих на его главной диагонали. А так как все эти элементы, кроме a_1, заведомо отличны от нуля, то отсюда следует, что число a_1 равно нулю, $a_1 = 0$.

Установив это, уничтожим в системе (Ω) все члены, зависящие от x_1. Мы получим систему (Σ_1), состоящую из n дифференциальных уравнений с $n-1$ неизвестными $x_2, x_3, \ldots, x_n$, *совместную, какова бы ни была* $f(t)$. Ясно, что система (Σ_1) является соединением нормальной системы (Ω_1) Жанэ — Рикье относительно неизвестных функций $x_2, x_3, \ldots, x_n$ и соотношения $L_1 = 0$, не зависящего от $f(t)$, линейного однородного относительно производных порядков 0 и 1 неизвестных $x_2, x_3, \ldots, x_n$ с постоянными коэффициентами. Очень важно заметить, что $f(t)$ не фигурирует в уравнениях порядков $\leqslant 1$ системы (Ω_1). Установив это, рассмотрим самую *последнюю* из производных, пусть D_1, действительно содержащихся в L_1, т. е. такую, которая *следует за всеми остальными*, и разрешим относительно нее соотношение $L_1 = 0$; пусть $D = L_1^*$ будет это разрешенное соотношение. Так как левые части системы (Ω_1) суть производные от *всех* неизвестных функций $x_2, x_3, \ldots, x_n$, то существует одно и только одно уравнение E в системе (Ω_1), левая часть которого зависит от D_1. Отсюда следует, что если мы внесем алгебраическим образом выражение L_1^* производной D_1 во все остальные уравнения системы (Ω_1), число которых равно $n-2$, и присоединим уравнение $D_1 = L_1^*$ к полученным таким образом $n-2$ уравнениям, то мы будем иметь нормальную систему Жанэ — Рикье относительно неизвестных $x_2, x_3, \ldots, x_n$; мы обозначим эту систему через (Ω_2). Важно заметить, что $f(t)$ не фигурирует ни в каком уравнении порядка $\leqslant 1$ системы (Ω_2). Если мы теперь внесем выражение L_1^* производной D_1 в обе части уравнения E и если внесем в полученное таким образом уравнение левые части системы (Ω_2), то будем иметь соотношение порядка $\leqslant 1$, линейное и однородное относительно всех производных, которые туда входят; пусть $L_2 = 0$ есть это соотношение.

Очень важно заметить, что $f(t)$ *не фигурирует в* L_2. Для доказательства этого предположим обратное и обозначим через $a_2 f(t)$ тот единственный член выражения L_2, который зависит от $f(t)$; далее, обозначим через (Σ_2) соединение системы (Ω_2) и соотношения $L_2 = 0$; наконец, обозначим через δ_2 определитель порядка n, образованный для системы (Σ_2) таким же точно образом, каким образован определитель δ_1 для системы

(Σ_1). Так как система (Σ_2) есть совместная, *какова бы ни была* $f(t)$, то определитель δ_2 есть тождественный нуль, $\delta_2 \equiv 0$. Но система (Σ_2) есть просто преобразование (посредством серии элементарных операций, определенных выше) системы (Σ_1), ей эквивалентной в дифференциальном смысле. Следовательно, определитель δ_2 есть только результат аналогичного преобразования определителя δ_1. И если мы проследим шаг за шагом все этапы этого преобразования, то тотчас же убедимся в том, что *численный множитель* a_2 *строго равен нулю*, и именно тем самым приемом, каким мы выше доказали равенство нулю численного множителя a_1.

Установив это, мы поступаем с полученной системой (Σ_2) точно таким же образом, как ранее поступали с системой (Σ_1), и *так далее*. Вследствие этого у нас получается последовательность систем

$$(\Sigma_1),\ (\Sigma_2),\ (\Sigma_3), \ldots,$$

где (Σ_i) есть соединение нормальной системы (Ω_i) Жанэ — Рикье относительно неизвестных $x_2, x_3, \ldots, x_n$ и некоторого соотношения $L_i = 0$. Очень важно заметить, что $f(t)$ не фигурирует ни в выражении L_i, ни во всех уравнениях системы (Ω_i), порядок которых $\leqslant 1$. Так же важно, что все эти системы эквивалентны друг другу в дифференциальном смысле и что число производных (порядков 0 и 1), содержащихся в L_i, существенно уменьшается с увеличением индекса i. Поэтому мы, в конце концов, придем к такой системе (Σ_m), у которой соответствующее ей соотношение $L_m = 0$ вырождается в тождество $0 = 0$. Но нормальная система (Ω_m) Жанэ — Рикье, очевидно, всегда допускает решение $x_2, x_3, \ldots, x_n$ с нулевыми начальными условиями при любой функции $f(t)$. Поэтому это же самое должно иметь место и для системы (Σ_1). Но так как всякое решение $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ системы (Σ_1) является вместе с тем и решением первоначально данной системы (S), когда принимают неизвестную функцию $x_1(t)$ тождественной нулю, $x_1(t) \equiv 0$, и так как решение с нулевыми начальными условиями у системы (S) должно быть *единственным*, то мы приходим к предложению:

Первая основная теорема. *Если система (S) допускает решение $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ с нулевыми начальными условиями $[x_i(t_0) = 0,$ $x_i'(t_0) = 0]$, какова бы ни была аналитическая функция $f(t)$, голоморфная для $t = t_0$, и если минор D_{11} системы (S) тождественен нулю, тогда необходимо имеем тождество $x_1(t) \equiv 0$ во всяком интервале (a, b) голоморфизма функции $f(t)$, содержащем точку t_0.*

Примечание. Так как это предложение, по-видимому, представляет некоторый интерес и за пределами чистой математики, то мы дали ему детальное доказательство. Можно было бы дать рассуждениям две различные формы: во-первых, аналитическую и, во-вторых, арифметическую. Аналитический путь — более длинный, но он нам кажется более предпочтительным, потому что чисто аналитическое доказательство, которое мы только что дали, распространяется тотчас же само собой на системы уравнений любого порядка и даже на системы нелинейных уравнений. Досягаемость арифметическим путем, по-видимому, очень невысока. К тому же, число отдельных частных случаев, которые приходится рассматривать, когда идут арифметическим путем, достаточно утомительное уже при $n = 3$, быстро увеличивается с возрастанием n.

Для неголоморфных функций $f(t)$ указанное предложение не имеет места.

О РЕГУЛЯРНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ НА ГЛАВНОМ ОСНОВАНИИ*

Основной оператор:

$$\Delta_f z = \frac{\partial z}{\partial v} + f \frac{\partial z}{\partial u};$$

его главные свойства:

$$\Delta_f (z_1 + z_2) = \Delta_f z_1 + \Delta_f z_2;$$

$$\Delta_f (z_1 \cdot z_2) = \Delta_f z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot \Delta_f z_2;$$

$$\Delta_f [F(z)] = F'(z) \cdot \Delta_f z;$$

$$\Delta_g \Delta_f z - \Delta_f \Delta_g z = \frac{\Delta_g f - \Delta_f g}{g - f} (\Delta_g z - \Delta_f z).$$

Положим в этой последней формуле

$$g = \psi, \ f = \varphi, \ \psi + \varphi = 0.$$

Тогда будем иметь:

$$\Delta_\psi \Delta_\varphi z - \Delta_\varphi \Delta_\psi z = -\frac{1}{2} (\Delta_\psi \ln \varphi + \Delta_\varphi \ln \varphi) (\Delta_\psi z - \Delta_\varphi z).$$

Полагая

$$x = -\frac{1}{2} (\Delta_\psi + \Delta_\varphi) \ln \varphi = -\frac{1}{2} (\Delta_\psi + \Delta_\varphi), \tag{x}$$

где мы всегда молчаливо предполагаем, что

$$\Delta_\psi = \Delta_\psi \ln \psi = \Delta_\psi \ln \varphi$$

и

$$\Delta_\varphi = \Delta_\varphi \ln \varphi = \Delta_\varphi \ln \psi,$$

мы имеем:

$$\Delta_\psi \Delta_\varphi z - \Delta_\varphi \Delta_\psi z = x \cdot (\Delta_\psi z - \Delta_\varphi z). \tag{0}$$

Здесь важно, что буква x отнюдь не зависит от буквы z. Полагая в этой формуле $z = \ln \varphi$ или $z = \ln \psi$, мы, при обозначении

$$\Delta_\psi \Delta_\varphi \ln \varphi = \Delta_\psi \Delta_\varphi \ln \psi = (\Delta_\psi \Delta_\varphi),$$

$$\Delta_\varphi \Delta_\psi \ln \varphi = \Delta_\varphi \Delta_\psi \ln \psi = (\Delta_\varphi \Delta_\psi),$$

---

* Успехи математич. наук, 1953, 8, вып. 2 (54), 83—91.

Эта работа была опубликована после смерти Н. Н. Лузина по черновой рукописи с сохранением особенностей формул и текста этой рукописи.

имеем формулу, вытекающую из (0):

$$(\Delta_\psi \Delta_\varphi) - (\Delta_\varphi \Delta_\psi) = x\,(\Delta_\psi - \Delta_\varphi),$$

т. е.

$$(\Delta_\psi \Delta_\varphi) - (\Delta_\varphi \Delta_\psi) = -\frac{1}{2}\,(\Delta_\psi^2 - \Delta_\varphi^2). \qquad (N)$$

Это есть очень важная формула, которая будет часто в ходу.

Формула двойного оператора для произведения:

$$\begin{aligned} \Delta_g \Delta_f\,(z_1 \cdot z_2) &= \Delta_g \Delta_f z_1 \cdot z_2 + \Delta_g z_1 \cdot \Delta_f z_2 + \Delta_g z_2 \cdot \Delta_f z_1 + z_1 \cdot \Delta_g \Delta_f z_2; \\ \Delta_f \Delta_f\,(z_1 \cdot z_2) &= \Delta_f \Delta_f z_1 \cdot z_2 + 2\Delta_f z_1 \cdot \Delta_f z_2 + z_1 \cdot \Delta_f \Delta_f z_2, \end{aligned}$$

или иначе

$$\begin{aligned} \Delta_f \Delta_f\,(z_1 \cdot z_2) &= [(\Delta_f \Delta_f)\,z_1] \cdot z_2 + 2\Delta_f z_1 \cdot \Delta_f z_2 + z_1 \cdot [\Delta_f \Delta_f z_2]; \\ \Delta_f \Delta_f\,(z \cdot z) &= 2z\,[(\Delta_f \Delta_f)\,z] + 2\,(\Delta_f z)^2. \end{aligned}$$

Следствия формулы (0):

$$\begin{aligned} \Delta_\psi \Delta_\varphi \Delta_\varphi z - \Delta_\varphi \Delta_\psi \Delta_\varphi z &= x \cdot [\Delta_\psi \Delta_\varphi z - \Delta_\varphi \Delta_\varphi z], \\ \Delta_\psi \Delta_\varphi \Delta_\psi z - \Delta_\varphi \Delta_\psi \Delta_\psi z &= x \cdot [\Delta_\psi \Delta_\psi z - \Delta_\varphi \Delta_\psi z], \end{aligned}$$

т. е.*

$$(\Delta_\psi \underline{\Delta_\varphi \Delta_\varphi})\,z - (\Delta_\varphi \underline{\Delta_\psi \Delta_\varphi)}\,z = x \cdot [(\Delta_\psi \Delta_\varphi)\,z - (\Delta_\varphi \Delta_\varphi)\,z]; \qquad (1)$$

$$(\Delta_\psi \Delta_{\underline{\varphi}} \Delta_\psi)\,z - (\Delta_\varphi \underline{\Delta_\varphi \Delta_\psi)}\,z = x \cdot [(\Delta_\psi \Delta_\psi)\,z - (\Delta_\varphi \Delta_\psi)\,z]; \qquad (2)$$

и еще имеем:

$$(\Delta_\varphi \Delta_{\underline{\psi}} \Delta_\varphi)\,z - \underline{(\Delta_\varphi \Delta_\varphi} \Delta_\psi)\,z = \Delta_\varphi\,[x \cdot (\Delta_\psi z - \Delta_\varphi z)], \qquad (3)$$

$$(\underline{\Delta_\psi \Delta_\psi} \Delta_\varphi)\,z - (\Delta_\psi \Delta_{\underline{\varphi}} \Delta_\psi)\,z = \Delta_\psi\,[x \cdot (\Delta_\psi z - \Delta_\varphi z)]. \qquad (4)$$

Складывая (2) и (4), имеем:

$$(\underline{\Delta_\psi \Delta_\psi} \Delta_\varphi)\,z - (\Delta_\varphi \underline{\Delta_\psi \Delta_\psi})\,z = x \cdot [(\Delta_\psi \Delta_\psi)\,z - (\Delta_\varphi \Delta_\psi)\,z] + \Delta_\psi \cdot [x \cdot (\Delta_\psi z - \Delta_\varphi z)]. \qquad (5)$$

Далее, складывая (1) и (3) и изменяя знаки, имеем:

$$\begin{aligned} (\underline{\Delta_\varphi \Delta_\varphi} \Delta_\psi)\,z - (\Delta_\psi \underline{\Delta_\varphi \Delta_\varphi)}\,z = x\,[-(\Delta_\psi \Delta_\varphi)\,z + (\Delta_\varphi \Delta_\varphi)\,z] + {} \\ + \Delta_\varphi\,[x \cdot (-\Delta_\psi z + \Delta_\varphi z)]. \qquad (6) \end{aligned}$$

Следствия формулы (5):

$$\begin{aligned} (\Delta_\varphi \Delta_\psi \Delta_\psi \Delta_\varphi)\,z - (\Delta_\varphi \Delta_\varphi \Delta_\psi \Delta_\psi)\,z = \Delta_\varphi\,\{x \cdot [(\Delta_\psi \Delta_\psi)\,z - (\Delta_\varphi \Delta_\psi)\,z]\} + {} \\ + (\Delta_\varphi \Delta_\psi)\,[x\,(\Delta_\psi z - \Delta_\varphi z)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta_\psi \Delta_\psi \Delta_\varphi \Delta_\varphi)\,z - (\Delta_\varphi \Delta_\psi \Delta_\psi \Delta_\varphi)\,z = {} \\ = x \cdot [(\Delta_\psi \Delta_\psi \Delta_\varphi)\,z - (\Delta_\varphi \Delta_\psi \Delta_\varphi)\,z] + \Delta_\psi\,\{x \cdot [(\Delta_\psi \Delta_\varphi)\,z - (\Delta_\varphi \Delta_\varphi)\,z]\}. \end{aligned}$$

Складывая, имеем:

$$\begin{aligned} (\Delta_\psi \Delta_\psi \Delta_\varphi \Delta_\varphi)\,z - (\Delta_\varphi \Delta_\varphi \Delta_\psi \Delta_\psi)\,z = {} \\ = \Delta_\varphi\,\{x \cdot [(\Delta_\psi \Delta_\psi)\,z - (\Delta_\varphi \Delta_\psi)\,z]\} + \Delta_\psi\,\{x \cdot [(\Delta_\psi \Delta_\varphi)\,z - (\Delta_\varphi \Delta_\varphi)\,z]\} + {} \\ + x \cdot [(\Delta_\psi \Delta_\psi \Delta_\varphi)\,z - \Delta_\varphi \Delta_\psi \Delta_\varphi)\,z] + (\Delta_\varphi \Delta_\psi)\,[x \cdot (\Delta_\psi z - \Delta_\varphi z)]. \qquad (7) \end{aligned}$$

---

* Н. Н. Лузин подчеркивает в нижеследующих формулах ряд символов, чтобы привлечь внимание к особенности строения формул, содержащих повторение индексов.

Следствия формулы (6):

$$(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z - (\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z =$$
$$= -\Delta_\psi\{x\cdot[(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z - (\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z]\} - (\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,[x\cdot(\Delta_\psi z - \Delta_\varphi z)];$$
$$(\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z - (\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z =$$
$$= -x\,[(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z - (\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z] - \Delta_\varphi\{x\cdot[(\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z - (\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z]\}.$$

Складывая, имеем:

$$(\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z - (\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z =$$
$$= \Delta_\psi\{x\cdot[(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z - (\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z]\} + \Delta_\varphi\{x\cdot[(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z - (\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z]\} +$$
$$+ x\cdot[(\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z - (\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z] + (\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,[x\cdot(\Delta_\varphi z - \Delta_\psi z)]. \tag{8}$$

Развертываем (7):

$$(\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z - (\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z =$$
$$= x\cdot[2\,(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z + 2\,(\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z - 2\,(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z - (\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z - (\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z] +$$
$$+ \Delta_\varphi x\cdot[2(\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z - (\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z - (\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z] +$$
$$+ \Delta_\psi x\cdot[-2\,(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z + (\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z + (\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z] + \Delta_\varphi\Delta_\psi x\cdot(\Delta_\psi z - \Delta_\varphi z).$$

Развертываем (8):

$$(\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z - (\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z =$$
$$= x\,[2\,(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z + 2\,(\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z - 2\,(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z - (\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z -$$
$$- (\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z] + \Delta_\psi x\cdot[2\,(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z - (\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z - (\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z] +$$
$$+ \Delta_\varphi x\cdot[-2\,(\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z + (\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z + (\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z] + \Delta_\psi\Delta_\varphi x\cdot(\Delta_\varphi z - \Delta_\psi z).$$

Вычитая из (7) равенство (8), имеем:

$$2\,[(\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z - (\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z] =$$
$$= x\,[3\,(\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z - 3\,(\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z + 3\,(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z - 3\,(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z +$$
$$+ 2\,(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z - 2\,(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z] + 4\Delta_\varphi x\cdot(\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z - 4\Delta_\psi x\cdot(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z +$$
$$+ 2\,(\Delta_\psi x - \Delta_\varphi x)\cdot[(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z + (\Delta_\varphi\Delta_\psi)]\,z + (\Delta_\psi\Delta_\varphi x + \Delta_\varphi\Delta_\psi x)\cdot(\Delta_\psi z - \Delta_\varphi z).$$

Из формулы (1) мы выводим:

$$(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z = (\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z + x\cdot[(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z - (\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z]. \tag{1*}$$

Из формулы (2) выводим:

$$(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z = (\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z + x\cdot[(\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z - (\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z]. \tag{2*}$$

Из формулы (5) получаем:

$$(\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z = (\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z + x\cdot[2\,(\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z - (\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z - (\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z] +$$
$$+ \Delta_\psi x\cdot(\Delta_\psi z - \Delta_\varphi z). \tag{5*}$$

Из формулы (6) мы выводим:

$$(\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z = (\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z + x\cdot[2\,(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z - (\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z - (\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z] +$$
$$+ \Delta_\varphi x\cdot[\Delta_\varphi z - \Delta_\psi z]. \tag{6*}$$

Отсюда

$$
\begin{gathered}
(\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi) z - (\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi) z = 4x\cdot[(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi) z - (\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi) z] + \\
+ 2(2x^2 + \Delta_\varphi x)\cdot(\Delta_\psi\Delta_\psi) z - 2(2x^2 + \Delta_\psi x)\cdot(\Delta_\varphi\Delta_\varphi) z + \\
+ (\Delta_\psi x - \Delta_\varphi x)\cdot[(\Delta_\varphi\Delta_\psi) z + (\Delta_\psi\Delta_\varphi) z] + \\
+ \left(x^3 + \frac{3}{2} x\Delta_\varphi x + \frac{3}{2} x\Delta_\psi x + \frac{1}{2}\Delta_\psi\Delta_\varphi x + \frac{1}{2}\Delta_\varphi\Delta_\psi x\right)(\Delta_\psi z - \Delta_\varphi z).
\end{gathered}
$$

Из геометрической схемы (см. статью в «Известиях ОТН», 1939, № 7) следуют *:

основная резольвента:

$$(\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi) z - (\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi) z;$$

первая резольвента:

$$(\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi) z - (\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi) z;$$

вторая резольвента:

$$(\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi) z - (\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi) z;$$

финальная резольвента:

$$(\Delta_\psi\Delta_\varphi) z - (\Delta_\varphi\Delta_\psi) z = x(\Delta_\psi z - \Delta_\varphi z).$$

Основная резольвента. При подстановке вместо буквы z выражения $\ln\varphi$ или $\ln\psi$ в основную резольвенту, при замене буквы x выражением $-\frac{1}{2}(\Delta_\psi + \Delta_\varphi)$ и при учете уравнений изгибания:

$$
\begin{aligned}
(\Delta_\varphi\Delta_\varphi) &= \frac{1}{2}\Delta_\varphi\cdot(\Delta_\varphi - \Delta_\psi) + R_1(\varphi)\cdot\Delta_\varphi + R_2(\varphi)\cdot\Delta_\psi + R_3(\varphi); \\
(\Delta_\psi\Delta_\psi) &= \frac{1}{2}\Delta_\psi\cdot(\Delta_\psi - \Delta_\varphi) + R_1(\psi)\cdot\Delta_\psi + R_2(\psi)\cdot\Delta_\varphi + R_3(\psi),
\end{aligned}
$$

выражающих $(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)$ и $(\Delta_\psi\Delta_\psi)$ через φ, ψ, Δ_φ, Δ_ψ, мы достигаем алгебраического уравнения, содержащего φ, ψ, Δ_φ, Δ_ψ и два прямоугольных оператора $(\Delta_\psi\Delta_\varphi)$ и $(\Delta_\varphi\Delta_\psi)$. Поэтому, приняв во внимание соотношение $(\Delta_\psi\Delta_\varphi) - (\Delta_\varphi\Delta_\psi) = -\frac{1}{2}(\Delta_\psi^2 - \Delta_\varphi^2)$, мы получаем окончательно эти два прямоугольных оператора $(\Delta_\psi\Delta_\varphi)$ и $(\Delta_\varphi\Delta_\psi)$, выраженными через φ, ψ, Δ_φ и Δ_ψ.

Первая и вторая резольвенты при учете как обоих уравнений изгибания, так и найденных при помощи основной резольвенты прямоугольных операторов $(\Delta_\psi\Delta_\varphi)$ и $(\Delta_\varphi\Delta_\psi)$, дают нам два алгебраических уравнения, связывающих только φ, ψ, Δ_φ и Δ_ψ. Отсюда мы, решая эти уравнения относительно Δ_φ, Δ_ψ, получаем их выражения через чистые φ и ψ. И отсюда же, приняв во внимание указанные выражения двух прямоугольных операторов $(\Delta_\psi\Delta_\varphi)$ и $(\Delta_\varphi\Delta_\psi)$, мы достигаем их выражений через чистые φ и ψ.

Финальная резольвента после достигнутых выражений для операторов $\Delta_\varphi, \Delta_\psi$, $(\Delta_\psi\Delta_\varphi)$, $(\Delta_\varphi\Delta_\psi)$ дает нам алгебраическую связь чистых φ и ψ. Так как мы имеем $\varphi + \psi = 0$, то получаем необходимое выражение φ и,

* Обращаем внимание читателя на то, что здесь приводится общий план всего исследования.

значит, ψ через символы Кристоффеля и их производные. Отсюда, под ставляя найденные выражения для φ и ψ в «уравнения изгибания», мы имеем решение «задачи изгибания», ибо получили две алгебраические связи символов Кристоффеля и их частных производных.

Резольвенты.

Основная

$$(\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z-(\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z=4x\cdot[(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z-(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z]+$$
$$+2(2x^2+\Delta_\varphi x)\cdot(\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z-2(2x^2+\Delta_\psi x)\cdot(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z+$$
$$+(\Delta_\psi x-\Delta_\varphi x)\cdot[(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z+(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z]+$$
$$+\left(x^3+\frac{3}{2}x\cdot\Delta_\varphi x+\frac{3}{2}x\cdot\Delta_\psi x+\frac{1}{2}\Delta_\psi\Delta_\varphi x+\frac{1}{2}\Delta_\varphi\Delta_\psi x\right)\cdot(\Delta_\psi z-\Delta_\varphi z).$$

Первая:

$$\Delta_\psi(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z-\Delta_\varphi(\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z=x\cdot[(\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z-(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z]+\Delta_\psi[x\cdot(\Delta_\psi z-\Delta_\varphi z)].$$

Вторая:

$$\Delta_\varphi(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z-\Delta_\psi(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z=x\cdot[(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z-(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z]+\Delta_\varphi[x\cdot(\Delta_\varphi z-\Delta_\psi z)].$$

Финальная:

$$(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z-(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z=x\,(\Delta_\psi z-\Delta_\varphi z).$$

Легкое преобразование первой и второй резольвент; первой:

$$\Delta_\psi(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z-\Delta_\varphi(\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z=x\cdot[2(\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z-(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z-(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z]+$$
$$+\Delta_\psi x\cdot(\Delta_\psi z-\Delta_\varphi z);$$

второй:

$$\Delta_\varphi(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z-\Delta_\psi(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z=x\cdot[2(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z-(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z-(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z]+$$
$$+\Delta_\varphi x\cdot(\Delta_\varphi z-\Delta_\psi z).$$

[Преобразуем основную резольвенту к новому виду, пользуясь финальной резольвентой для замены $x\cdot(\Delta_\psi z-\Delta_\varphi z)$ через $(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z-(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z$ в членах последней строки; получим после приведения подобных членов и группировки результатов:]

$$(\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z-(\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z+4x\cdot[(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z-(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z]+$$
$$+\frac{1}{2}(\Delta_\psi\Delta_\varphi x+\Delta_\varphi\Delta_\psi x)\cdot(\Delta_\psi z-\Delta_\varphi z)+x^2[4(\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z-4(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z+$$
$$+(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z-(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z]+\Delta_\varphi x\cdot\left[2(\Delta_\psi\Delta_\psi)\,z+\frac{1}{2}(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z-\frac{5}{2}(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z\right]+$$
$$+\Delta_\psi x\cdot\left[-2(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,z-\frac{1}{2}(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\,z+\frac{5}{2}(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\,z\right]=0.$$

Следующий шаг состоит в вычислении коэффициентов с буквой x:

$$x=-\frac{1}{2}(\Delta_\varphi+\Delta_\psi);\qquad 4x=-2(\Delta_\varphi+\Delta_\psi);\qquad x^2=\frac{1}{4}(\Delta_\varphi+\Delta_\psi)^2;$$

$$\frac{1}{2}(\Delta_\psi\Delta_\varphi x+\Delta_\varphi\Delta_\psi x)=-\frac{1}{4}[(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)+(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\psi)+$$
$$+(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\varphi)+(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)];$$
$$\Delta_\varphi x=-\frac{1}{2}[(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)+(\Delta_\varphi\Delta_\psi)];\quad \Delta_\psi x=-\frac{1}{2}[(\Delta_\psi\Delta_\varphi)+(\Delta_\psi\Delta_\psi)].$$

Подставляя в уравнение резольвенты, получаем:

$$(\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)-(\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)-2(\Delta_\varphi+\Delta_\psi)\cdot[(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)-(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)]-$$
$$-\frac{1}{4}[(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)+(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\psi)+(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\varphi)+(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)]\cdot(\Delta_\psi-\Delta_\varphi)+$$
$$+\frac{1}{4}(\Delta_\varphi+\Delta_\psi)^2\cdot[4(\Delta_\psi\Delta_\psi)-4(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)+(\Delta_\psi\Delta_\varphi)-(\Delta_\varphi\Delta_\psi)]-$$
$$-\frac{1}{2}[(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)+(\Delta_\varphi\Delta_\psi)]\cdot\left[2(\Delta_\psi\Delta_\psi)+\frac{1}{2}(\Delta_\psi\Delta_\varphi)-\frac{5}{2}(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\right]-$$
$$-\frac{1}{2}[(\Delta_\psi\Delta_\varphi)+(\Delta_\psi\Delta_\psi)]\cdot\left[-2(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)-\frac{1}{2}(\Delta_\varphi\Delta_\psi)+\frac{5}{2}(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\right]=0.$$

Две последние строки резольвенты равны:

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}(\Delta_\varphi\Delta_\psi)(\Delta_\psi\Delta_\psi)-\frac{3}{2}(\Delta_\psi\Delta_\varphi)(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\right]+$$
$$+\frac{5}{2}(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\cdot(\Delta_\psi\Delta_\psi)-\frac{5}{2}(\Delta_\varphi\Delta_\psi)(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)-\frac{5}{2}(\Delta_\varphi\Delta_\psi)^2+\frac{5}{2}(\Delta_\psi\Delta_\varphi)^2.$$

Первая строка резольвенты преобразуется на основании уравнений изгибания [которым даем вид:]

$$\left[\begin{array}{l}\Delta_\varphi\Delta_\varphi=\frac{1}{2}\Delta_\varphi\cdot(\Delta_\varphi-\Delta_\psi)+L(\varphi)\\ \Delta_\psi\Delta_\psi=\frac{1}{2}\Delta_\psi\cdot(\Delta_\psi-\Delta_\varphi)+L(\psi)\end{array}\right]$$

[к такой форме:]

$$(\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)-(\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)=$$
$$=\Delta_\varphi\Delta_\varphi\left[\frac{1}{2}\Delta_\psi^2-\frac{1}{2}\Delta_\varphi\Delta_\psi+L(\psi)\right]-\Delta_\psi\Delta_\psi\left[\frac{1}{2}\Delta_\varphi^2-\frac{1}{2}\Delta_\varphi\Delta_\psi+L(\varphi)\right];$$

[это приводится после преобразований к виду:]

$$\Delta_\varphi\Delta_\varphi L(\psi)-\Delta_\psi\Delta_\psi L(\varphi)+\frac{1}{2}(\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\psi)\cdot\Delta_\varphi-\frac{1}{2}(\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\cdot\Delta_\psi+$$
$$+(\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi)\cdot\left(\Delta_\psi-\frac{1}{2}\Delta_\varphi\right)-(\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi)\cdot\left(\Delta_\varphi-\frac{1}{2}\Delta_\psi\right)+$$
$$+(\Delta_\psi\Delta_\psi)\cdot(\Delta_\psi\Delta_\varphi)-(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\cdot(\Delta_\varphi\Delta_\psi)+(\Delta_\varphi\Delta_\psi)^2-(\Delta_\psi\Delta_\varphi)^2.$$

Подставляем в резольвенту ее «вычисленные» строки и соединяем кое-какие подобные члены. Резольвента

$$\Delta_\varphi\Delta_\varphi L(\psi)-\Delta_\psi\Delta_\psi L(\varphi)+(\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\psi)\cdot\frac{1}{2}\Delta_\varphi-(\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\cdot\frac{1}{2}\Delta_\psi+$$
$$+(\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi)\cdot\left(\Delta_\psi-\frac{1}{2}\Delta_\varphi\right)-(\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi)\cdot\left(\Delta_\varphi-\frac{1}{2}\Delta_\psi\right)+$$

$$+(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\cdot\left(2\Delta_\varphi+2\Delta_\psi+\frac{1}{4}\Delta_\varphi-\frac{1}{4}\Delta_\psi\right)-$$
$$-(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)\cdot\left(2\Delta_\varphi+2\Delta_\psi+\frac{1}{4}\Delta_\psi-\frac{1}{4}\Delta_\varphi\right)+$$
$$+(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\psi)\cdot\left(\frac{1}{4}\Delta_\varphi-\frac{1}{4}\Delta_\psi\right)+$$
$$+(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\varphi)\cdot\left(\frac{1}{4}\Delta_\varphi-\frac{1}{4}\Delta_\psi\right)-\frac{1}{4}(\Delta_\psi\Delta_\psi)\cdot(\Delta_\psi\Delta_\varphi)-\frac{3}{4}(\Delta_\psi\Delta_\psi)\cdot(\Delta_\varphi\Delta_\psi)+$$
$$+\frac{1}{4}(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\cdot(\Delta_\varphi\Delta_\psi)+\frac{3}{4}(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\cdot(\Delta_\psi\Delta_\varphi)+\frac{9}{4}(\Delta_\varphi\Delta_\psi)^2-\frac{9}{4}(\Delta_\psi\Delta_\varphi)^2+$$
$$+(\Delta_\varphi+\Delta_\psi)^2\cdot\left[(\Delta_\psi\Delta_\psi)-(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)+\frac{1}{4}(\Delta_\psi\Delta_\varphi)-\frac{1}{4}(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\right]=0.$$

Подготовка подстановочных формул.

[Применяя уравнения изгибания, имеем:]

$$(\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\psi)=(\Delta_\psi\Delta_\psi)\cdot\left(\Delta_\psi-\frac{1}{2}\Delta_\varphi\right)-(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\cdot\frac{1}{2}\Delta_\psi+\Delta_\psi L(\psi),$$
$$(\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)=(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\cdot\left(\Delta_\varphi-\frac{1}{2}\Delta_\psi\right)-(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\cdot\frac{1}{2}\Delta_\varphi+\Delta_\varphi L(\varphi),$$
$$(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)=(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\cdot\left(\Delta_\psi-\frac{1}{2}\Delta_\varphi\right)-(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\cdot\frac{1}{2}\Delta_\psi+\Delta_\varphi L(\psi),$$
$$(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)=(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\cdot\left(\Delta_\varphi-\frac{1}{2}\Delta_\psi\right)-(\Delta_\psi\Delta_\psi)\cdot\frac{1}{2}\Delta_\varphi+\Delta_\psi L(\varphi).$$

Полуподстановки:

$$(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\psi)=(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)-\frac{1}{2}[(\Delta_\psi\Delta_\psi)-(\Delta_\varphi\Delta_\psi)]\cdot(\Delta_\varphi+\Delta_\psi),$$
$$(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\varphi)=(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)-\frac{1}{2}[(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)-(\Delta_\psi\Delta_\varphi)]\cdot(\Delta_\varphi+\Delta_\psi),$$
$$(\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi)=(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)-\frac{1}{2}[2(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)-(\Delta_\psi\Delta_\varphi)-(\Delta_\varphi\Delta_\psi)]\cdot(\Delta_\varphi+\Delta_\psi)-$$
$$-\frac{1}{2}[(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)+(\Delta_\varphi\Delta_\psi)]\cdot(\Delta_\varphi-\Delta_\psi),$$
$$(\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi)=(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)-\frac{1}{2}[2(\Delta_\psi\Delta_\psi)-(\Delta_\varphi\Delta_\psi)-(\Delta_\psi\Delta_\varphi)]\cdot(\Delta_\varphi+\Delta_\psi)-$$
$$-\frac{1}{2}[(\Delta_\psi\Delta_\varphi)+(\Delta_\psi\Delta_\psi)]\cdot(\Delta_\psi-\Delta_\varphi).$$

Третья и шестая строчки резольвенты на полуподстановках:

$$(\Delta_\varphi\Delta_\varphi\Delta_\psi)\cdot\left(\Delta_\psi-\frac{1}{2}\Delta_\varphi\right)-(\Delta_\psi\Delta_\psi\Delta_\varphi)\cdot\left(\Delta_\varphi-\frac{1}{2}\Delta_\psi\right)+$$
$$+(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\psi)\cdot\left(\frac{1}{4}\Delta_\varphi-\frac{1}{4}\Delta_\psi\right)+(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\varphi)\cdot\left(\frac{1}{4}\Delta_\varphi-\frac{1}{4}\Delta_\psi\right)=$$
$$=(\Delta_\psi\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\cdot\left(\frac{3}{4}\Delta_\psi-\frac{1}{4}\Delta_\varphi\right)-(\Delta_\varphi\Delta_\psi\Delta_\psi)\left(\frac{3}{4}\Delta_\varphi-\frac{1}{4}\Delta_\psi\right)+$$
$$+(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\left(-\frac{3}{8}\Delta_\psi^2+\frac{5}{8}\Delta_\varphi^2-\frac{5}{4}\Delta_\varphi\Delta_\psi\right)+$$
$$+(\Delta_\psi\Delta_\psi)\left(\frac{3}{8}\Delta_\varphi^2-\frac{5}{8}\Delta_\psi^2+\frac{5}{4}\Delta_\varphi\Delta_\psi\right)+$$
$$+(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\left(\frac{3}{4}\Delta_\varphi\Delta_\psi-\frac{9}{8}\Delta_\varphi^2+\frac{3}{8}\Delta_\psi^2\right)+$$
$$+(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\left(\frac{9}{8}\Delta_\psi^2-\frac{3}{8}\Delta_\varphi^2-\frac{3}{4}\Delta_\varphi\Delta_\psi\right).$$

[Пользуясь этой формулой и подстановочными, можно преобразовать резольвенту к такому виду:]

$$\Delta_\varphi\Delta_\varphi L(\psi)-\Delta_\psi\Delta_\psi L(\varphi)+\frac{1}{2}\;\Delta_\varphi\Delta_\psi L(\psi)-\frac{1}{2}\Delta_\psi\Delta_\varphi L(\varphi)-$$
$$-\left(\frac{5}{2}\Delta_\varphi+2\Delta_\psi\right)\cdot\Delta_\varphi L(\psi)+\left(\frac{5}{2}\;\Delta_\psi+2\Delta_\varphi\right)\cdot\Delta_\psi L(\varphi)+$$
$$+(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\cdot\left(-\frac{3}{8}\;\Delta_\varphi^2-\frac{1}{8}\;\Delta_\psi^2-\frac{5}{2}\;\Delta_\varphi\Delta_\psi\right)+$$
$$+(\Delta_\psi\Delta_\psi)\cdot\left(\frac{3}{8}\;\Delta_\psi^2+\frac{1}{8}\;\Delta_\varphi^2+\frac{5}{2}\;\Delta_\varphi\Delta_\psi\right)+$$
$$+(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\cdot\left(\frac{9}{8}\;\Delta_\varphi^2-\frac{5}{8}\;\Delta_\psi^2+\frac{5}{2}\;\Delta_\varphi\Delta_\psi\right)+$$
$$+(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\cdot\left(-\frac{9}{8}\;\Delta_\psi^2+\frac{5}{8}\;\Delta_\varphi^2-\frac{5}{2}\;\Delta_\varphi\Delta_\psi\right)-$$
$$-\frac{1}{4}(\Delta_\psi\Delta_\psi)\,[(\Delta_\psi\Delta_\varphi)+3\,(\Delta_\varphi\Delta_\psi)]+$$
$$+\frac{1}{4}(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)\,[(\Delta_\varphi\Delta_\psi)+3\,(\Delta_\psi\Delta_\varphi)]+\frac{9}{4}\;(\Delta_\varphi\Delta_\psi)^2-\frac{9}{4}(\Delta_\psi\Delta_\varphi)^2=0.$$

[Заменяя здесь $(\Delta_\varphi\Delta_\varphi)$ и $(\Delta_\psi\Delta_\psi)$ их значениями из уравнения изгибания, получаем резольвенту в таком виде:]

$$\Delta_\varphi\Delta_\varphi L(\psi)-\Delta_\psi\Delta_\psi L(\varphi)+\frac{1}{2}\;\Delta_\varphi\Delta_\psi L(\psi)-\frac{1}{2}\Delta_\psi\Delta_\varphi L(\varphi)-$$
$$-\left(\frac{5}{2}\;\Delta_\varphi+2\Delta_\psi\right)\cdot\Delta_\varphi L(\psi)+\left(\frac{5}{2}\;\Delta_\psi+2\Delta_\varphi\right)\cdot\Delta_\psi L(\varphi)+$$
$$+\left[\frac{3}{8}\;\Delta_\psi^2+\frac{1}{8}\;\Delta_\varphi^2+\frac{5}{2}\;\Delta_\varphi\Delta_\psi-\frac{1}{4}\;(\Delta_\psi\Delta_\varphi)-\frac{3}{4}\;(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\right]L(\psi)+$$
$$+\left[-\frac{3}{8}\;\Delta_\varphi^2-\frac{1}{8}\;\Delta_\psi^2-\frac{5}{2}\;\Delta_\varphi\Delta_\psi+\frac{1}{4}\;(\Delta_\varphi\Delta_\psi)+\frac{3}{4}\;(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\right]L(\varphi)=0,$$

ибо

$$+\left[-\frac{3}{8}\;\Delta_\varphi^2-\frac{1}{8}\;\Delta_\psi^2-\frac{5}{2}\;\Delta_\varphi\Delta_\psi+\frac{1}{4}\;(\Delta_\varphi\Delta_\psi)+\frac{3}{4}\;(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\right]\times$$
$$\times\left(\frac{1}{2}\;\Delta_\varphi^2-\frac{1}{2}\;\Delta_\varphi\Delta_\psi\right)+$$
$$+\left[\frac{3}{8}\;\Delta_\psi^2+\frac{1}{8}\;\Delta_\varphi^2+\frac{5}{2}\;\Delta_\varphi\Delta_\psi-\frac{1}{4}\;(\Delta_\psi\Delta_\varphi)-\frac{3}{4}\;(\Delta_\varphi\Delta_\psi)\right]\times$$
$$\times\left(\frac{1}{2}\;\Delta_\psi^2-\frac{1}{2}\;\Delta_\varphi\Delta_\psi\right)+\left(\frac{9}{8}\;\Delta_\varphi^2-\frac{5}{8}\;\Delta_\psi^2+\frac{5}{2}\;\Delta_\varphi\Delta_\psi\right)\cdot(\Delta_\psi\Delta_\varphi)+$$
$$+\left(-\frac{9}{8}\;\Delta_\psi^2+\frac{5}{8}\;\Delta_\varphi^2-\frac{5}{2}\;\Delta_\varphi\Delta_\psi\right)\cdot(\Delta_\varphi\Delta_\psi)+\frac{9}{4}\;(\Delta_\varphi\Delta_\psi)^2-\frac{9}{4}\;(\Delta_\psi\Delta_\varphi)^2=0.$$

[Пять последних строк этой формулы, как здесь и указано, обращаются в нуль; в этом можно убедиться, выполняя перемножения, приведения подобных членов и пользуясь, наконец, соотношением (N):

$$(\Delta_\psi\Delta_\varphi)-(\Delta_\varphi\Delta_\psi)=-\frac{1}{2}\,(\Delta_\psi^2-\Delta_\varphi^2)\cdot\Big]$$

[Пользуясь этой же формулой, можно преобразовать коэффициент при $L(\psi)$

$$\frac{3}{8}\Delta_\psi^2+\frac{1}{8}\Delta_\varphi^2+\frac{5}{2}\Delta_\varphi\Delta_\psi-\frac{1}{4}(\Delta_\psi\Delta_\varphi)-\frac{3}{4}(\Delta_\varphi\Delta_\psi)$$

к такому виду:

$$\frac{1}{2}\Delta_\psi^2+\frac{5}{2}\Delta_\varphi\Delta_\psi-(\Delta_\varphi\Delta_\psi),$$

а коэффициент при $L(\varphi)$

$$-\frac{3}{8}\Delta_\varphi^2-\frac{1}{8}\Delta_\psi^2-\frac{5}{2}\Delta_\varphi\Delta_\psi+\frac{1}{4}(\Delta_\varphi\Delta_\psi)+\frac{3}{4}(\Delta_\psi\Delta_\varphi)$$

к такому виду:

$$-\left[\frac{1}{2}\Delta_\varphi^2+\frac{5}{2}\Delta_\varphi\Delta_\psi-(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\right]\cdot\ ]$$

[После всех этих преобразований основная резольвента запишется так:]

$$2\Delta_\varphi\Delta_\varphi L(\psi)-2\Delta_\psi\Delta_\varphi L(\varphi)+\Delta_\varphi\cdot\Delta_\psi L(\psi)-\Delta_\psi\cdot\Delta_\varphi L(\varphi)-$$
$$-(5\Delta_\varphi+4\Delta_\psi)\cdot\Delta_\varphi L(\psi)+5(\Delta_\psi+4\Delta_\varphi)\cdot\Delta_\psi L(\varphi)+$$
$$+[\Delta_\psi^2+5\Delta_\varphi\cdot\Delta_\psi-2(\Delta_\varphi\Delta_\psi)]\cdot L(\psi)-[\Delta_\varphi^2+5\,\Delta_\varphi\cdot\Delta_\psi-2(\Delta_\psi\Delta_\varphi)]\cdot L(\varphi)=0.$$

Первая резольвента:

$$\Delta_\psi\ (\Delta_\psi\Delta_\varphi)z-\Delta_\varphi(\Delta_\psi\Delta_\psi)z=x\cdot[(\Delta_\psi\Delta_\psi)\ z-(\Delta_\varphi\Delta_\psi)z]+\Delta_\psi[x\cdot(\Delta_\psi z-\Delta_\varphi z)].$$

(Положим здесь $z=\ln\varphi$; получим:)

$$\Delta_\psi(\Delta_\psi\Delta_\varphi)=\Delta_\varphi(\Delta_\psi\Delta_\psi)+x\cdot[2(\Delta_\psi\Delta_\psi)-(\Delta_\varphi\Delta_\psi)-(\Delta_\psi\Delta_\varphi)]+\Delta_\psi x\cdot(\Delta_\psi-\Delta_\varphi).$$

Так как

$$x=-\frac{1}{2}(\Delta_\varphi+\Delta_\psi);\ \ \Delta_\psi x=-\frac{1}{2}[(\Delta_\psi\Delta_\psi)+(\Delta_\psi\Delta_\varphi)],$$
$$(\Delta_\psi\Delta_\varphi)-(\Delta_\varphi\Delta_\psi)=-\frac{1}{2}(\Delta_\psi^2-\Delta_\varphi^2),$$

то

$$\Delta_\psi(\Delta_\psi\Delta_\varphi)=\Delta_\varphi(\Delta_\psi\Delta_\psi)-\frac{1}{2}(\Delta_\psi\Delta_\psi)\cdot(\Delta_\varphi+3\Delta_\psi)+$$
$$+\frac{1}{2}(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\cdot(3\Delta_\varphi+\Delta_\psi)+\frac{1}{4}(\Delta_\varphi+\Delta_\psi)\cdot(\Delta_\psi^2-\Delta_\varphi^2).$$

[Применяя к правой части уравнения изгибания, получаем первую резольвенту представленной так:]

$$\Delta_\psi(\Delta_\psi\Delta_\varphi)=(\Delta_\psi\Delta_\varphi)\cdot\left(\Delta_\varphi+\frac{3}{2}\Delta_\psi\right)+\frac{3}{4}\Delta_\varphi\Delta_\psi(\Delta_\psi-\Delta_\varphi)-$$
$$-\frac{1}{2}\Delta_\psi\cdot L(\varphi)-\frac{1}{2}(\Delta_\varphi+3\Delta_\psi)\cdot L(\psi)+\Delta_\varphi L(\psi).$$

[С помощью таких же преобразований можно привести вторую резольвенту к виду:]

$$\Delta_\varphi(\Delta_\varphi\Delta_\psi) = (\Delta_\varphi\Delta_\psi)\cdot\left(\Delta_\varphi + \frac{3}{2}\Delta_\psi\right) - \frac{3}{4}\Delta_\varphi\Delta_\psi(\Delta_\psi - \Delta_\varphi) -$$
$$- \frac{1}{2}\Delta_\varphi\cdot L(\psi) - \frac{1}{2}(3\Delta_\varphi + \Delta_\psi)\cdot L(\varphi) + \Delta_\psi L(\varphi).$$

Финальная резольвента:

$$(\Delta_\psi\Delta_\varphi) - (\Delta_\varphi\Delta_\psi) = -\frac{1}{2}(\Delta_\psi^2 - \Delta_\varphi^2).$$

Примечание редакции.

На этом и заканчивается полностью разработанная часть исследования Н. Н. Лузина. Дальнейшие одиннадцать страниц рукописи содержат поиски наиболее удобных путей вычисления полученных резольвент. Найденные резольвенты содержат в своем составе операторы $L(\varphi)$ и $L(\psi)$:

$$L(\varphi) = R_1(\varphi)\,\Delta_\varphi + R_2(\varphi)\,\Delta_\psi + R_3(\varphi),$$
$$L(\psi) = R_1(\psi)\,\Delta_\psi + R_2(\psi)\,\Delta_\varphi + R_3(\psi),$$

и задача заключалась в представлении, в возможно простом и законченном виде, результата подстановки этих операторов в резольвенты.

К сожалению, сделать это Н. Н. Лузину не довелось — его работа была прервана внезапной смертью.

II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

О КАЧЕСТВЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПОЕЗДА *

1. Речь идет о дифференциальном уравнении

$$v\,\frac{dv}{ds}=\xi\left[f(v)-w(v)-1000\,\frac{dy}{ds}\right], \tag{1}$$

выражающем зависимость скорости поезда v от пройденного им пути s по данному криволинейному профилю. В этом уравнении разность $f(v)-w(v)$ есть сила, фактически движущая поезд; она зависит только от скорости v. Производная $\frac{dy}{ds}$ есть синус угла наклона касательной профиля к горизонту; если профиль есть периодическая кривая, то член $1000\,\frac{dy}{ds}$ есть, очевидно, тоже периодическая функция с тем же самым периодом. Что же касается до ξ, то это есть одно из трех натуральных чисел 124, 125, 126.

Принятые единицы измерения суть: километр, час, тонна.

Вид уравнения

2. Когда профиль дан, тогда и член $-1000\,\frac{dy}{ds}$ необходимо рассматривать как данный. В целях дальнейшего мы полагаем:

$$-2\xi\cdot 1000\,\frac{dy}{ds}=\Phi(s),$$

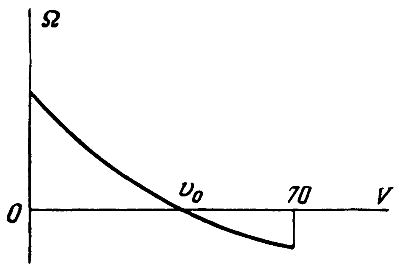
где функцию $\Phi(s)$ следует поэтому рассматривать как данную; когда профиль идет на подъем, функция $\Phi(s)$ отрицательна.

Самым важным членом в уравнении движения поезда является разность $f(v)-w(v)$. По существу дела, это есть эмпирическая функция от скорости v, наблюдаемая для рассматриваемого случая в интервале скоростей от 0 до 70 единиц. Как эмпирическая функция эта разность способна быть изображаемой какими угодно аналитическими выражениями; выбор последних диктуется лишь двумя соображениями: во-первых, нужно, чтобы это аналитическое выражение было возможно более простым, следовательно возможно более гибким, податливым для текущих вычислений; во-вторых, нужно, чтобы оно было достаточно точным, т. е. не

* «Математич. сборник», 1932, 39, вып. 3, 6—26.

отклоняющимся от эмпирической функции более, чем на 1 или 2% ее величины. Во всех других отношениях выбор аналитического выражения для изображения эмпирической функции $f(v) - w(v)$ безразличен, поэтому именно и было предложено много формул [1] для изображения этой функции $f(v) - w(v)$.

Но каково бы ни было разнообразие формул, предложенных для изображения $f(v) - w(v)$, все они без исключения сходятся на том, что вычерчиваемая при помощи их кривая, близкая к эмпирической, есть непрерывная кривая с убывающими ординатами, пересекающая ось OV в точке $v_0 = 52{,}87615$ и обращенная выпуклостью вниз (фиг. 1).



Фиг. 1

Соответственно с этим, всякая формула $\Omega(v)$, из предложенных до сих пор для изображения эмпирической функции $f(v) - w(v)$, имеет три следующих свойства:

I. Функция $\Omega(v)$ есть непрерывная функция, определенная на интервале $[0 \leqslant v \leqslant 70]$, уничтожающаяся один только раз на этом интервале в точке $v_0 = 52{,}87615$.

II. Функция $\Omega(v)$ имеет первую производную $\Omega'(v)$, отрицательную на всем интервале $[0 \leqslant v \leqslant 70]$, меньшую, чем некоторая отрицательная константа $-h$, т. е.

$$\Omega'(v) < -h,$$

где $h > 0$.

III. Функция $\Omega(v)$ имеет вторую производную $\Omega''(v)$, положительную на всем интервале $[0 \leqslant v \leqslant 70]$, бóльшую, чем некоторая положительная константа $+g$, т. е.

$$\Omega''(v) > +g,$$

где $g > 0$.

3. Имея в виду произвести лишь качественное исследование дифференциального уравнения движения поезда, т. е. не решать уравнение в числах, а только рассмотреть течение его интегралов, их устойчивость, мы всюду в дальнейшем не будем прикрепляться ни к какому определенному аналитическому изображению для эмпирической функции $f(v) - w(v)$, так как это нисколько не облегчило бы нас, но, наоборот, сильно связало бы. Поэтому всюду в дальнейшем мы будем писать диффе-

[1] Отметим мимоходом, что ни одна из этих формул и никакая другая формула не могут сделать дифференциальное уравнение (1) интегрируемым до конца, потому что единственный случай, при современных знаниях, когда уравнение (1) можно было бы проинтегрировать до конца при произвольной функции $\Phi(s)$ — это лишь тот, когда разность $f(v) - w(v)$ изображается линейным образом, т. е. при помощи функции первой степени $a + bv$; но такое ее изображение в данном случае невозможно, потому что, как бы ни выбирали постоянные коэффициенты a и b, выражение $a + bv$ значительно отклоняется от эмпирической функции $f(v) - w(v)$.

ренциальное уравнение (1) в виде:

$$\frac{vdv}{ds} = \xi\left[\Omega(v) - 1000\,\frac{dy}{ds}\right], \tag{1*}$$

где функции $\Omega(v)$ мы аксиоматически предписываем обладание всеми вышеуказанными тремя свойствами I, II и III.

Ясно, что вследствие отказа от всякого частного аналитического изображения движущей силы $f(v) - w(v)$ все нижеследующие рассуждения будут всегда справедливы для уравнения движения поезда, какой бы формулой мы ни изображали эмпирическую функцию $f(v) - w(v)$.

4. Преобразуем слегка уравнение (1*) для большего удобства.

Вспоминая обозначение

$$-2\xi\cdot 1000\cdot\frac{dy}{ds} = \Phi(s),$$

мы можем написать:

$$\frac{vdv}{ds} = \xi\Omega(v) + \frac{1}{2}\Phi(s)$$

или

$$\frac{dv^2}{ds} = 2\xi\Omega(v) + \Phi(s),$$

и, наконец, вводя новую неизвестную функцию u вместо прежней скорости v:

$$v^2 = u,$$

получаем:

$$\frac{du}{ds} = 2\xi\Omega(\sqrt{u}) + \Phi(s). \tag{1**}$$

Член этого уравнения $2\xi\Omega(\sqrt{u})$ зависит очевидно, только от переменного u. Естественно поэтому ввести, ради простоты, новое обозначение:

$$2\xi\Omega(\sqrt{u}) = \Psi(u),$$

после которого уравнение движения поезда напишется окончательно в виде:

$$\frac{du}{ds} = \Psi(u) + \Phi(s). \tag{2}$$

Именно в этом виде мы и будем рассматривать в дальнейшем уравнение движения поезда.

5. Весьма важно обратить внимание на свойства функции $\Psi(u)$. Принимая во внимание равенство $v^2 = u$, мы видим, что свойство I функции $\Omega(v)$ переходит в такое свойство функции $\Psi(u)$:

I. Функция $\Psi(u)$ есть непрерывная функция, определенная на интервале $[0 \leqslant u \leqslant 4900]$ и уничтожающаяся один только раз на этом интервале в точке $u_0 = 2795,\ 8872388225\ [= v_0^2]$ (фиг. 2).

Так как функция $\Omega(v)$ убывает с возрастанием v и так как возрастание переменного u влечет за собою возрастание v, то свойство II функции $\Omega(v)$ переходит, очевидно, в такое же точно свойство функции $\Psi(u)$.

II. Функция $\Psi(u)$ имеет первую производную $\Psi'(u)$, отрицательную на всем интервале $[0 \leqslant u \leqslant 4900]$ и меньшую, чем некоторая отрицательная константа $-H$, т. е.

$$\Psi'(u) < -H,$$

где $H > 0$. Наконец, вычисляя вторую производную от $\Psi(u)$, имеем:

$$\Psi(u) = 2\xi\Omega(\sqrt{u}),\quad \Psi'(u) = 2\xi\Omega'(\sqrt{u})\,\frac{1}{2\sqrt{u}},$$

$$\Psi''(u) = 2\xi\Omega''(\sqrt{u})\,\frac{1}{4u} - 2\xi\Omega'(\sqrt{u})\,\frac{1}{4u\sqrt{u}}.$$

Так как $\Omega''(u) > 0$, то первый член положителен; далее, так как, согласно свойству II, $\Omega' < 0$, то второй член

$$-2\xi\Omega'(\sqrt{u})\,\frac{1}{4u\sqrt{u}}$$

опять положителен; поэтому $\Psi'' > 0$. Отсюда мы видим, что и свойство III функции $\Omega(v)$ тоже сохраняется для функции $\Psi(u)$.

III. Функция $\Psi(u)$ имеет вторую производную $\Psi''(u)$, положительную на всем интервале $[0 \leqslant u \leqslant 4900]$ и бóльшую, чем некоторая положительная константа $+G$, т. е.

$$\Psi''(u) > G,$$

где $G > 0$.

Отсюда ясно, что функция $\Psi(u)$ изображает кривую KK', аналогичную кривой на фиг. 1, т. е. непрерывную кривую линию, обращенную выпуклостью вниз и один только раз пересекающую V-ось в точке $u_0 = 2795{,}8872388225$.

Правая часть уравнения

6. Итак, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{ds} = \Psi(u) + \Phi(s), \tag{2}$$

где $\Psi(u)$ есть функция, обладающая всеми тремя указанными свойствами I, II, III.

Как видно, правая часть этого уравнения $\Psi(u) + \Phi(s)$ есть функция двух переменных u и s; чтобы яснее судить об изменении ее величины, когда переменные s и u изменяют свои значения, прибегнем к следующему геометрическому изображению.

Возьмем в пространстве трех измерений три взаимно перпендикулярные оси координат OS, OU и OZ и построим поверхность, уравнение которой есть:

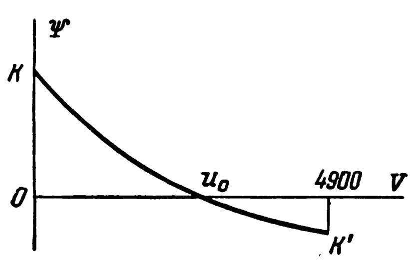
$$z = \Psi(u) + \Phi(s).$$

Аппликаты z этой поверхности и будут, очевидно, значениями правой части дифференциального уравнения, соответствующими значениям переменных s и u.

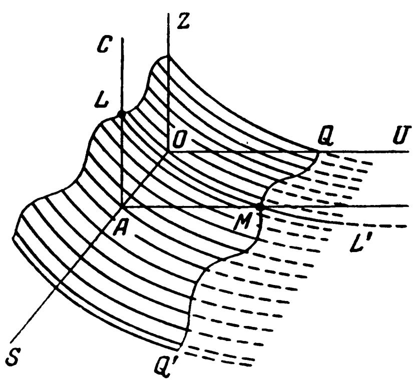
Легко составить представление о характере и форме рассматриваемой поверхности. Действительно, возьмем на S-оси какую-либо неподвижную точку A и, проведя через нее плоскость BAC, перпендикулярную к этой оси, рассмотрим линию пересечения LL' нашей поверхности с этой плоскостью. Если эту линию пересечения отнести к прямым AB и AC как к осям координат[1], то аппликаты z поверхности будут, очевидно, ординатами кривой LL'. Поэтому, если отрезок $OA = s_0$, то уравнением линии сечения будет:

$$Z = \Psi(u) + \Phi(s_0).$$

Это уравнение обнаруживает, что ординаты кривой LL' и ординаты кривой KK' фиг. 2 отличаются друг от друга лишь на постоянную величину. Вследствие этого обе эти кривые тождественны, так как, чтобы получить кривую LL', достаточно для этого просто поднять вверх кривую KK' фиг. 2 на величину $\Phi(s_0)$, если $\Phi(s_0) > 0$, или опустить вниз на величину $\Phi(s_0)$, если $\Phi(s_0) < 0$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Поэтому все сечения рассматриваемой поверхности плоскостями, параллельными плоскости UOZ, являются тождественными с кривой KK' фиг. 2. Значит, поверхность $z = \Psi(u) + \Phi(s)$ образована поступательным движением кривой KK' фиг. 2 как твердой системы.

7. Ясно, что во время этого движения переноса кривой LL' ее точка пересечения M с координатной плоскостью SOU непрерывно скользит по этой плоскости, то удаляясь от S-оси, то приближаясь к ней, и вычерчивает таким образом на этой плоскости кривую QQ' (фиг. 3).

Если профиль периодичен, то функция $\Phi(s)$ будет периодической; ясно, что тогда и кривая QQ' должна быть тоже периодической.

Если движение поезда совершается на площадке или по прямолинейному подъему или спуску, то кривая QQ' есть просто прямая линия, параллельная S-оси, так как в этом случае функция $\Phi(s)$ есть константа.

[1] Мы предполагаем, конечно, что прямые AB и AC суть пересечения плоскости BAC с координатными плоскостями, так что AB параллельна U-оси, AC параллельна Z-оси.

Ясно, что аппликаты z поверхности на самой кривой QQ' равны нулю, что ниже ее они положительны и выше ее отрицательны.

Легко, наконец, видеть, что кривая QQ' никогда не пересечет S-оси, но всегда будет расположена выше ее. В самом деле, железнодорожный профиль, имеющийся в действительности, представляет собой, по крайней мере в равнинных дорогах, ряд подъемов и спусков с наклоном касательной не выше $\pm 30'$. А при этих условиях функция $\Phi(s)$ достаточно мала и не может сообщить отрицательного знака[1] сумме $\Psi(u) + \Phi(s)$.

Полученная кривая QQ' и послужит нам в дальнейшем ценным инструментом для изыскания хода интегральных кривых и их устойчивости.

Периодический профиль

8. Мы изучим сначала случай периодического профиля, как наиболее простой; мы увидим далее, что случай апериодического профиля не представляет ничего нового, качественно оказываясь подобным периодическому. Итак, пусть $\Phi(s)$ есть непрерывная периодическая функция с периодом T:

$$\Phi(s+T) = \Phi(s).$$

Мы уже видели, что в этом случае кривая QQ' есть периодическая с тем же самым периодом T, расположенная выше S-оси.

Правая часть дифференциального уравнения (2)

$$\frac{du}{ds} = \Psi(u) + \Phi(s) \tag{2}$$

положительна ниже кривой QQ' и отрицательна выше ее.

Проведем теперь две прямые, параллельные S-оси: одну, BB' — через точки кривой QQ' с наибольшей ординатой; другую, AA' — через точки этой кривой с наименьшей ординатой. Ясно, что вся кривая QQ' будет течь между этими двумя прямыми, прикасаясь к BB' снизу и к AA' сверху.

Назовем часть плоскости, заключенную между этими обеими прямыми BB' и AA', полосою устойчивости.

9. Значение полосы устойчивости указывается следующими предложениями:

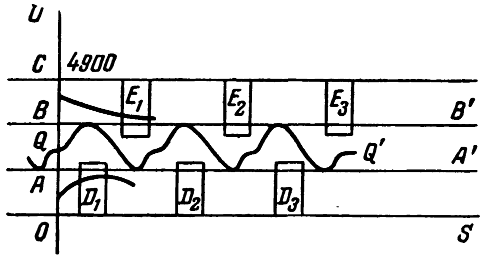
Теорема 1. *Всякое решение дифференциального уравнения (2) непременно попадает в полосу устойчивости.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим какое-нибудь решение $u(s)$ дифференциального уравнения (2), определенное тем начальным условием, чтобы оно проходило через точку $[s=0,\ u=\gamma]$, т. е., чтобы $u(0)=\gamma$. Ясно при этом, что число γ должно находиться в интервале $[0 \leqslant \gamma \leqslant 4900]$, так как только тогда дифференциальное уравнение (2) имеет смысл.

---

[1] Даже на подъеме в десять тысячных ($i = 10$) скорость «установившегося движения» равна 15,01383. Отсюда наименьшая величина ординаты кривой QQ' будет не меньше $(15{,}01383)^2 > 225$.

Отбрасывая тот случай, когда начальная точка $[s=0,\ u=\gamma]$ находится в полосе устойчивости, как уже осуществившийся, мы вынуждены рассмотреть лишь два случая: во-первых, когда точка $[s \neq 0,\ u=\gamma]$ находится ниже полосы устойчивости, т. е. на интервале OA (фиг. 4), и, во-вторых, когда точка $[s=0,\ u=\gamma]$ лежит выше полосы устойчивости, т. е. на интервале BC.



Фиг. 4

Достаточно рассмотреть лишь первый случай.

Построим бесконечный ряд прямоугольных четырехугольников D_1, D_2, $D_3, \ldots$ одинакового размера, расположенных на расстоянии периода T один от другого и таких, чтобы каждый из них, покоясь на S-оси и находясь ниже кривой QQ', входил бы, хотя немного, в полосу устойчивости верхним основанием.

В силу того, что четырехугольник D_1 расположен ниже кривой QQ', правая часть дифференциального уравнения (2), т. е. функция $\Psi(u) + \Phi(s)$, внутри него положительна и превышает некоторую положительную константу $\delta\ (\delta > 0)$:

$$\Psi(u) + \Phi(s) > \delta.$$

В силу же периодичности этой правой части и в силу того, что каждый из четырехугольников D_1, D_2, $D_3, \ldots$ расположен на расстоянии T единиц от соседних (T-период), то ясно, что в каждом из них правая часть дифференциального уравнения (2) тоже больше δ.

Теперь, если решение $u(s)$ не войдет никогда в полосу устойчивости, оно должно непременно пересечь все эти четырехугольники D_1, D_2, $D_3, \ldots$, которых бесконечно много. Но, обозначив длину основания четырехугольника D_1 через q и расстояние его от начала координат O через s_1, мы в силу неравенства

$$\frac{du}{ds} = \Psi(u) + \Phi(s) > \delta$$

будем иметь:

$$\int_{s_1}^{s_1+q} \frac{du(s)}{ds}\, ds > \int_{s_1}^{s_1+q} \delta\, ds = q\delta$$

или

$$u(s_1+q) - u(s_1) > q\delta,$$

что обнаруживает, что решение $u(s)$, пройдя сквозь первый четырехугольник D_1, получает конечный положительный прирост $q\delta$.

Но так как, в силу периодичности, все, что делается в первом четырехугольнике D_1, должно делаться и в четырехугольнике $D_2, D_3, \ldots$, то ясно, что решение $u(s)$, пройдя сквозь бесконечно много четырехугольников D_1, D_2, $D_3, \ldots$, получит бесконечно большой положительный прирост

$$q\delta + q\delta + q\delta + \ldots$$

и, значит, должно стремиться к $+\infty$, когда s стремится к $+\infty$, чего быть не может, так как решение $u(s)$, по условию, не должно входить в полосу устойчивости, т. е. должно всегда оставаться меньше расстояния полосы устойчивости до S-оси.

Такое же точно рассуждение делается и для того случая, когда начальная точка $[s=0,\ u=\gamma]$ находится выше полосы устойчивости, т. е. на отрезке BC. Только тогда приходится рассматривать четырехугольники E_1, E_2, $E_3, \ldots$, верхним основанием находящиеся на граничной прямой, т. е. на прямой, параллельной S-оси и отстоящей от нее на 4900 единиц, а нижним своим основанием вдающиеся в полосу устойчивости, но так, чтобы все они были все-таки выше кривой QQ'. Остальное рассуждение остается без перемен.

Теорема 2. *Если решение дифференциального уравнения (2) попадает в полосу устойчивости, оно уже не может никогда выйти из нее.*

Доказательство. Допустим, в самом деле, что решение $u(s)$ для $s = s_0$ попало в полосу устойчивости. Докажем, что тогда и для всякого $s > s_0$ решение $u(s)$ непременно тоже будет находиться в полосе устойчивости.

Действительно, допустим обратное, т. е. что решение $u(s)$ в дальнейшем своем течении вышло из полосы устойчивости. Этот выход может осуществиться, во-первых, через нижнюю границу полосы устойчивости, т. е. через прямую AA'; во-вторых, через ее верхнюю границу, т. е. через прямую BB'.

Достаточно рассмотреть только первый случай.

Итак, пусть решение $u(s)$ вышло из полосы устойчивости через нижнюю прямую AA'. В этом случае на решении $u(s)$ имеется точка прямой AA', после которой решение течет уже ниже прямой AA'; обозначим такую точку через K (фиг. 5).

Пусть дуга KM есть дуга решения, лежащая вся ниже прямой AA' и лишь своим верхним концом, точкой K, прикрепленная к прямой AA'.

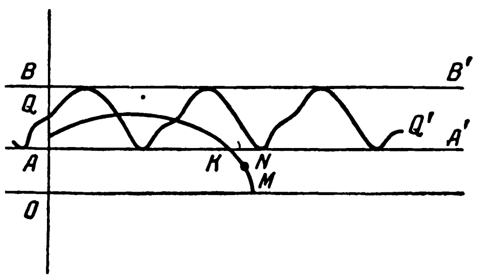
В силу теоремы Лагранжа о конечном приращении на дуге KM непременно имеется такая точка N, в которой касательная параллельна хорде KM, соединяющей точки K и M. Этого же быть не может: действительно, раз решение идет вниз, эта хорда имеет угловой коэффициент отрицательным, следовательно и касательная к решению $u(s)$ в точке N тоже имеет угловой коэффициент отрицательным, т. е. имеем:

$$\frac{du}{ds} < 0$$

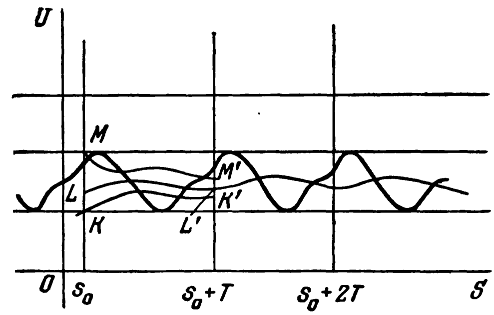
в точке N; этого же быть не может, потому что точка N находится ниже кривой QQ', т. е. правая часть дифференциального уравнения (2) должна быть положительной:

$$\frac{du}{ds} = \Psi(u) + \Phi(s) > 0.$$

Такое же рассуждение делается и в случае выхода решения $u(s)$ из полосы устойчивости через верхнюю прямую BB' (ч. т. д.)



Фиг. 5



Фиг. 6

Теорема 3. *Дифференциальное уравнение (2) непременно имеет периодический интеграл с периодом T.*

Доказательство. Действительно, возьмем на S-оси какую-нибудь точку $s = s_0$ и восставим в ней перпендикуляр к этой оси (фиг. 6). Пусть он пересечет границы полосы устойчивости в точках K и M. Сделав это, проведем через эти две точки K и M два решения $u_1(s)$ и $u_2(s)$ дифференциального уравнения (2). В силу предшествующей теоремы эти решения, начинаясь у границы полосы устойчивости, непременно далее будут течь внутри полосы устойчивости, нигде не выходя из нее.

Возьмем теперь точку $s_0 + T$ на S-оси и восставим перпендикуляр в ней к этой оси. Так как решения $u_1(s)$ и $u_2(s)$ протекают внутри полосы устойчивости, то они пересекут этот перпендикуляр, соответственно, в точках K' и M', находящихся в полосе устойчивости. При этом ясно, что точка K' должна быть непременно ниже точки M', так как в противном случае оба решения $u_1(s)$ и $u_2(s)$ непременно пересекались бы между собою; а тогда внутри полосы устойчивости имелась бы такая точка, через которую проходили бы два различных решения дифференциального уравнения (2), что невозможно, так как это уравнение есть 1-го порядка.

Установив это, возьмем на отрезке KM подвижную точку L и проведем через нее решение $u(s)$. Ясно, что оно пересечет отрезок $K'M'$ в точке L', которая лежит строго между точками K' и M', так как в противном случае решение $u(s)$ непременно пересеклось бы с одним из решений $u_1(s)$ или $u_2(s)$, что невозможно.

Будем теперь двигать точку L вверх, начиная от точки K до M. Ясно, что одновременно с движением точки L будет двигаться и точка L' по отрезку $K'M'$ и двигаться притом непременно вверх, иначе, если бы она двинулась, хотя бы в одном месте, вниз, мы опять получили бы два пересекающиеся решения уравнения (2), чего быть не может. Ясно, кроме того, что точка L' должна двигаться непрерывно по отрезку $K'M'$ от K' до M', так как начальное данное для решения $u(s)$, т. е. положение начальной точки L, меняется непрерывно [1].

Ввиду того, что точка K лежит, очевидно, ниже точки K', а точка M, наоборот, лежит выше соответственной точки M', ясно, что при непрерывном движении точки L наступит такой момент, когда она будет находиться на том же самом уровне, как и точка L'. Это положение точки L мы теперь и будем рассматривать (фиг. 6).

Обозначив через $u_0(s)$ решение, проведенное через эту точку L, мы видим, что имеем:

$$u_0(s_0) = u_0(s_0 + T),$$

а так как правая часть дифференциального уравнения (2) имеет период T, то отсюда следует, что все то, что делается в интервале $[s_0 \leqslant s \leqslant s_0 + T]$, будет делаться и в интервале $[s_0 + T \leqslant s \leqslant s_0 + 2T]$, т. е. течение решения $u_0(s)$ в обоих этих интервалах будет тождественным.

Отсюда видно, что решение $u_0(s)$ есть периодическое, т. е.

$$u_0(s + T) = u_0(s).$$

Теорема 4. *Всякое решение $u(s)$ дифференциального уравнения (2) безгранично приближается к периодическому решению $u_0(t)$, когда s стремится к бесконечности, т. е.*

$$\lim_{s \to +\infty} [u_0(s) - u(s)] = 0.$$

Доказательство. Пусть $u(s)$ есть периодическое решение и $u(s)$ есть какое-нибудь решение дифференциального уравнения (2):

$$\frac{du_0}{ds} = \Psi(u_0) + \Phi(s),$$
$$\frac{du}{ds} = \Psi(u) + \Phi(s).$$

Отсюда, вычитая из верхнего уравнения нижнее, имеем:

$$\frac{d(u_0 - u)}{ds} = \Psi(u_0) - \Psi(u) = (u_0 - u)\, \Psi'(\widetilde{u}),$$

где $\widetilde{u}$ есть число, промежуточное между u_0 и u. Из полученного равенства

$$\frac{d(u_0 - u)}{ds} = (u_0 - u)\, \Psi'(\widetilde{u}) \tag{3}$$

[1] Условия применимости теоремы Коши о непрерывном смещении решения при непрерывном изменении начального данного здесь, очевидно, соблюдены: в самом деле, правая часть дифференциального уравнения (2), $\Psi(u) + \Phi(s)$, имеет частную производную $\frac{\partial}{\partial u}$ непрерывной.

мы можем заключить о справедливости равенства

$$\frac{d\,|u_0 - u|}{ds} = |u_0 - u|\,\Psi'(\widetilde{u}), \tag{4}$$

в котором через $|u_0 - u|$ мы обозначаем абсолютную величину разности $u_0 - u$. Действительно, если разность отрицательна, то, умножая одновременно обе части равенства (3) на -1, мы приходим к равенству (4).

Теперь, так как производная функция Ψ', по свойству II, есть всегда отрицательная величина, меньшая, чем $-H$, где H есть положительная константа, $H > 0$, то мы видим, что равенство (4) приводит немедленно к равенству:

$$\frac{d\,|u_0 - u|}{ds} < |u_0 - u|\,(-H),$$

которое можно написать в виде:

$$\frac{1}{|u_0 - u|}\,\frac{d\,|u_0 - u|}{ds} < -H$$

или

$$\frac{d \ln |u_0 - u|}{ds} < -H.$$

Интегрируя это неравенство между какими-нибудь пределами s_0 и s, где $s_0 < s$, имеем:

$$\ln |u_0(s) - u(s)| - \ln |u_0(s_0) - u(s_0)| < -H(s - s_0)$$

или

$$\ln \frac{|u_0(s) - u(s)|}{|u_0(s_0) - u(s_0)|} < -H(s - s_0),$$

откуда

$$\frac{|u_0(s) - u(s)|}{|u_0(s_0) - u(s_0)|} < e^{-H(s-s_0)},$$

и, наконец,

$$|u_0(s) - u(s)| < |u_0(s_0) - u(s_0)|\,e^{Hs_0}e^{-Hs}.$$

Это последнее неравенство обнаруживает, что, когда s стремится к $+\infty$, то разность $u_0(s) - u(s)$ стремится к нулю так, как стремится величина e^{-Hs}, где $H > 0$, т. е. с чрезвычайной силой (ч. т. д.)

Теорема 5. *Указанное выше периодическое решение $u_0(s)$ есть единственное: никакого второго периодического решения дифференциальное уравнение (2) иметь не может.*

Доказательство. В самом деле, допустим обратное, т. е. что, кроме указанного выше периодического решения $u(s)$ с периодом T, у дифференциального уравнения (2) имеется еще второй периодический интеграл $\overline{u}_0(s)$ с каким-нибудь периодом τ. Докажем, что это невозможно.

Действительно, так как это второе периодическое решение $\overline{u}_0(s)$ отлично от первого, найдется такая точка s_0, в которой

$$\overline{u}_0(s_0) \neq u_0(s_0).$$

С другой стороны, известно, что каковы бы ни были два положительные числа T и τ, всегда можно подыскать такую пару столь больших натуральных чисел m и n, чтобы имелось неравенство:

$$|n\tau - mT| < \varepsilon,$$

где ε есть положительное число, малое сколь угодно.

Это неравенство можно, конечно, переписать в форме следующего равенства:

$$n\tau = mT + \theta\varepsilon, \tag{5}$$

вводя количество θ, по абсолютной величине меньшее единицы, т. е.

$$|\theta| < 1.$$

Теперь, в силу того, что $u_0(s)$ имеет период T, а $\bar{u}_0(s)$ обладает периодом τ, мы можем написать:

$$u_0(s_0) = u_0(s_0 + mT) \tag{6}$$

и

$$\bar{u}_0(s_0) = \bar{u}_0(s_0 + n\tau).$$

Последнее равенство, вследствие соотношения (5), напишется в виде:

$$\bar{u}_0(s_0) = \bar{u}_0(s_0 + mT + \theta\varepsilon).$$

Применяя теорему Лагранжа о конечном приращении, мы можем написать это равенство в виде:

$$\bar{u}_0(s_0) = \bar{u}_0(s_0 + mT) + \frac{\theta\varepsilon}{1}\bar{u}_0'(s_0 + mT + \theta'\theta\varepsilon), \tag{7}$$

где новый множитель θ' есть опять число, по абсолютной величине меньшее единицы, т. е. $|\theta'| < 1$.

Вычитая почленно из равенства (7) равенство (6), мы получаем:

$$\bar{u}_0(s_0) - u_0(s) = \bar{u}_0(s_0 + mT) - u_0(s_0 + mT) +$$
$$+ \frac{\theta\varepsilon}{1}\bar{u}_0'(s_0 + mT + \theta'\theta\varepsilon),$$

откуда

$$|\bar{u}_0(s_0) - u_0(s)| < |\bar{u}_0(s_0 + mT) - u_0(s_0 + mT)| +$$
$$+ \varepsilon|\bar{u}_0'(s_0 + mT + \theta'\theta\varepsilon)|.$$

Но функция $\bar{u}_0(s)$ есть решение дифференциального уравнения (2), и, стало быть, ее производная $\bar{u}_0'(s)$ есть не что иное, как сумма $\Psi(\bar{u}_0) + \Phi(s)$, остающаяся при всех изменениях переменных $\bar{u}_0$ и s по абсолютной величине меньше некоторой константы K. Отсюда предыдущее неравенство можно написать в виде:

$$|\bar{u}_0(s_0) - u_0(s_0)| < |\bar{u}_0(s_0 + mT) - u_0(s_0 + mT)| + \varepsilon K. \tag{8}$$

Заставим теперь число ε стремиться к нулю. Тогда член εK будет стремиться к нулю. С другой стороны, натуральное число m можно сделать сколь угодно большим. Отсюда, прилагая теорему 4, мы видим, что член $|\bar{u}_0(s_0+mT)-u_0(s_0+mT)|$ стремится к нулю, так как s_0+mT стремится к $+\infty$. Поэтому из неравенства (8) заключаем, что

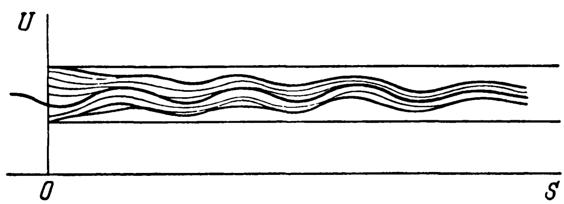
$$|\bar{u}_0(s_0)-u_0(s_0)|=0,$$

что находится в противоречии с неравенством

$$\bar{u}_0(s_0)\neq u_0(s_0),$$

от которого мы исходили (ч. т. д.).

10. Обозревая все сказанное о периодическом профиле, мы видим, что в этом случае дифференциальное уравнение (2) имеет один и только один



Фиг. 7

периодический интеграл; его период равен периоду профиля. Все другие решения дифференциального уравнения (2) непременно апериодичны, но по мере удаления от начала координат все они безгранично приближаются к этому единственному решению, которое служит, таким образом, их общим пределом.

Следовательно, если возьмем совокупность всех решений дифференциального уравнения (2), то будем иметь, говоря образно, локон интегральных кривых, который, по мере удаления от начала O, делается все тоньше и тоньше, все теснее и теснее следуя своими извивами течению одного своего элемента — единственного периодического решения (фиг. 7).

Апериодический профиль

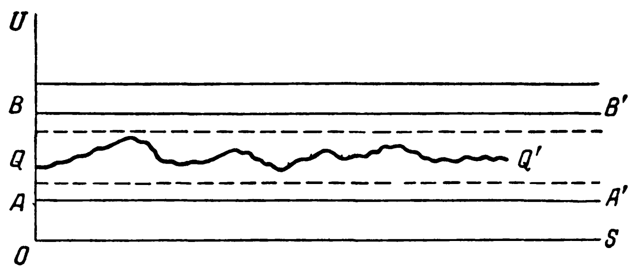
11. Случай апериодического профиля не представляет ничего существенно нового в сравнении с предыдущим: картина течения интегральных кривых остается тою же самой, как и для периодического профиля; вся разница заключается лишь в том, что теперь дифференциальное уравнение (2) уже не имеет ни одного периодического решения [1], так что в локоне интегральных кривых нет ни одной особенно замечательной, на которой

[1] Действительно, если бы такое нашлось, например $u_0(s)$, то функция $\Phi(s)$ была бы непременно периодической, как это видно, если написать дифференциальное уравнение (2) в виде: $\Phi(s)=\frac{du_0}{ds}-\Psi[u_0(s)]$, где $u_0(s)$ есть предполагаемое периодическое решение.

могло бы остановиться внимание: все кривые локона являются равноправными.

Как и в случае периодического профиля, все интегральные кривые локона безгранично приближаются друг к другу, так что локон, по мере удаления от начала, делается все тоньше и тоньше. Только здесь говорить о предельной кривой, к которой стремится локон, уже не приходится: ввиду того, что все кривые локона безгранично и чрезвычайно сильно приближаются друг к другу, и ввиду равноправия этих кривых, всякая кривая локона может считаться предельной кривой, к которой стремятся все остальные кривые локона по мере удаления их от начала.

12. Для того чтобы оправдать эту картину, нужно войти в дело ближе. Если профиль апериодичен, то функция $\Phi(s)$ дифференциального уравнения (2) также апериодична. Соответственно с этим и кривая QQ' тоже будет апериодичной.



Фиг. 8

Понятие о полосе устойчивости составляется так же, как и раньше. Построим две прямые AA' и BB', параллельные S-оси, такие, что вся кривая QQ' будет заключена между ними, и притом так, чтобы расстояние от этих прямых до точек кривой не становилось менее некоторого, хотя бы и малого, положительного числа δ, $\delta > 0$ (фиг. 8).

Часть плоскости, заключенную между этими прямыми AA' и BB', назовем по-прежнему полосою устойчивости.

Ввиду того, что кривая QQ' всеми своими точками отстоит от прямых AA' и BB' дальше, чем на δ, правая часть дифференциального уравнения (2) для всех точек плоскости, лежащих ниже прямой AA', будет всегда больше некоторой положительной константы α, $\alpha > 0$, а для всех точек плоскости, лежащих выше прямой BB', она будет всегда меньше некоторой отрицательной константы $-\beta$, где $\beta > 0$.

Сказанного вполне достаточно, чтобы заметить, что теоремы 1 и 2 имеют силу и для апериодического профиля: достаточно просто повторить слово в слово доказательства этих теорем.

Таким образом, всякое решение $u(s)$ непрерывно попадает в полосу устойчивости и, раз попав в нее, из нее никогда уже не выйдет.

Равным образом, для апериодического профиля справедлива теорема, аналогичная теореме 4. Действительно, имея какие-нибудь два решения,

$u_1(s)$ и $u_2(s)$, мы для них, повторяя рассуждения теоремы 4 слово в слово, выводим неравенство:

$$|u_2(s) - u_1(s)| < |u_2(s_0) - u_1(s_0)| e^{Hs_0} e^{Hs},$$

из которого по-прежнему заключаем, что разность $u_1 - u_2$ стремится к нулю, когда s стремится к $+\infty$.

Таким образом, все решения стремятся друг к другу по мере удаления от начала.

Все это удостоверяет картину течения интегральных кривых, указанную выше, в § 11.

13. Все изложенное выше относилось к дифференциальному уравнению движения поезда, написанному в виде:

$$v\frac{dv}{ds} = \xi\left[f(v) - w(v) - 1000\frac{dy}{ds}\right], \tag{1}$$

от которого мы и отправлялись и которое выражает зависимость скорости поезда v от пути s, пройденного по дуге криволинейного профиля.

Имеется, однако, еще другое уравнение движения поезда, которым выражается зависимость скорости v поезда от времени t. Это уравнение пишется так:

$$\frac{dv}{dt} = \xi\left[f(v) - w(v) - 1000\frac{dy}{ds}\right]; \tag{1'}$$

оно получается из уравнения (1), если положить $ds = v\,dt$.

Легко видеть, что уравнение (1') не требует никаких новых рассмотрений в смысле изучения течения его интегральных кривых, потому что все, что было сказано выше об уравнении (1), — все это приложимо и к уравнению (1').

Действительно, легко преобразовать уравнение (1') в уравнение (2). В самом деле, полагая

$$\xi[f(v) - w(v)] = \Psi_1(v)$$

и помня, что теперь производная $\frac{dy}{ds}$ должна быть нам известна как функция времени t, т. е.

$$-\xi\cdot 1000\cdot\frac{dy}{ds} = \Phi_1(t),$$

мы можем написать уравнение в виде:

$$\frac{dv}{dt} = \Psi_1(v) + \Phi_1(t). \tag{2'}$$

Так как функция $\Psi_1(v)$ обладает всеми тремя свойствами I, II и III, то отсюда следует заключить о применимости к уравнению (2') всего того, что было выше сказано об уравнении (2).

Существование установившегося движения поезда по любому криволинейному профилю

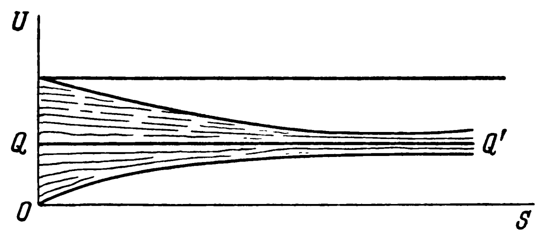
14. Чтобы составить себе представление об «установившемся движении поезда», рассмотрим сначала тот случай, когда поезд движется по какому-нибудь прямолинейному профилю (площадке, подъему или спуску).

В этом случае в дифференциальном уравнении (2) функция $\Phi(s)$ уже не зависит от s, но является константой:

$$\Phi(s) \equiv K,$$

причем $K=0$, если движение совершается по площадке, $K<0$, если имеем подъем, и $K>0$, если имеем спуск. Следовательно, дифференциальное уравнение (2) в этом случае будет писаться в виде:

$$\frac{du}{ds} = \Psi(u) + K. \tag{2*}$$



Фиг. 9

Ясно, что в этом случае кривая QQ' (см. фиг. 3) превращается просто в прямую QQ' (фиг. 9), параллельную S-оси и отстоящую от нее на расстояние u_0, где u_0 есть корень уравнения

$$\Psi(u_0) + K = 0. \tag{9}$$

Ясно, далее, что полоса устойчивости в этом случае становится бесконечно тонкой, т. е. превращается в эту самую прямую QQ'.

На основании всего, что было сказано выше о полосе устойчивости, мы можем заключить, что всякое решение дифференциального уравнения (2), из каких бы начальных данных мы ни исходили, в этом случае будет безгранично, т. е. асимптотически приближаться к этой прямой QQ', никогда ее не пересекая и не касаясь, но всегда будучи удалено от нее на безгранично уменьшающуюся величину[1].

[1] Этот пункт можно доказать с абсолютной строгостью. Действительно, так как число u_0 есть корень функции $\Psi(u)+K$, то вблизи него она напишется в виде:

$$\Psi(u) - \Psi(u_0) = (u-u_0)\,\Psi'(u_0+\delta),$$

где δ есть функция от u, стремящаяся к нулю, когда u стремится к u_0. Отсюда точная интеграция дифференциального уравнения (2*) дает:

$$s = \int\limits_a^u \frac{du}{(u-u_0)\,\Psi'(u_0+\delta)}\,.$$

Локон интегральных кривых в этом случае является просто локоном «логарифмик», имеющих общую асимптоту — прямую QQ'.

Самая асимптота, т. е. прямая QQ', тоже в этом случае будет решением дифференциального уравнения (2^*). Достаточно для этого просто подставить в дифференциальное уравнение (2^*) вместо u постоянную величину u_0: в силу равенства (9) дифференциальное уравнение (2^*) будет удовлетворено.

Так как дифференциальное уравнение (2^*) можно рассматривать как периодическое (ибо всякую константу K, очевидно, можно рассматривать как периодическую функцию), то ясно, что асимптота QQ' и есть то единственное периодическое решение, о котором мы говорили выше в теоремах 3, 4 и 5.

В силу только что изложенного ясно, что скорость v всякого поезда, с какой бы начальной скоростью он ни начал двигаться, при движении его по прямолинейному профилю будет безгранично приближаться к предельной величине v_0, квадрат которой, $v_0^2 = u_0$, и есть корень уравнения (9)[1].

Это именно движение со скоростью $v_0 = \sqrt{u_0}$ мы и будем называть установившимся движением по данному прямолинейному профилю.

Отметим, что в этом случае это установившееся движение находится без всякой интеграции дифференциального уравнения: для его отыскания достаточно просто найти корень уравнения (9).

15. Чтобы определить установившееся движение поезда по любому криволинейному (апериодическому или периодическому) профилю, мы должны поступать несколько иначе.

Пусть имеем какой-нибудь (вообще, непериодический) железнодорожный профиль, безграничный в обе стороны, т. е. идущий от $s = -\infty$ до $s = +\infty$. Докажем для него следующие предложения:

Теорема 6. *Дифференциальное уравнение (2) непременно имеет решение $U(s)$, безграничное в обе стороны и остающееся все время в полосе устойчивости.*

Доказательство. Для доказательства построим это решение. Возьмем для этого какое-нибудь чрезвычайно большое отрицательное число σ и построим локон всех решений дифференциального уравнения (2):

$$\frac{du}{ds} = \Psi(u) + \Phi(s), \tag{2}$$

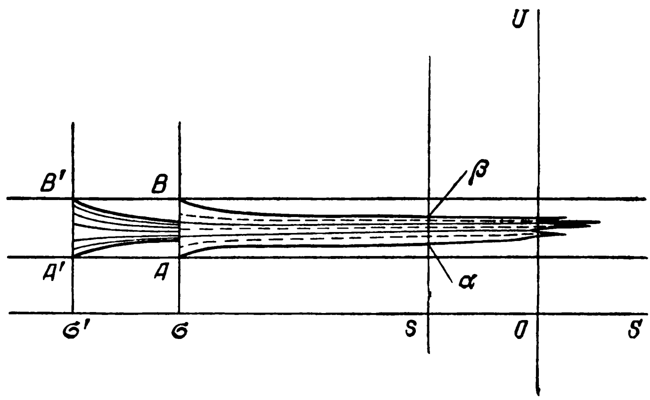
Так как $|\Psi'|$ есть ограниченная величина, потому что Ψ' есть непрерывная функция, то отсюда следует с совершенной ясностью, что написанный определенный интеграл стремится к ∞, когда u стремится к u_0. Значит, скорость $v_0 = \sqrt{u_0}$ не может быть никогда достигнута на конечном расстоянии от начала.

[1] Это находится в противоречии с движением конкретного поезда, который уже на расстоянии 3—4 км от начала движения идет в точности со скоростью установившегося движения $v_0 = \sqrt{u_0}$.

определенных начальными данными $s = \sigma$, $u = u_0$, где u_0 есть величина, непрерывно изменяющаяся в пределах полосы устойчивости, т. е. пробегающая отрезок AB.

Ясно, что всякая интегральная кривая этого локона, имея начальную точку лежащей в полосе устойчивости (на отрезке AB), в силу теоремы 2 в дальнейшем своем течении вправо от начальной точки будет заключена в полосе устойчивости. Поэтому весь рассматриваемый локон содержится в полосе устойчивости.

Если мы теперь заставим число σ стремиться к $-\infty$, то рассматриваемый локон станет подвижным, так как начальный отрезок AB, к которому прикреплены нити локона, станет безгранично удаляться влево, стремясь уйти в $s = -\infty$.



Фиг. 10

Рассечем наш подвижной локон перпендикуляром, восставленным к S-оси в какой-нибудь неподвижной точке s, где бы эта последняя ни лежала, и посмотрим, что делается с сечением локона $\alpha\beta$.

Для этого рассмотрим какие-нибудь два последовательные положения движущегося локона, например σ и σ' (фиг. 10). Ясно, что кривые локона, начинающегося от $A'B'$, протекая в полосе устойчивости, непременно пересекут отрезок AB и, таким образом, в своем дальнейшем течении составят лишь часть локона, исходящего от AB. Поэтому, когда начальный отрезок AB локона удаляется влево, сечение $d\beta$ локона неподвижной прямой становится все тоньше и тоньше; соответственно с этим точка β движется вниз, а точка α движется вверх; следовательно, эти две точки сближаются.

Покажем, что эти точки α и β безгранично сближаются, когда σ стремится к $-\infty$.

Для этого обозначим решение, исходящее из точки A, через $u_1(s)$ и решение, исходящее из точки B, — через $u_2(s)$. Отсюда неравенство, данное в § 12, перепишется в виде:

$$|u_2(s) - u_1(s)| < |u_2(\sigma) - u_1(\sigma)| e^{H\sigma} e^{-Hs}, \tag{10}$$

так как в данном случае σ играет роль числа s_0. Когда локон бесконечно удаляется влево, число σ стремится к $-\infty$; что же касается разности $u_2(\sigma)-u_1(\sigma)$, то она, очевидно, равна длине отрезка AB, т. е. есть константа; число s тоже есть константа. Поэтому из неравенства (10) следует:

$$u_2(s)-u_1(s)=0,$$

что мы и желали обнаружить.

Таким образом, при движении локона его верхнее и нижнее решения безгранично сближаются между собою в любом рассматриваемом месте s; их общий предел есть кривая, безграничная в обе стороны и не выходящая нигде из полосы устойчивости; эта кривая есть, очевидно, тоже решение дифференциального уравнения (2), потому что предел решений дифференциального уравнения есть опять его решение. Обозначая его через $U(s)$, мы имеем теорему доказанной.

Теорема 7. *Указанное выше решение $U(s)$ есть единственное. Никакого второго решения, безграничного в обе стороны и остающегося все время в полосе устойчивости, дифференциальное уравнение (2) иметь не может.*

Доказательство. Действительно, если бы нашлось еще другое решение $\overline{U}(s)$ с аналогичными свойствами, то в силу § 12 мы имели бы неравенство:

$$|\overline{U}(s)-U(s)|<|\overline{U}(s_0)-U(s_0)|\,e^{Hs_0}e^{-Hs},$$

справедливое для всякого числа s_0, меньшего s, $s_0<s$. Если s есть число постоянное, а число s_0 стремится к $-\infty$, то левая часть этого неравенства есть постоянное число, а правая стремится к нулю, так как $H>0$, а разность $|\overline{U}(s)-U(s_0)|$ есть величина, меньшая ширины полосы устойчивости, потому что оба решения $\overline{U}(s)$ и $U(s)$ не выходят из нее.

Отсюда, левая часть неравенства может быть только нулем, т. е.

$$\overline{U}(s)=U(s).$$

Таким образом, второе решение совпадает с $U(s)$.

Следствие. *Указанное решение $U(s)$ для периодического профиля совпадает с периодическим решением.*

Действительно, периодическое решение безгранично в обе стороны и протекает в полосе устойчивости; отсюда, в силу доказанной теоремы, оно должно совпадать с указанным решением $U(s)$.

Теорема 8. *Всякое решение $u(s)$, какой бы начальной точкой оно ни определялось, становится сколь угодно близким к указанному решению $U(s)$, когда мы удалимся от этой начальной точки на расстояние, величина которого не зависит от ее положения.*

Доказательство. Формулируя точно рассматриваемую теорему, мы должны сказать:

для каждого положительного числа ε, $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, можно найти такое число L, $L > 0$, зависящее только от ε, что всякое решение $u(s)$ дифференциального уравнения (2), какими бы начальными данными $[s = s_0, u(s_0) = u_0]$ оно ни было определено, непременно удовлетворяет неравенству:

$$|u(s) - U(s)| < \varepsilon$$

для всякого

$$s > s_0 + L.$$

Для доказательства теоремы рассмотрим неравенство § 12:

$$|u(s) - U(s)| < |u(s_0) - U(s_0)| e^{Hs_0} e^{-Hs}.$$

Ввиду того, что решение $U(s)$ протекает в полосе устойчивости, а число $u_0 = u(s_0)$ должно быть взятым в границах $0 \leqslant u(s_0) \leqslant 4900$, предыдущее неравенство перепишется в виде:

$$|u(s) - U(s)| < 4900 \cdot e^{-H(s-s_0)},$$

где H есть константа, бо́льшая нуля, $H > 0$. Отсюда, для того, чтобы левая часть этого неравенства была меньше ε, достаточно иметь:

$$4900\, e^{-H(s-s_0)} < \varepsilon,$$

или

$$s > s_0 + \frac{1}{H} \ln \frac{4900}{\varepsilon}.$$

Поэтому, определяя положительное число L равенством

$$L = \frac{1}{H} \ln \frac{4900}{\varepsilon},$$

мы видим, что имеем неравенство

$$|u(s) - U(s)| < \varepsilon,$$

если $s > s_0 + L$. При этом число L зависит только от ε и совсем не зависит от начальных данных $[s_0, u_0]$ решения $u(s)$ (ч. т. д.).

16. Из доказанных теорем мы видим, что на любом криволинейном профиле, безграничном в обе стороны, имеется только одно такое движение, которое стремится совершать всякий поезд, от какой бы станции он ни отправлялся и с какой бы начальною скоростью он от нее ни отходил.

Естественно назвать это движение $U(s)$ установившимся движением по данному криволинейному профилю и скорость его $\sqrt{U(s)}$ — скоростью установившегося движения.

Всякий поезд, если он достаточно отойдет от станции, начинает двигаться со скоростью, не отличимой от $\sqrt{U(s)}$; два различных поезда одного и того же состава через всякую точку s профиля пройдут со скоростями, не отличимыми от $\sqrt{U(s)}$, если точка s достаточно удалена от последней остановки того или другого поезда.

Это установившееся движение, существование которого, таким образом, доказано нами в этой заметке, будет, как мы видели, равномерным на всяком прямолинейном профиле и будет непременно периодическим на всяком периодическом профиле[1].

Заключение

17. Практически, для определения движения поезда в числах, важно знание его установившегося движения. Действительно, перегон, т. е. расстояние между двумя последовательными остановками поезда, в среднем равен 70 км. Но природа вещей, очевидно, такова, что уже после 4 км от бывшей остановки влияние ее совсем исчезает, и поезд движется дальше уже абсолютно со скоростью установившегося движения, вплоть до следующей остановки.

Таким образом, задача определения движения поезда в числах распадается на две следующие задачи:

1. Определить движение поезда на протяжении до 4 км после остановки.

2. Определить установившееся движение поезда.

Первая задача возникает и тогда, когда поезд не останавливается на станции, но проходит через нее с замедленной скоростью, не соответствующей установившейся скорости в станционной точке; ясно, что влияние этой замедленной скорости нужно учитывать лишь до 4 км, а далее влияние ее исчезает.

Поэтому решение первой задачи требует рассмотрения всяких начальных данных, т. е. требует полного интегрирования дифференциального уравнения (2). Прекрасным методом академика С. А. Чаплыгина, вытекающим из его замечательной теоремы о дифференциальных неравенствах, первая задача разрешается вполне, причем вычисления протекают в сравнительно небольших числах[2].

---

[1] Краткости ради, профиль $y(s)$ мы называем, в широком смысле, периодическим, если $\frac{dy}{ds}$ есть периодическая функция от s; такой профиль не обязательно будет периодическим в собственном смысле, т. е. геометрической периодической линией; например, профиль $y = s + \cos s$ есть периодический в широком смысле, но геометрически, очевидно, представляет правильный колебательный подъем; но всякий периодический профиль $y(s)$ в узком смысле есть периодический в широком смысле, так как $\frac{dy}{ds}$ есть в этом случае периодическая функция. Ясно, что все то, что мы выше говорили о периодическом профиле, относится к пониманию периодичности в широком смысле, так как для исследования была важна лишь периодичность дифференциального уравнения, а не самого профиля.

[2] Существенное достоинство метода академика С. А. Чаплыгина, помимо уже его теоретической важности и гибкости в вычислениях, заключается в том, что в каждой стадии его применения мы с совершенной ясностью знаем, по какую именно сторону неизвестного интеграла мы находимся, т. е. имеем ли мы приближение, большее искомого интеграла, или, наоборот, меньшее его, и имеем возможность

Что же касается второй задачи — отыскания установившегося движения, — то здесь есть трудность, бросающаяся в глаза. Действительно, как бы ни был совершенен метод приближенного интегрирования, он даст только тогда установившееся движение, когда начальная точка будет удалена влево в бесконечность. А тогда всегда есть опасение, что в формулы метода проскользнет вековой член, делающий невозможным отыскание установившегося движения.

Но легко видеть, что вторая задача может быть значительно упрощена, так как все можно свести к случаю периодического профиля, и, следовательно, к отысканию периодического решения.

Действительно, если вырезать из данного непериодического профиля рассматриваемый перегон в 70 км и создать другой, «идеальный», но уже периодический профиль, состоящий из бесконечного повторения этого перегона (изменяя, если нужно, его в концах для соблюдения непрерывности профиля), то ясно, что установившееся движение на таком периодическом профиле будет нечувствительно отличаться от установившегося движения на рассматриваемом перегоне данного профиля, так как конкретный поезд, прошедший 4 км пути, ведет себя в дальнейшем движении так, как если бы он до этого совершил бесконечно большой пробег.

Таким образом, все сводится к случаю периодического профиля. А в случае простейших периодических профилей дифференциальное уравнение (2) преобразуется легко в линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка, изучаемое в небесной механике, для которого ею выработаны методы нахождения периодических решений.

получить приближения с обеих сторон, а не с одной только стороны, как почти все известные методы (например, метод «последовательных приближений»).

Этот метод академика С. А. Чаплыгина был им расширен и перенесен на любые дифференциальные уравнения 1-го порядка в его важном сообщении Научно-экспериментальному институту путей сообщения на заседании 18 ноября 1919 г.

Для знакомых с методом академика С. А. Чаплыгина ясно, без дальнейшего, что он применим ко всему перегону в 70 км. Дробление этого перегона на две части в настоящей работе вызвано желанием ввести математическую задачу о совершенно точном отыскании установившегося движения.

О МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ АКАДЕМИКА С. А. ЧАПЛЫГИНА *

Краткое содержание

Настоящая работа автора посвящена изучению открытого и разработанного академиком С. А. Чаплыгиным метода приближенного интегрирования дифференциальных уравнений.

Основанием этого метода является известное предложение С. А. Чаплыгина о двух дифференциальных неравенствах, которое можно формулировать следующим образом:

Если в некоторой части плоскости xOy дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

где функция f есть непрерывная, имеет только по одной интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через любую заданную начальную точку $M_0(x_0, y_0)$ этой части плоскости, то тогда всякие две непрерывные кривые $y = z(x)$ и $y = t(x)$, проходящие через точку M_0 и удовлетворяющие двум дифференциальным неравенствам:

$$\frac{dz}{dx} < f(x, z) \text{ и } \frac{dt}{dx} > f(x, t),$$

расположены соответственно ниже и выше рассматриваемой интегральной кривой $y = y(x)$.

В этой формулировке относительно функции $f(x, y)$ не предполагается ничего, кроме непрерывности и единственности интегралов дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Не предполагая более ничего относительно функции f, методами современной теории функции можно полностью доказать предложение о двух дифференциальных неравенствах С. А. Чаплыгина. Однако, чтобы избегнуть метода теории множеств, автор, следуя примеру С. А. Чаплыгина, ограничивается предположением о существовании и непрерывности $\frac{\partial f}{\partial y}$, которое,

* Труды ЦАГИ, вып. 141, 1932.

как еще со времен Коши известно, влечет упомянутую единственность интегралов и благодаря которому доказательство упрощается чрезвычайно.

Как ценное следствие предыдущего важного предложения, вытекает следующая теорема, также обязанная С. А. Чаплыгину:

Если рассматриваемая функция $f(x, y)$ содержится между двумя какими-нибудь непрерывными функциями: $f_1(x, y) \leqslant f(x, y) \leqslant f_2(x, y)$, то интегральная кривая $y = y(x)$ также всегда лежит между интегральными кривыми дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz}{dx} = f_1(x, z) \text{ и } \frac{dt}{dx} = f_2(x, t),$$

проходящими через начальную точку $M_0 : z(x) < y(x) < t(x)$.

Опираясь на это предложение, автор в соответствии с геометрическими рассуждениями, употреблявшимися в аналогичных случаях Н. Е. Жуковским, придает геометрическую форму дальнейшим рассмотрениям С. А Чаплыгина. Здесь проблема ставится следующим образом:

Зная лишь одну пару $[z, t]$ непрерывных кривых, удовлетворяющих двум дифференциальным неравенствам С. А. Чаплыгина, вывести бесчисленное множество других дальнейших пар: $[z_1, t_1]$, $[z_2, t_2]$, $[z_3, t_3], \ldots$ $\ldots, [z_n, t_n], \ldots$, непрерывных кривых, также удовлетворяющих двум дифференциальным неравенствам С. А. Чаплыгина и все теснее и теснее охватывающих интегральную кривую $y = y(x)$.

Для того чтобы вывести из начальной пары $[z, t]$ все дальнейшие пары $[z_n, t_n]$, автор рассматривает в пространстве $xy\zeta$ поверхность S, определенную уравнением $\zeta = f(x, y)$, а на плоскости xOy автор рассматривает начальную пару кривых $y = z(x)$ и $y = t(x)$, проходящую через точку M_0 и удовлетворяющую неравенствам:

$$\frac{dz}{dx} < f(x, y) \text{ и } \frac{dt}{dx} > f(x, t).$$

Пусть L_1 и L_2 две непрерывные кривые, начерченные на поверхности S и имеющие своими ортогональными проекциями на плоскость xOy соответственно кривые $y = z(x)$ и $y = t(x)$. Следуя А. С. Чаплыгину, автор предполагает, что частная производная $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ не изменяет своего знака в рассматриваемой части плоскости xOy, будучи, например, положительной: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$.

В этом предположении автор строит две линейчатых поверхности (S_1 и S_2), из которых первая S_1 образована движением прямой линии, параллельной плоскости $yO\zeta$ и все время прикасающейся к поверхности S вдоль всей кривой линии L_1; вторая же поверхность S_0 образована движением прямой линии, также параллельной плоскости $yO\zeta$, но все время пересекающей обе кривые L_1 и L_2. Если уравнением линейчатой поверхности S_1 будет $\zeta = f_1(x, y)$ и уравнением линейчатой поверхности S_2 будет $\zeta = f_2(x, y)$, то для всей части плоскости xOy, находящейся между кривыми $y = z(x)$ и $y = t(x)$, будет справедливым неравенство $f_1(x, y) \leqslant f(x, y) \leqslant f_2(x, y)$. Отсюда интегрирование двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz}{dx} = f_1(x, z) \text{ и } \frac{dt}{dx} = f_2(x, t),$$

линейных относительно неизвестных z и t, дает две новые кривые:

$$y = z_1(x) \text{ и } y = t_1(x),$$

проходящие через начальную точку M_0. Автор доказывает, что эти новые кривые удовлетворяют двум дифференциальным неравенствам С. А. Чаплыгина и содержатся обе внутри начальной пары $[z, t]$; значит, обхват ими интегральной кривой $y = y(x)$ является более тесным.

Таким образом, из данной начальной пары $[z, t]$, охватывающей интегральную кривую $y = y(x)$, однозначно выводится новая пара $[z_1, t_1]$, вложенная в начальную пару и удовлетворяющая всем тем требованиям, каким удовлетворяла эта начальная пара.

Однообразное повторение этого приема дает бесконечную последовательность пар:

$$[z, t], [z_1, t_1], [z_2, t_2], [z_3, t_3], \ldots, [z_n, t_n], \ldots,$$

вложенных одна в другую и все теснее и теснее приближающихся к искомой кривой

$$y = y(x).$$

Вопрос теперь ставится о быстроте сходимости этого процесса. Здесь автору принадлежит точная оценка приближения аппроксимирующих кривых $y = z_n(x)$ и $y = t_n(x)$ к искомой интегральной кривой $y = y(x)$. Сначала геометрические, а потом и аналитические рассмотрения приводят автора к предложению:

Разность $t_n(x) - z_n(x)$ есть бесконечно малое порядка не меньшего, чем

$$\frac{1}{2^{2^n}},$$

и имеются случаи, когда оно есть бесконечно малое в точности этого порядка.

Таким образом, быстрота сходимости процесса С. А. Чаплыгина точно найдена и оказывается более сильной, чем все, что дается известными до сих пор в математическом анализе алгорифмами.

Попутно автор рассматривает возражения проф. В. П. Ветчинкина, относящиеся к вопросу о выборе начальной пары, и выводит отсюда определенные правила для целесообразного подбора ее.

Наконец, автор отмечает поразительную аналогию, имеющуюся между методом С. А. Чаплыгина для приближения интегралов дифференциальных уравнений и методом Ньютона—Фурье в высшей алгебре для приближения корней алгебраических уравнений. Здесь крайне интересной является задача об отыскании аналогии к знаменитой теореме Штурма о разделении корней алгебраического уравнения, которой, без сомнения соответствует теперь задача о разделении двух интегралов, проходящих, через одну и ту же начальную точку M_0 дифференциального уравнения:

$$f(x, y, y') = 0,$$

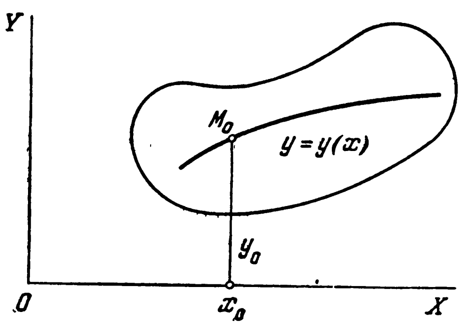
не разрешенного относительно буквы y'.

1. Постановка проблемы

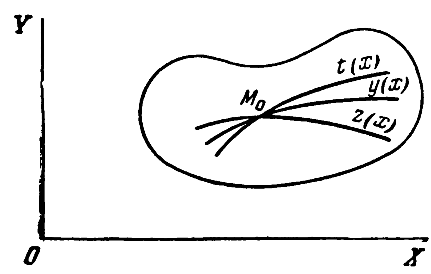
Пусть дано дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

где функция f предполагается непрерывной от двух аргументов x и y в некоторой части плоскости xOy и, кроме того, удовлетворяющей в этой части плоскости какому-нибудь условию, обеспечивающему единственность интеграла. Например, мы можем просто предполагать, что в этой части плоскости $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ имеет везде конечную величину.



Фиг. 1



Фиг. 2

В этом предположении в рассматриваемой части плоскости (фиг. 1) через всякую точку x_0y_0 проходит заведомо единственная интегральная кривая $y = y(x)$. Вопрос ставится так, чтобы в целях практики фактически отыскать другую кривую, проходящую через эту же точку $M_0(x_0, y_0)$ и столь заведомо близкую к неизвестной интегральной кривой $y = y(x)$, что практически мы могли бы брать вместо ординат интегральной кривой $y = y(x)$ ординаты этой приближенной кривой.

2. Метод С. А. Чаплыгина

Метод этот сильно напоминает тот метод, который высшая алгебра употребляет для приближенного вычисления корней алгебраических уравнений. В этом последнем неизвестный нам корень ξ данного алгебраического уравнения $F(x) = 0$ окружается двумя вещественными числами α и β, доступными для вычисления и такими, что искомый корень ξ заведомо заключен между ними, т. е. $\alpha < \xi < \beta$.

Далее, там же показывается, каким образом можно сжимать расстояние между α и β, т. е. уменьшать разность $(\beta - \alpha)$, и, таким образом. все точнее подходить с обеих сторон к неизвестному корню ξ.

Аналогичным образом стремится поступать и с неизвестной нам интегральной кривой $y = y(x)$ С. А. Чаплыгин. Принцип его метода состоит в том, что в данном куске плоскости xOy (фиг. 2) мы проводим две кривых $y = t(x)$ и $y = z(x)$ так, что они проходят через ту же самую точку $M_0(x_0, y_0)$, и так, что неизвестная нам интегральная кривая $y = y(x)$ заведомо заключена между ними, т. е. так, что имеется неравенство:

$$z(x) < y(x) < t(x).$$

Ясно, что если удастся сжать кусок плоскости между кривыми

$$y = t(x) \text{ и } y = z(x)$$

до желаемой узости, то приближенное знание неизвестной интегральной кривой $y = y(x)$ является обеспеченным.

Такова общая идея метода С. А. Чаплыгина. Практическое же выполнение этого метода требует предварительного решения двух проблем:

А. 1. Каков критерий для того, чтобы какая-нибудь рассматриваемая кривая текла заведомо выше или ниже неизвестной нам интегральной кривой?

В. 2. Каков прием сжимания уже найденной пары кривых $z(x)$ и $t(x)$, между которыми заведомо течет искомая интегральная кривая $y = y(x)$?

3. Критерий дифференциальных неравенств

Для решения проблемы А, состоящей в отыскании критерия для того или иного положения интегральной кривой, С. А. Чаплыгин дал весьма замечательную теорему чрезвычайной простоты, получившую название теоремы о дифференциальных неравенствах.

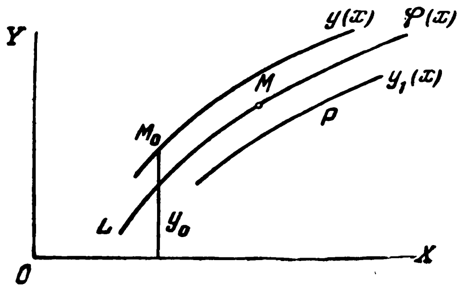
Вот ее формулировка:

Непрерывная кривая $y = u(x)$, вдоль которой справедливо неравенство в широком смысле (т. е. с возможностью и равенства):

$$\frac{du}{dx} - f(x, u) \geqslant 0$$

и которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, не может иметь точек ***под*** *интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через ту же самую точку M_0.*

Действительно, пусть кривая $y = u(x)$ имеет точку P, лежащую под интегральной кривой $y = y(x)$ (фиг. 3). Так как в данной части плоскости имеет силу условие единственности интегральных кривых, то интегральная кривая $y = y_1(x)$, проведенная через точку P, не пересечет нашей интегральной кривой $y = y(x)$ и, значит, вся будет лежать под нею. Проведем теперь между интегральными кривыми $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$ какую-нибудь интегральную линию L. Так как кривая $y = u(x)$ имеет точки и на $y = y(x)$, и на $y = y_1(x)$, то интегральная линия L тоже должна пересечься с кривой $y = u(x)$. Пусть M будет самая левая [(т. е. первая) точка кривой $y = u(x)$, лежащая на L.



Фиг. 3

Теперь мы утверждаем, что кривая $y = u(x)$ касается линии L в точке M. В самом деле, если координаты точки M суть a и b, то имеем $b = u(a)$. Если уравнение интегральной кривой L обозначим через $y = \varphi(x)$, то $b = \varphi(a)$. Значит:

$$\left[\frac{du(x)}{dx}\right]_{x=a} \geqslant \left[\frac{d\varphi(x)}{dx}\right]_{x=a}.$$

Но если бы мы имели неравенство в точном смысле этого слова, то это значило бы, что кривая $y = u(x)$, левее точки M, идет ниже кривой L, что невозможно, так как точка M есть первая точка встречи кривой L с кривой $y = u(x)$.

Итак,

$$u'(a) = \varphi'(a),$$

что и доказывает прикосновение кривых L и $y = u(x)$ в точке M.

Теперь, если мы станем двигать линию L, начиная от интегральной кривой $y = y(x)$, к интегральной линии $y = y_1(x)$, точка M опишет дугу кривой линии[1], все время прикасающейся к подвижной интегральной кривой L. Значит, эта дуга, удовлетворяя в каждой своей точке дифференциальному уравнению $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, сама является интегральной кривой этого дифференциального уравнения. Но это — вещь невозможная, так как через всякую точку M должна проходить лишь одна интегральная кривая, а не две различных таких кривых.

Точно так же доказывается аналогичное предложение:

Непрерывная кривая $y = u(x)$, вдоль которой справедливо неравенство в широком смысле:

$$\frac{du}{dx} - f(x, u) \leqslant 0$$

[1] Здесь мы немного упрощаем явление, желая избегнуть всех трудностей, вызываемых теорией функций и обусловленных желанием провести рассуждение в общем виде, т. е. базируясь только на единственности интегральных линий, а не на каких-либо дополнительных гипотезах относительно функции $f(x, y)$.

и которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, не может иметь точек ***над*** *интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через ту же самую точку M_0.*

Вот какое употребление делает С. А. Чаплыгин из этого предложения.

Допустим, что наряду с функцией $f(x, y)$ рассматриваются две другие функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, удовлетворяющие неравенствам:

$$f_1(x, y) \leqslant f(x, y) \leqslant f_2(x, y)$$

Мы предполагаем, что функции f_1 и f_2 непрерывны в том же самом куске плоскости, что и $f(x, y)$. В этих условиях всякая интегральная кривая $y = y(x)$ дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

лежит между обеими интегральными кривыми $y = t(x)$ и $y = z(x)$ дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz}{dx} = f_1(x, z) \text{ и } \frac{dt}{dx} = f_2(x, t),$$

проходящими через ту же самую начальную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Действительно, вдоль кривой $y = z(x)$ имеем:

$$\frac{dz}{dx} - f(x, z) \leqslant 0$$

и вдоль кривой $y = t(x)$ имеем:

$$\frac{dt}{dx} - f(x, t) \geqslant 0.$$

Метод С. А. Чаплыгина и состоит в подборе таких функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, для которых оба дифференциальных уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y) \text{ и } \frac{dy}{dx} = f_2(x, y)$$

интегрировались бы без труда. С. А. Чаплыгин прибегает для этой цели к линейным дифференциальным уравнениям, т. е. к уравнениям вида:

$$\frac{dy}{dx} = Ay + B,$$

где A и B зависят только от x.

4. Проблема сжимания аппроксимирующих кривых

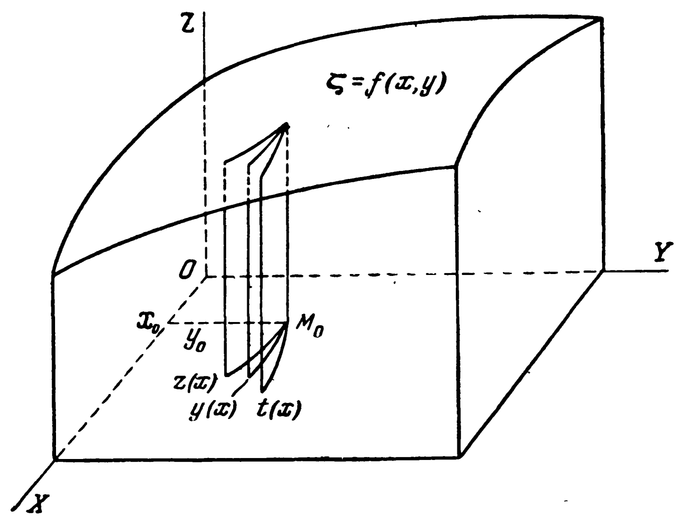
Для того чтобы возможно было применить как инструмент аппроксимирования линейные уравнения, необходимы дальнейшие предположения о форме или свойствах данной функции $f(x, y)$. С. А. Чаплыгин ввел естественное предположение, что $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ сохраняет свой постоянный знак в рассматриваемом куске плоскости.

Чтобы понять естественность этого требования, сделаем следующие рассмотрения. Правую часть данного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

мы интерпретируем геометрически в виде поверхности (фиг. 4):

$$\zeta = f(x, y).$$



Фиг. 4

Изобразим на плоскости xOy начальную точку $M_0(x_0, y_0)$ и две каких-нибудь кривых:

$$y = z(x) \text{ и } y = t(x),$$

охватывающих снизу и сверху искомую интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через точку M_0. Проведем поверхность

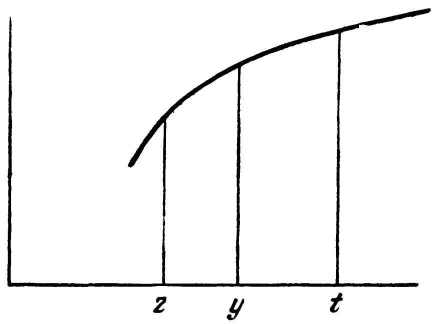
$$\zeta = f(x, y)$$

и восставим в каждой точке кривых

$$y = t(x), \quad y = y(x) \quad \text{и} \quad y = z(x)$$

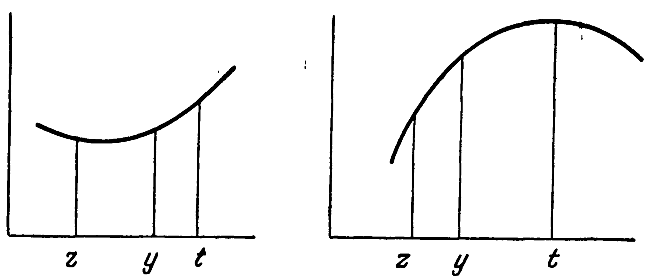
перпендикуляры к плоскости xOy. Тогда получим три цилиндрических поверхности, высекающие на поверхности $\zeta = f(x, y)$ три соответственных кривых. Для ясности возьмем пересечение чертежа какой-нибудь плоскостью, параллельной плоскости $yO\zeta$. В этой плоскости мы будем иметь нижеследующий чертеж (фиг. 5), где на горизонтальной прямой три точки z, y и t суть разрезы кривых линий $y = z(x)$, $y = y(x)$ и $y = t(x)$

проведенной плоскостью. Условие С. А. Чаплыгина постоянства знака $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ есть просто условие того, чтобы поверхность $\zeta = f(x, y)$ разрезалась плоскостями, параллельными плоскости $yO\zeta$, по кривым либо постоянно выпуклым книзу, либо постоянно вогнутым книзу.



Фиг. 5

Значит, в условии С. А. Чаплыгина имеем лишь две возможности, даваемые чертежом (фиг. 6).



Фиг. 6

Теперь вот две линейчатых поверхности:

$$\zeta = f_1(x, y) \text{ и } \zeta = f_2(x, y),$$

которые строит С. А. Чаплыгин для того, чтобы были применены принципы его теории: он соединяет две крайних точки кривой предыдущего чертежа хордой и проводит касательную к кривой в одной из крайних точек, выбирая точку с абсциссой z в случае выпуклости кривой книзу и выбирая точку с абсциссой t в случае выпуклости кривой кверху (фиг. 7).

Если теперь проделать построение для всех плоскостей, параллельных плоскости $yO\zeta$, то получатся две непрерывных линейчатых поверхности:

$$\zeta = f_1(x, y) \text{ и } \zeta = f_2(x, y),$$

таких, что одна из них лежит ниже поверхности

$$\zeta = f(x, y),$$

между точками z и t, а другая, наоборот, выше.

Значит, мы имеем между точками z и t неравенства:

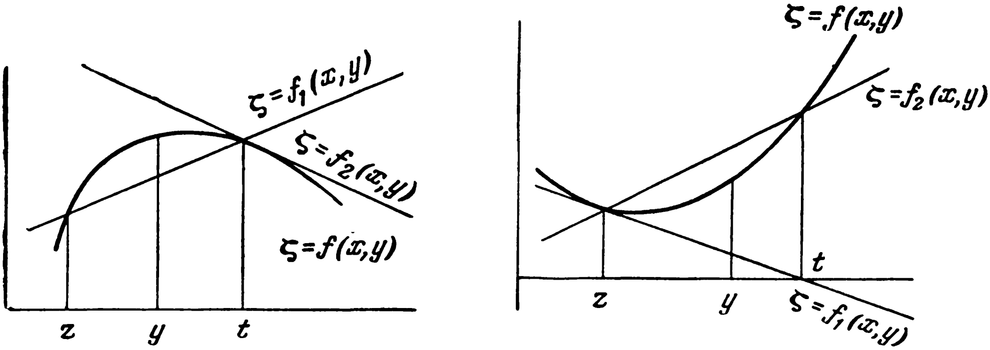
$$f_1(x, y) \leqslant f(x, y) \leqslant f_2(x, y),$$

причем равенство возможно, по самому построению, лишь для самих точек z и t и, значит, при начальном положении секущей плоскости для самой начальной точки $M_0(x_0, y_0)$.

Каждое из обоих дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y) \text{ и } \frac{dy}{dx} = f_2(x, y),$$

разумеется, интегрируется в конечном виде, потому что это линейные уравнения. Поэтому легко провести в действительности интегральную



Фиг. 7

кривую $y = z(x)$ первого уравнения и интегральную кривую второго уравнения $y = t_1(x)$ через начальную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Таким образом, мы имеем всего пять кривых:

$$y = z(x), \; y = y(x), \; y = t(x),$$
$$y = z_1(x) \text{ и } y = t_1(x),$$

причем все они проходят через начальную точку $M_0(x_0, y_0)$; не забудем к тому же, что мы имеем удовлетворенными неравенства:

$$z(x) < y(x) < t(x),$$

потому что с самого начала предполагаем, что интегральная кривая $y = y(x)$ охвачена кривыми $y = z(x)$ и $y = t(x)$ снизу и сверху.

Теперь возникает интересная проблема:

В каком отношении стоят две новые кривые: $y = z_1(x)$ и $y = t_1(x)$ по отношению к трем прежним? Продолжают ли они охватывать интегральную кривую $y = y(x)$ и будет ли охват более тесным, чем охват прежними кривыми $y = z(x)$ и $y = t(x)$?

Ясно, что обе новых кривых $y = z_1(x)$ и $y = t_1(x)$, будучи выведены из прежних обеих кривых $y = z(x)$ и $y = t(x)$, определены только ими. Поэтому назовем пару новых кривых $y = z_1(x)$ и $y = t_1(x)$ выведенной парой, а самые эти кривые—выведенными кривыми.

5. Исследование о положении выведенной пары кривых

Докажем, что выведенная пара кривых:

$$y = z_1(x) \text{ и } y = t_1(x)$$

продолжает охватывать интегральную кривую:

$$y = y(x),$$

и что поэтому имеются неравенства:

$$z_1(x) \leqslant y(x) \leqslant t_1(x).$$

В самом деле, вдоль интегральной кривой $y = y(x)$ мы имеем:

$$f_1[x, y(x)] \leqslant f[x, y(x)] \leqslant f_2[x, y(x)],$$

причем только в самой начальной точке $M_0(x_0, y_0)$ знаки неравенства сменяются знаками равенства.

Фиг. 8

Отсюда, применяя к интегральной кривой $y = y(x)$ теорему С. А. Чаплыгина о дифференциальном неравенстве:

$$\frac{du(x)}{dx} \geqslant f_1[x, y(x)],$$

вытекающем из предыдущего неравенства, так как имеем $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ на интегральной кривой $y = y(x)$, мы видим, что кривая $y = y(x)$ лежит выше кривой $y = z_1(x)$.

Аналогично, вдоль интегральной кривой $y = y(x)$ имеем неравенство:

$$\frac{dy(x)}{dx} \leqslant f_2[x, y(x)].$$

Следовательно, кривая $y = y(x)$ лежит ниже кривой $y = t_1(x)$.

Значит, обе кривые $y = z_1(x)$ и $y = t_1(x)$ охватывают интегральную кривую $y = y(x)$ (фиг. 8).

Но без дальнейших гипотез о начальной паре кривых:

$$y = z(x) \text{ и } y = t(x),$$

относительно которых ничего не было предположено, кроме того, что они охватывают интегральную кривую $y = y(x)$, мы двинуться вперед совершенно не можем. Мало того, можно дать примеры такой охватывающей начальной пары:

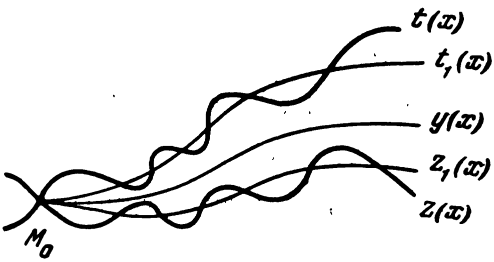
$$y = z(x) \text{ и } y = t(x),$$

которая ничего общего не имеет с новой выведенной охватывающей парой:

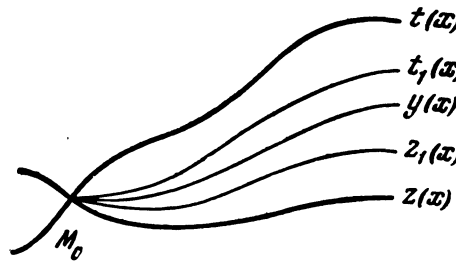
$$y = z_1(x) \text{ и } y = t_1(x).$$

Это в том смысле, что новая кривая $y = t_1(x)$ много раз пересекает прежнюю кривую $y = t(x)$ и, равным образом, кривая $y = z_1(x)$ течет то выше, то ниже кривой $y = z(x)$, несколько раз ее пересекая.

Это обстоятельство иллюстрируется на нижеследующем чертеже (фиг. 9).



Фиг. 9



Фиг. 10

Таким образом здесь могут реально, в действительности, встретиться самые разнообразные положения, поэтому и нельзя вывести отсюда никакого общего предложения.

Однако обстановка резко меняется, если мы возьмем начальную охватывающую пару $y = z(x)$ и $y = t(x)$, не какую-нибудь случайную, но удовлетворяющую теореме С. А. Чаплыгина о дифференциальном неравенстве, т. е.

$$\frac{dz(x)}{dx} \leqslant f[x, z(x)] \text{ и } \frac{dt(x)}{dx} \geqslant f[x, t(x)].$$

В этом случае можно доказать, что выведенная охватывающая пара $y = z_1(x)$ и $y = t_1(x)$ будет течь внутри начальной охватывающей пары (фиг. 10), т. е. охват ею интегральной кривой $y = y(x)$ будет заведомо более тесным, чем охват старою парою. Докажем это важное предложение.

Итак, пусть мы имеем дифференциальное неравенство:

$$\frac{dt(x)}{dx} \geqslant f[x, t(x)].$$

Но вдоль кривой $y = t(x)$ мы ведь имеем строгое равенство:

$$f[x, t(x)] = f_2[x, t(x)],$$

вытекающее из самого построения функции $f_2(x, y)$ (фиг. 7).

Значит, вдоль кривой $y = t(x)$ имеем дифференциальное неравенство:

$$\frac{dt(x)}{dx} \geqslant f_2[x, t(x)].$$

Отсюда и следует, что кривая $y = t(x)$ лежит выше интегральной кривой $y = t_2(x)$ дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = f_2(x, y).$$

Итак, имеем:

$$y(x) \leqslant t_1(x) \leqslant t(x).$$

Аналогично, для функции $f_1(x, y)$, как показывает та же фиг. 7, вдоль кривой $y = z(x)$ мы имеем равенство:

$$f[x, z(x)] = f_1[x, z(x)],$$

и так как вдоль этой кривой, по предположению, мы имеем дифференциальное неравенство:

$$\frac{dz(x)}{dx} \leqslant f[x, z(x)],$$

то, значит, вдоль этой кривой мы имеем дифференциальное неравенство:

$$\frac{dz(x)}{dx} \leqslant f_1[x, z(x)].$$

Отсюда и следует, что интегральная кривая $y = z_1(x)$ уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y)$$

лежит выше кривой $y = z(x)$.

Таким образом, пять рассматриваемых функций связаны неравенствами:

$$z(x) \leqslant z_1(x) \leqslant y(x) \leqslant t_1(x) \leqslant t(x),$$

откуда и явствует, что выведенная пара z_1, t_1 охвачена первоначальной парой z, t.

Докажем, что выведенная пара также удовлетворяет дифференциальным неравенствам С. А. Чаплыгина:

$$\frac{dz_1(x)}{dx} \leqslant f[x, z_1(x)]$$

и

$$\frac{dt_1(x)}{dx} \geqslant f[x, t_1(x)].$$

В самом деле, раз кривые $y = t_1(x)$ и $y = z_1(x)$ текут между кривыми $y = t(x)$ и $y = z(x)$, то вдоль этих кривых имеем неравенства:

$$f_2[x, t_1(x)] > f[x, t_1(x)]$$

и

$$f_1[x, z_1(x)] < f[x, z_1(x)],$$

так как между кривыми $y = z(x)$ и $y = t(x)$ во всем куске плоскости имеем неравенства:

$$f_2(x, y) > f(x, y) \text{ и } f_1(x, y) < f(x, y).$$

А так как имеем

$$\frac{dz_1(x)}{dx} = f_1[x, z_1(x)] \quad \text{и} \quad \frac{dt_1(x)}{dx} = f_2[x, t_1(x)],$$

то отсюда заключаем, что

$$\frac{dz_1(x)}{dx} \leqslant f[x, z_1(x)] \quad \text{и} \quad \frac{dt_1(x)}{dx} \geqslant f[x, t_1(x)],$$

т. е. для выведенной пары функций $z_1(x)$ и $t_1(x)$ соблюдены те же самые неравенства С. А. Чаплыгина, что и для первой пары $z(x)$ и $t(x)$.

6. Безграничная аппроксимация

Итак, если первоначальная пара кривых $z(x)$, $t(x)$ удовлетворяла дифференциальным неравенствам С. А. Чаплыгина, то выведенная пара $z_1(x)$, $t_1(x)$ тоже им удовлетворяет. Отсюда мы получаем безграничную серию выведенных друг из друга пар:

$$[z(x),\ t(x)],\ [z_1(x),\ t_1(x)],\ [z_2(x),\ t_2(x)], \ldots, [z_n(x),\ t_n(x)], \ldots,$$

причем все они удовлетворяют неравенствам С. А. Чаплыгина и, следовательно, охватывают интегральную линию $y = y(x)$.

При этом, в силу предыдущего, всякая пара содержит внутри себя выведенную пару. Следовательно, имеем неравенства:

$$z(x) \leqslant z_1(x) \leqslant z_2(x) \leqslant z_3(x) \leqslant \ldots \leqslant z_n(x) \leqslant z_{n+1}(x) \leqslant \ldots$$

и

$$t(x) \geqslant t_1(x) \geqslant t_2(x) \geqslant t_3(x) \geqslant \ldots \geqslant t_n(x) \geqslant t_{n+1}(x) \geqslant \ldots,$$

причем всегда

$$z_n(x) \leqslant y(x) \leqslant t_n(x).$$

Вопрос теперь ставится так: можно ли утверждать, что пары функций $z_n(x)$, $t_n(x)$ безгранично приближаются друг к другу, когда значок n безгранично возрастает? Иначе говоря, сходятся ли аппроксимирующие кривые $z_n(x)$, $t_n(x)$ к искомой интегральной кривой $y = y(x)$?

С самого же начала сделаем оговорку, что вопрос имеет исключительно теоретический смысл и не имеет ничего общего с практикой, так как если даже аппроксимирующая серия пар $z_n(x)$, $t_n(x)$ чрезвычайно быстро сходится к интегральной кривой $y = y(x)$, но если при этом вычисление уже первых пар на практике непреодолимо громоздко, то вопрос о сходимости аппроксимирующей серии $z_n(x)$, $t_n(x)$ имеет только чисто идеальный смысл. Тем не менее, в теоретическом или идеальном смысле вопрос о сходимости серии аппроксимаций $z_n(x)$, $t_n(x)$ остается и требует своего разрешения.

7. Сила сходимости серии аппроксимаций

Мы сейчас увидим, что быстрота или сила сходимости аппроксимирующей серии совершенно исключительная: такой быстроты сходимости нет ни у одного известного до сих пор метода.

С целью определить эту быстроту сходимости мы постараемся найти взаимоотношение пары:

$$[z_n(x),\ t_n(x)] \text{ и } [z_{n+1}(x),\ t_{n+1}(x)].$$

Для удобства вывода прибегнем к геометрическим рассмотрениям.

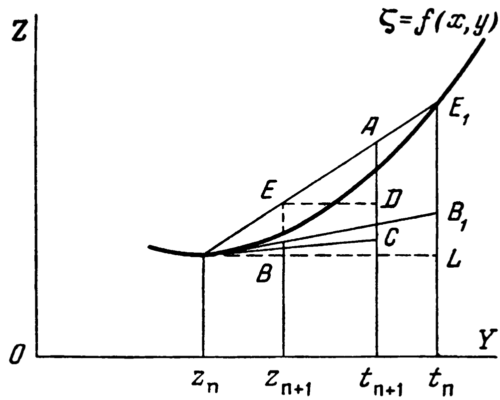
Возьмем одну из двух наших схем (фиг. 7), например первую.

Мы знаем, что пара z_{n+1}, t_{n+1} лежит внутри пары z_n, t_n и что имеем дифференциальные уравнения:

$$\frac{dt_{n+1}}{dx} = \text{линии } t_{n+1}A, \qquad (1)$$

$$\frac{dz_{n-1}}{dx} = \text{линии } z_{n+1}B, \qquad (2)$$

так как, по самому смыслу, t_{n+1} и z_{n+1} удовлетворяют дифференциальным уравнениям, линейным относительно функций t_{n+1} и z_{n+1}, причем, если мы разрежем плоскостью чертежа обе линейчатые поверхности, соответствующие этим двум дифференциальным уравнениям, то мы получим в пересечении хорду и касательную, изображенные на фиг. 11.



Фиг. 11

Вычитая из равенства (1) равенство (2), имеем:

$$\frac{d\,(t_{n+1}-z_{n+1})}{dx} = \text{отрезку } CA. \qquad (2^*)$$

Вычислим этот отрезок CA. Ясно, что имеем

$$CA = CD + DA = BE + DA.$$

Но очевидно, что

$$DA = ED \operatorname{tg} \widehat{DEA}$$

и

$$BE < B_1E_1 = LE_1 - LB_1.$$

Предположим теперь, что в рассматриваемом куске плоскости, заключенном между первоначальной парой кривых $y = t(x)$ и $y = z(x)$, частные производные функции $f(x, y)$ первого и второго порядка по переменному y по абсолютной величине суть ниже известных границ:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < \lambda_1, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right| < \mu.$$

В этих условиях мы получим некоторые полезные в дальнейшем неравенства. Прежде всего имеем:

$$AD = (t_{n+1} - z_{n+1})\, f'_y(x,\ \theta), \qquad (3)$$

где θ есть величина, промежуточная между z_n и t_n.

В самом деле, по теореме Лагранжа о конечном приращении наклон хорды EE_1 такой же, как и касательной к кривой чертежа в некоторой промежуточной между z_n и t_n точке θ. Значит, в силу предыдущих неравенств, имеем:

$$DA \leqslant (t_{n+1} - z_{n+1})\,\lambda.$$

С другой стороны:

$$LE_1 = f(x,\ t_n) - f(x,\ z_n)$$

и

$$LB_1 = (t_n - z_n)\, f'_y(x,\ z_n);$$

следовательно,

$$B_1E_1 = f(x,\ t_n) - f(x,\ z_n) - (t_n - z_n)\, f'_y(x,\ z_n).$$

Но это выражение есть начальное выражение строки Тэйлора, остановленной на втором члене. Значит, написав непосредственно следующий остаточный член, мы получим:

$$B_1E_1 = \frac{(t_n - z_n)^2}{2}\, f''_y(x,\ \theta),$$

где θ есть опять величина, промежуточная между z_n и t_n.

Значит, в силу предположенной границы для $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, имеем:

$$B_1E_1 \leqslant \frac{(t_n - z_n)^2}{2}\,\mu. \tag{4}$$

Следовательно, имеем окончательно:

$$CA \leqslant (t_{n+1} - z_{n+1})\,\lambda + \frac{(t_n - z_n)^2}{2}\,\mu.$$

Но, припоминая связь отрезка CA с производной разности $t_{n+1} - z_{n+1}$, имеем:

$$\frac{d\,(t_{n+1} - z_{n+1})}{dx} \leqslant (t_{n+1} - z_{n+1})\,\lambda + (t_n - z_n)^2\,\frac{\mu}{2}. \tag{5}$$

Неравенство (5) есть дифференциальное неравенство, связывающее разности $t_{n+1} - z_{n+1}$ и $t_n - z_n$.

Обозначим для краткости разность $t_n - z_n$ через Δ_n. Тогда $t_{n+1} - z_{n+1} = \Delta_{n+1}$, и соотношение (5) напишется в виде:

$$\frac{d\Delta_{n+1}}{dx} \leqslant \Delta_{n+1}\,\lambda + \Delta_n^2\,\frac{\mu}{2}. \tag{6}$$

Так как Δ_n и Δ_{n+1} суть функции переменного x, то соотношение (6) есть дифференциальное неравенство для этих функций. Отметим, что Δ_n и Δ_{n+1} равны нулю для $x = x_0$.

Возьмем теперь вместо дифференциального неравенства (6) дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\widetilde{\Delta}_{n+1}}{dx} = \widetilde{\Delta}_{n+1}\cdot\lambda + \widetilde{\Delta}_n^2\,\frac{\mu}{2}, \tag{7}$$

где мы предполагаем, что $\widetilde{\Delta}_n$ есть функция переменного x, превышающая Δ или ей равная:

$$\Delta_n \leqslant \widetilde{\Delta}_n. \tag{8}$$

Докажем, что интеграл $\widetilde{\Delta}_{n+1}$ дифференциального уравнения (7), равный нулю для $x = x_0$, также удовлетворяет неравенству:

$$\Delta_{n+1} \leqslant \widetilde{\Delta}_{n+1}. \tag{9}$$

Чтобы видеть это, достаточно усилить неравенство (6), сопоставив его с (8):

$$\frac{d\Delta_{n+1}}{dx} \leqslant \Delta_{n+1} \cdot \lambda + \widetilde{\Delta}_n^2 \frac{\mu}{2}.$$

Но это неравенство показывает, что вдоль кривой $y = \Delta_{n+1}$ дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = y\lambda + \widetilde{\Delta}_n^2 \frac{\mu}{2}$$

превращается в дифференциальное неравенство

$$\frac{dy}{dx} \leqslant y\lambda + \widetilde{\Delta}_n^2 \frac{\mu}{2}.$$

В силу теоремы С. А. Чаплыгина это обнаруживает, что интегральная кривая $y = \widetilde{\Delta}_{n+1}$ дифференциального уравнения (7) течет выше кривой $y = \Delta_{n+1}$, т. е. что мы имеем соотношение (9):

$$\Delta_{n+1} \leqslant \widetilde{\Delta}_{n+1}.$$

Из сказанного следует, что последовательность разностей аппроксимирующих выведенных друг из друга пар функций:

$$\Delta_0,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3, \ldots, \Delta_n, \ldots$$

можно заменить последовательностью других функций:

$$\widetilde{\Delta}_0,\ \widetilde{\Delta}_1,\ \widetilde{\Delta}_2,\ \widetilde{\Delta}_3, \ldots, \widetilde{\Delta}_n, \ldots,$$

потому что имеем $\Delta_n \leqslant \widetilde{\Delta}_n$, каково бы ни было n, лишь бы только для начальных функций выполнялось неравенство:

$$\Delta_0 \leqslant \widetilde{\Delta}_0.$$

Это обстоятельство позволяет нам легко узнать малость разности Δ_n и, значит, быстроту сходимости аппроксимирующих кривых z_n, t_n к искомой интегральной кривой $y = y(x)$.

Чтобы узнать малость $\widetilde{\Delta}_n$, интегрируем уравнение (7). Имеем:

$$\widetilde{\Delta}_{n+1} = \frac{\mu}{2} e^{\lambda x} \int\limits_{x_0}^{x} e^{-\lambda x}\, \widetilde{\Delta}_n^2\, dx.$$

Внеся $e^{\lambda x}$ под знак интеграции, для чего меняем букву интегрирования, находим:

$$\widetilde{\Delta}_{n+1} = \frac{\mu}{2}\int_{x_0}^{x} e^{\lambda(x-\alpha)}\,\widetilde{\Delta}_n^2\,d\alpha.$$

Пусть нам надо вычислить приближенно интеграл в промежутке длины L, т. е. для

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + L.$$

Тогда

$$x - \alpha \leqslant L,$$

и, значит:

$$\widetilde{\Delta}_{n+1} \leqslant \frac{\mu}{2} e^{\lambda L}\int_{x_0}^{x} \widetilde{\Delta}_n^2\,d\alpha.$$

Обозначим постоянную величину перед знаком интегрирования через H:

$$H = \frac{\mu}{2} e^{\lambda L}, \tag{10}$$

и для удобства перенесем начало координат o в начальную точку M_0, отчего не изменится ни одна из величин, связанных с аппроксимацией. В этом случае получим:

$$\widetilde{\Delta}_{n+1} \leqslant H\int_{0}^{x} \widetilde{\Delta}_n^2\,d\alpha. \tag{11}$$

В качестве начального $\widetilde{\Delta}_0$ берем:

$$\widetilde{\Delta}_0 = 2\lambda^* x, \tag{12}$$

где λ^* есть постоянное число, превосходящее $|f(0,\ 0)|$.

Такой выбор вполне законен, так как это соответствует аппроксимирующим линиям:

$$z_0(x) = -\lambda^* x$$

и

$$t_0(x) = +\lambda^* x,$$

удовлетворяющим дифференциальным неравенствам С. А. Чаплыгина вблизи начала координат в силу указанного выбора постоянной λ^*. Это легко увидеть при подстановке в выражение $\frac{dy}{dx} - f(x,\ y)$ вместо буквы y сначала $-\lambda^* x$, а затем $+\lambda^* x$.

При таком выборе начального Δ_0, обозначив через K постоянное

$$K = \lambda^* \mu e^{\lambda L} = 2\lambda^* H, \tag{13}$$

имеем неравенства:

$$\widetilde{\Delta}_0 < 2\lambda^* x,$$

$$\widetilde{\Delta}_1 < 2\lambda^* K \frac{x^3}{3},$$

$$\widetilde{\Delta}_2 < 2\lambda^* K^3 \frac{x^7}{3^2\cdot 7}.$$

$$\widetilde{\Delta}_3 < 2\lambda^* K^7 \frac{x^{15}}{3^4 \cdot 7^2 \cdot 15},$$
$$\widetilde{\Delta}_4 < 2\lambda^* K^{15} \frac{x^{31}}{3^8 \cdot 7^4 \cdot 15^2 \cdot 31},$$
$$\widetilde{\Delta}_5 < 2\lambda^* K^{31} \frac{x^{63}}{3^{16} \cdot 7^8 \cdot 15^4 \cdot 31^2 \cdot 63},$$
$$\widetilde{\Delta}_6 < 2\lambda K^{63} \frac{x^{127}}{3^{32} \cdot 7^{16} \cdot 15^8 \cdot 31^4 \cdot 63^2 \cdot 127},$$

. . . .

$$\widetilde{\Delta}_n < 2\lambda^* K^{2^{n-1}} \frac{x^{2^{n+1}-1}}{(2^2-1)^{2^{n-1}} (2^3-1)^{2^{n-2}} (2^4-1)^{2^{n-3}} (2^5-1)^{2^{n-4}} (2^6-1)^{2^{n-5}}, \ldots, (2^{n+1}-1}$$

. . . .

Чтобы судить о быстроте стремления к нулю, обратим внимание на величины знаменателей первых приближений:

$$\widetilde{\Delta}_0 < 2\lambda^* x,$$
$$\widetilde{\Delta}_1 < 2\lambda K \frac{x^3}{3},$$
$$\widetilde{\Delta}_2 < 2\lambda^* K^3 \frac{x^7}{63},$$
$$\widetilde{\Delta}_3 < 2\lambda^* K^7 \frac{x^{15}}{59535},$$
$$\widetilde{\Delta}_4 < 2\lambda^* K^{15} \frac{x^{31}}{109\,876\,902\,975},$$

т. е. знаменатель четвертого приближения есть число с 12-ю цифрами.

Чтобы доказать сходимость процесса, нужно установить, что

$$\lim_{n=\infty} \widetilde{\Delta}_n = 0.$$

С этой целью заметим, что равенство (2*):

$$\frac{d\,(t_{n+1} - z_{n+1})}{dx} = \text{отрезку } CA, \tag{2*}$$

дает место следующему неравенству:

$$\frac{d\,(t_{n+1} - z_{n+1})}{dx} \leqslant (t_n - z_n)\,\lambda,$$

так как отрезок CA меньше отрезка LE_1.

Это же неравенство может быть изображено в таком виде:

$$\frac{d\Delta_{n+1}}{dx} \leqslant \lambda \Delta_n,$$

откуда

$$\Delta_{n+1} \leqslant \lambda \int_0^x \Delta_n dx. \tag{14}$$

Принимая $\Delta_0 = 2\lambda^* x$, получаем:

$$\Delta_1 \leqslant 2\lambda^*\lambda \frac{x^2}{1\cdot 2},$$

$$\Delta_3 \leqslant 2\lambda^*\lambda^2 \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$\Delta_4 \leqslant 2\lambda^*\lambda^3 \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_n \leqslant 2\lambda^*\lambda^{n-1} \frac{x^n}{n!}.$$

Отсюда следует, что Δ_n меньше общего члена сходящегося разложения $\lambda e^{\lambda x}$, т. е.

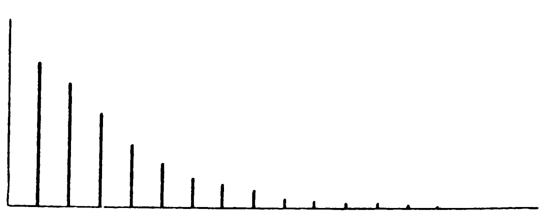
$$\lim_{n=\infty} \Delta_n = 0.$$

8. Замечание В. П. Ветчинкина

Следует различать теоретическую и практическую сходимость рядов. На это обратил внимание еще Пуанкаре. Пусть имеем некоторый числовой ряд:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Изобразим геометрически его члены в виде отрезков, восставленных в точках $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ перпендикулярно к оси Ox.



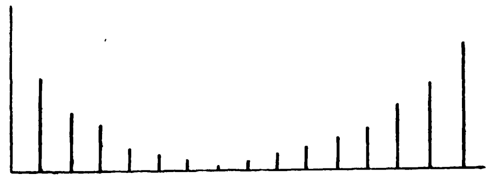
Фиг. 12

Следует заметить, что здесь может быть три случая (фиг. 12—14).

1-й случай (фиг. 12): сходимость теоретическая и практическая.

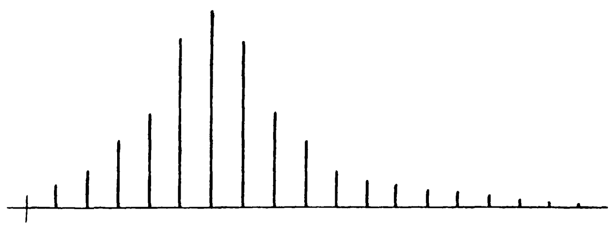
2-й случай (фиг. 13): теоретическая расходимость, но ряд практически сходится до той грани, где члены его перестают убывать.

3-й случай (фиг. 14): теоретическая сходимость, но практическая расходимость ввиду многих начальных чрезвычайно больших членов.



Фиг. 13

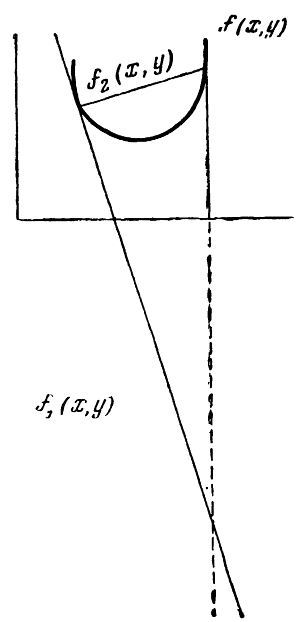
В. П. Ветчинкин обратил внимание на то обстоятельство, что пользование касательными может иногда дать крайне невыгодную линейчатую поверхность, соответствующую третьему случаю, т. е. практической расходимо-



Фиг. 14

сти. Это ясно из чертежа фиг. 15. Здесь линейчатая поверхность $f_1(x, y)$ очень невыгодна ввиду сильного ее опускания и удаленности от данной поверхности $\zeta = f(x, y)$.

Чтобы оценить справедливость этого замечания, достаточно сказать, что и метод аппроксимации корней алгебраических уравнений также подпадает под это замечание. Именно, в методе Ньютона при неудачном выборе касательной можно не только не приблизиться к искомому корню, но и сильно удалиться от него, как показывает фиг. 16.



Фиг. 15

Касательная в нижней точке дает удаление от корня. Касательная в верхней точке дает очень большое приближение к корню.

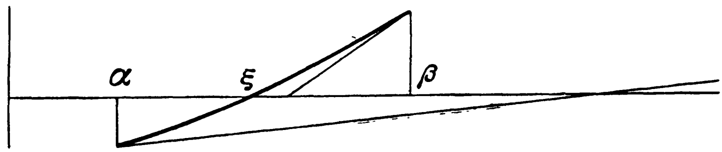
В методе С. А. Чаплыгина в целях практики, по-видимому, точно также нужно знать, какой касательной нужно пользоваться для построения линейчатых поверхностей. Здесь мы ограничимся тем, что укажем на следующие два вероятных практических правила.

Во-первых, по-видимому, следует избегать тех кусков плоскости, где течет критическая кривая:

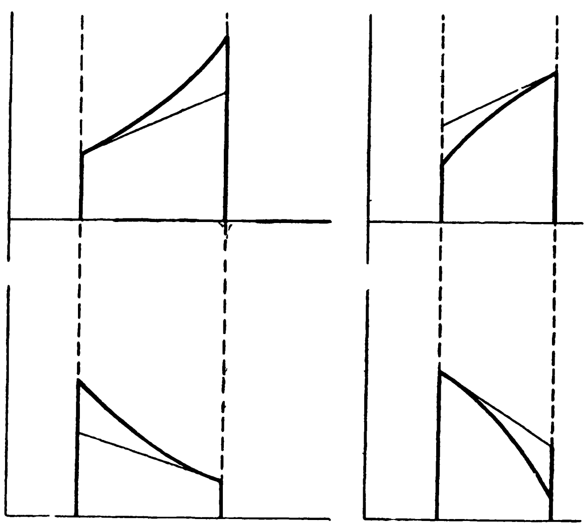
$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0,$$

так как в точках этой кривой касательная параллельна оси Oy.

Во-вторых, как и в методе Ньютона, здесь, по-видимому, следует пользоваться лишь теми касательными, которые дают действительно надежные приближения к поверхности $\zeta = f(x, y)$, как это указано на чертежах фиг. 17.



Фиг. 16



Фиг. 17

Если эти правила целесообразны для практики, то их можно было бы охватить следующей одной формулировкой: *при выпуклости, обращенной книзу, следует пользоваться нижними касательными; при выпуклости, обращенной кверху, следует пользоваться касательными в верхних точках*[1].

---

[1] При выборе касательной согласно правилу С. А. Чаплыгина (§ 4), как мы доказали в § 5, каждая следующая выведенная пара охватывает интегральную линию $y(x)$ *теснее*, чем предыдущая выведенная пара. Но процесс этот, как замечает В. П. Ветчинкин, практически может оказаться громоздким. Только что указанный выбор касательной, вероятно, является более практичным; однако при нем теорема об охвате может не существовать, по крайней мере, на первых стадиях процесса.

9. Общие замечания к методу С. А. Чаплыгина

Метод С. А. Чаплыгина не есть специальный, но имеет характер совершенно общего приема и приводит к ряду ценных проблем.

Из них мы останавливаем внимание на следующей проблеме.

Дано дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Можно ли найти приближенное дифференциальное уравнение:

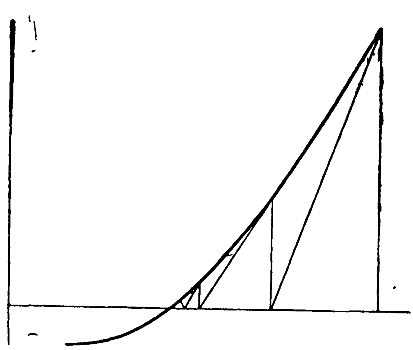
$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y),$$

интегрируемое в конечном виде?

Иначе говоря, для всякой ли заданной функции $f(x, y)$ можно найти функцию $f_1(x, y) < f(x, y)$, достаточно приближенную к ней и такую, чтобы уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y)$$

было интегрируемо в конечном виде? Или, напротив, имеются такие функции $f(x, y)$, что всякая достаточно приближенная функция $f_1(x, y)$ уже не может быть интегрируема в конечном виде?



Фиг. 18

Наконец, еще одно замечание. Метод С. А. Чаплыгина нуждается в проведении хорд лишь в целях контроля приближения. Для приближения же к интегральной кривой собственно нужен лишь метод проведения касательных. Точно так же и для метода Ньютона аппроксимации корней принципиально хорды не нужны, а нужны лишь касательные, как показывает чертеж фиг. 18.

ДОБАВЛЕНИЕ

О МЕТОДЕ С. А. ЧАПЛЫГИНА С АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

1. Общие замечания

Мы рассмотрели метод С. А. Чаплыгина с геометрической точки зрения. Теперь мы имеем в виду встать на аналитическую точку зрения, которая имеет свои преимущества: если геометрия делает рассуждения совершенно ясными, то анализ вносит несравненную простоту.

Мы не станем рассматривать метод С. А. Чаплыгина во всем его полном объеме: этот метод, как указано выше, имеет столь общий характер, что исчерпать его невозможно и отзвуки его должны иметь место в многочисленных областях и применениях. Мы имеем в виду рассмотреть лишь вопрос об односторонних приближениях и то только в том случае, когда $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ не меняет своего знака.

Как мы видели выше, с геометрической точки зрения поверхность:

$$z = f(x, y)$$

в этом случае дает в сечении плоскостями $x = \text{const}$ кривые без точек перегиба в рассматриваемой части плоскости xOy, т. е. кривые, которые обращены все время вниз либо своею выпуклостью (если $f''_{y^2} > 0$), либо своею вогнутостью (если $f''_{y^2} < 0$). И в этом случае для получения искомых приближений интеграла данного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

заменяют функцию $f(x, y)$ двумя другими, именно $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, линейными относительно буквы y, получающимися при замене данной поверхности $z = f(x, y)$ двумя линейчатыми поверхностями, образующимися от проведения надлежащим образом хорд и касательных к вышеупомянутым кривым. Обе эти линейчатые поверхности были введены С. А. Чаплыгиным для того, чтобы получить (путем немедленного интегрирования двух линейных дифференциальных уравнений) одновременно оба приближения искомого интеграла, — снизу и сверху; это одновременное знание обоих приближений интегральной кривой, снизу и сверху, являлось желательным лишь для того, чтобы оценить, насколько мы приблизились к искомому интегралу. По существу же, конечно, для целей вычисления совершенно достаточно одного приближения с какой-нибудь стороны, так как другое вводится лишь ввиду контроля за порядком близости.

В настоящем добавлении мы рассмотрим вопрос с аналитической точки зрения и, следуя указаниям и ходу работ С. А. Чаплыгина, покажем, что и в целях контроля нет необходимости в знании другого приближения, так как оценка достигнутой близости может быть получена при знании приближения лишь с одной стороны. Нужно лишь, чтобы это приближение удовлетворяло теореме С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах. В этих условиях мы покажем, что нет необходимости в проведении хорд и что все дело — приближение и контроль — может быть осуществлено лишь проведением касательных.

2. Односторонние приближения

Пусть дано дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y), \tag{1}$$

и пусть интересующий нас интеграл $y(x)$ удовлетворяет условию:

$$y(0)=0.$$

Полагаем:

$$y=\sigma+\rho. \tag{2}$$

Подставляя y в данное дифференциальное уравнение, находим:

$$\frac{d\sigma}{dx}+\frac{d\rho}{dx}=f(x,\ \sigma+\rho). \tag{3}$$

Развертывая правый член в конечную строку Тэйлора, с остановкой ее на третьем слагаемом, получаем:

$$\frac{d\rho}{dx}=-\left[\frac{d\sigma}{dx}-f(x,\ \sigma)\right]+\rho f'_y(x,\ \sigma)+\frac{\rho^2}{2}f''_{y^2}(x,\ \sigma+\theta\rho). \tag{3}$$

Обращаем внимание на то, что равенство (3) есть совершенно точное, так как введено количество θ, промежуточное между 0 и 1, т. е. $0<\theta<1$. Чтобы способ написания равенства (3) не казался странным, спешим заметить, что σ рассматривается как приближение к искомому интегралу $y(x)$ и, значит, величина ρ есть остаток или погрешность в принятии вместо $y(x)$ приближения $\sigma(x)$.

Важно заметить, что мы рассматриваем приближение σ удовлетворяющим теореме о дифференциальных неравенствах С. А. Чаплыгина. Значит, функция $\sigma(x)$ не какая-нибудь взятая случайно и, может быть, даже очень близкая к искомому интегралу $y(x)$, но такая, что для нее все время по всей ее длине справедливо одно из двух неравенств:

$$\frac{d\sigma}{dx}-f(x,\ \sigma)\leqslant 0 \tag{4*}$$

или

$$\frac{d\sigma}{dx}-f(x,\ \sigma)\geqslant 0. \tag{4**}$$

Если для σ будет справедливо неравенство (4*), то, в силу теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах, σ есть приближение снизу, и, значит, мы будем иметь для остатка ρ неравенство:

$$\rho \geqslant 0. \tag{5*}$$

Аналогично, если σ удовлетворяет неравенству (4**), имеем:

$$\rho \leqslant 0. \tag{5**}$$

Для оценки величины остатка ρ его надо разбить на два слагаемых:

$$\rho = \eta + \rho_1. \tag{6}$$

Подставляя это выражение для ρ в равенство (3), находим:

$$\frac{d\rho_1}{dx} = \left\{-\left[\frac{d\sigma}{dx} - f(x, \sigma)\right] + \eta f'_y(x, \sigma) - \frac{d\eta}{dx}\right\} + \rho_1 f'_y(x, \sigma) + \\ + \frac{\rho^2}{2} f''_{y^2}(x, \sigma + \theta\rho). \tag{7}$$

Чтобы сделать дальнейшее ясным, мы с самого начала заметим, что рассматриваем количество ρ_1 как новый остаток, а сумму $\sigma + \eta$ как новое приближение; это возможно, так как равенства (2) и (6) дают:

$$y = (\sigma + \eta) + \rho_1. \tag{8}$$

В соответствии со сказанным обозначим сумму $\sigma + \eta$ через σ_1:

$$\sigma_1 = \sigma + \eta, \tag{9}$$

и, значит, имеем:

$$y = \sigma_1 + \rho_1. \tag{10}$$

До сих пор величина η у нас была неопределенной и, таким образом, находилась в нашем распоряжении. Согласно теории С. А. Чаплыгина, выберем η так, чтобы величина в фигурных скобках $\{\ldots\}$ равенства (7) была равна нулю.

Значит, мы выбираем η так, чтобы оказалось удовлетворенным линейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\eta}{dx} = \eta f'_y(x, \sigma) + (-1)\left[\frac{d\sigma}{dx} - f(x, \sigma)\right], \tag{11}$$

причем, для полного определения величины η, потребуем равенство:

$$\eta(0) = 0.$$

При таком выборе величины η_1 равенство (7) превращается в равенство:

$$\frac{d\rho_1}{dx} = \rho_1 f'_y(x, \sigma) + \frac{\rho^2}{2} f''_{y^2}(x, \sigma + \theta\rho), \tag{12}$$

которое мы рассматриваем как дифференциальное уравнение, линейное относительно нового остатка ρ_1. Так как $y(0) = 0$, то вообще все величины: σ, ρ, η и ρ_1 мы можем предполагать уничтожающимися для $x = 0$. Это соображение дает нам полное определение величин η и ρ_1 из дифференциальных линейных уравнений (11) и (12) посредством формул:

$$\eta(x) = e^{\int\limits_0^x f'_y(\alpha,\,\sigma)\,d\alpha} \int\limits_0^x e^{-\int\limits_0^t f'_y(\alpha,\,\sigma)\,d\alpha} (-1)\left[\frac{d\sigma}{dt} - f(t,\ \sigma)\right] dt \tag{13}$$

и

$$\rho_1(x) = e^{\int\limits_0^x f'_y(\alpha,\,\sigma)\,d\alpha} \int\limits_0^x e^{-\int\limits_0^t f'_y(\alpha,\,\sigma)\,d\alpha} \frac{\rho^2}{2} f''_y(t,\ \sigma + \theta\rho)\,dt. \tag{14}$$

Формулы (13) и (14) приводят к ряду следствий, важных для наших рассмотрений.

Прежде всего, равенство (13) показывает, что величина η имеет знак, противоположный знаку $\frac{d\sigma}{dt} - f(t,\ \sigma)$. В самом деле, показательные множители всегда положительны, а величина σ заранее нами выбиралась удовлетворяющей дифференциальным неравенствам С. А. Чаплыгина, т. е. так, чтобы разность $\frac{d\sigma}{dt} - f(t,\ \sigma)$ всегда сохраняла один и тот же знак. Отсюда следует, что если σ было приближением снизу, то величина η есть положительная, а если σ было приближением сверху, то величина η — отрицательная.

В этих условиях важно установить, какой природы будет новое приближение $\sigma_1 = \sigma + \eta$.

С этой целью установим следующее предложение.

Лемма. *Новое приближение $\sigma_1 = \sigma + \eta$ удовлетворяет дифференциальному неравенству С. А. Чаплыгина. При этом, если $f''_{y^2} > 0$, новое приближение будет нижним, а если $f''_{y^2} < 0$, то оно будет верхним по отношению к искомому интегралу $y(x)$.*

Для доказательства вычисляем $\frac{d\sigma_1}{dx}$. Имеем:

$$\frac{d\sigma_1}{dx} = \frac{d\sigma}{dx} + \frac{d\eta}{dx}.$$

Пользуясь дифференциальным уравнением (11), получаем:

$$\frac{d\sigma_1}{dx} = \frac{d\sigma}{dx} + \eta f_y(x,\ \sigma) + (-1)\left[\frac{d\sigma}{dx} - f(x,\ \sigma)\right],$$

и, значит:

$$\frac{d\sigma_1}{dx} = f(x,\ \sigma) + \eta f'_y(x,\ \sigma).$$

С другой стороны, вычислим $f(x, \sigma_1)$. Имеем, пользуясь конечной строкой Тэйлора с тремя слагаемыми:

$$f(x, \sigma_1) = f(x, \sigma + \eta) = f(x, \sigma) + \eta f'_y(x, \sigma) + \frac{\eta^2}{2} f''_{y^2}(x, \sigma + \vartheta\eta),$$

где ϑ есть количество, промежуточное между 0 и 1, т. е. $0 < \vartheta < 1$.

Вычитая из предыдущего равенства, находим:

$$\frac{d\sigma_1}{dx} - f(x, \sigma_1) = -\frac{\eta^2}{2} f''_{y^2}(x, \sigma + \vartheta\eta). \tag{15}$$

Отсюда заключаем, что, если $f''_{y^2} > 0$, то $\frac{d\sigma_1}{dx} - f(x, \sigma_1) < 0$, и если $f'_{y^2} < 0$, то $\frac{d\sigma_1}{dx} - f(x, \sigma_1) > 0$, что и доказывает предложение.

Установленное предложение чрезвычайно важно, так как показывает что новое приближение $\sigma_1 = \sigma + \eta$ не какое-нибудь случайно отысканное, но непременно удовлетворяет дифференциальному неравенству С. А. Чаплыгина. В этих условиях мы можем отправиться от этого найденного приближения σ_1 точно так же, как отправлялись от первоначального приближения σ, и таким образом получить бесконечную последовательность все новых и новых приближений:

$$\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \ldots, \sigma_n \ldots,$$

и, соответственно с этим, отвечающие им остатки:

$$\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \ldots, \rho_n, \ldots$$

В силу предыдущей леммы каждое из этих приближений σ_n удовлетворяет дифференциальному неравенству С. А. Чаплыгина, и, значит, каждый остаток ρ_n сохраняет постоянно один и тот же самый знак при изменяющемся x.

Но этого мало, — важно, чтобы все приближения: $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$, были одной и той же природы, т. е. были по одну и ту же самую сторону искомого интеграла $y(x)$, и, значит, все остатки: $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots$, были одного и того же самого знака. Этого легко достигнуть путем простого выбора первоначального приближения σ, как обнаруживает предложение:

Теорема. *Если $f''_{y^2} > 0$ и если первоначальное приближение σ было нижним, то и все дальнейшие приближения: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n, \ldots$, будут тоже нижними, а соответствующие остатки: $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$, будут все положительными. Если $f''_{y^2} < 0$ и первоначальное приближение σ было верхним, то и все дальнейшие приближения: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n, \ldots$, будут тоже верхними, а соответствующие остатки: $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$, будут все отрицательными.*

Это предложение является следствием доказанной выше леммы и указанного замечания о первоначальном приближении σ. В самом деле, в силу предыдущей леммы, каково бы ни было приближение σ, даже если оно не будет удовлетворять дифференциальным неравенствам, следующее приближение σ_1, и, значит, все дальнейшие приближения: $\sigma_2, \sigma_3, \ldots$, лежат по одну сторону интеграла.

3. Сходимость приближений

Чтобы установить, что приближения: $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ сходятся к искомому интегралу $y(x)$, нужно доказать, что остатки

$$\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \ldots$$

стремятся к нулю, когда число n стремится к бесконечности.

К сожалению, исследование остатков по формуле (14) представляет существенную трудность, которую мы не будем преодолевать в этой работе. Поэтому, для того чтобы доказать сходимость приближений, мы предпримем косвенный путь, который, являясь совершенно строгим, не даст нам, однако, знания малости остатка ρ_n, когда n стремится к бесконечности.

С этой целью возьмем формулу (13), куда вместо σ подставим σ_{n+1}, и выражение $\frac{d\sigma_{n+1}}{dx} - f(x, \sigma_{n+1})$, стоящее в квадратной скобке, оценим по формуле (15), где заменим σ через σ_n. Тогда получим:

$$\eta_{n+1}(x) = e^{\int\limits_0^x f'_y(\alpha, \sigma_{n+1})\, d\alpha} \int\limits_0^x e^{-\int\limits_0^x f'_y(\alpha, \sigma_{n+1})\, d\alpha} \frac{\eta_n^2}{2} f''_{y^2}(t, \sigma_n + \vartheta\eta_n)\, dt\,. \tag{16}$$

Это выражение для $\eta_{n+1}(x)$ показывает, что η_{n+1} всегда имеет тот же самый знак, что и f''_{y^2}.

Ограничимся рассмотрением случая, когда $f''_{y^2} > 0$. Противоположный случай, когда f''_{y^2} отрицательна, подчиняется тем же самым рассуждениям, в которых не приходится ничего изменять.

Итак, когда $f''_{y^2} > 0$, всякое из количеств η_n положительно. С другой стороны, имеем:

$$y = \sigma + \eta + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots + \eta_n + \rho_{n+1}\,,$$

где остаток ρ_{n+1} есть существенно положительная величина. Следовательно,

$$\sigma + \eta + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots + \eta_n < y\,.$$

Отсюда следует, что ряд с положительными членами $\eta + \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n + \ldots$ есть сходящийся и, значит, его общий член η_n стремится к нулю:

$$\lim_{n=\infty} \eta_n = 0\,.$$

Так как η_n зависит от x, важно доказать, что η_n равномерно стремится к нулю с возрастанием n.

Чтобы доказать это, обратимся к формуле (16), которую напишем в виде:

$$\eta_{n+1}(x)=\int_0^x e^{\int_t^x f'_y(\alpha,\,\sigma_{n+1})\,d\alpha}\,\eta_n^2(t)\frac{f''_{y^2}(t,\,\sigma_n+\vartheta\eta_n)}{2}\,dt\,. \tag{16*}$$

В этой формуле под знаком интеграла фигурируют лишь ограниченные количества, абсолютная величина которых не превосходит некоторого постоянного числа, не зависящего от n. Действительно, имеем $\sigma<\sigma_n<\sigma_n+\eta_n<y$. Значит, все подинтегральное выражение не превосходит некоторого постоянного числа K, не зависящего от n. Поэтому

$$\frac{d\eta_{n+1}}{dx}<K\,,$$

и так как $\lim\limits_{n=\infty}\eta_n=0$, то отсюда следует, что η_n равномерно стремится к искомому интегралу $y(x)$ и, значит, остаток ρ_n равномерно стремится к нулю.

В самом деле, возьмем формулу (15), где вместо σ_n напишем σ_{n+1}. Имеем:

$$\frac{d\sigma_n}{dx}-f(x,\ \sigma_n)=-\frac{\eta_{n-1}^2}{2}f''_{y^2}(x,\ \sigma_{n-1}+\vartheta\eta_{n-1})\,.$$

Интегрируя это равенство почленно, находим:

$$\sigma_n(x)-\int_0^x f[\alpha,\ \sigma_n(\alpha)]\,d\alpha=-\int_0^x\eta_{n-1}^2\,\frac{f''_{y^2}(\alpha,\,\sigma_{n-1}+\vartheta\eta_{n-1})}{2}\,d\alpha\,. \tag{17}$$

Теперь η_{n-1} равномерно стремится к нулю и, значит, функция $\sigma_n(x)$, будучи суммою $n+1$ членов равномерно сходящегося ряда непрерывных функций:

$$\sigma+\eta+\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n+\ldots,$$

равномерно стремится к некоторой предельной функции $\tau(x)$, т. е.

$$\lim_{n=\infty}\sigma_n(x)=\tau(x)\,. \tag{18}$$

Поэтому в равенстве (17) мы имеем право перейти к пределу при $n=\infty$. Делая это, находим:

$$\tau(x)-\int_0^x f[\alpha,\ \tau(\alpha)]\,d\alpha=0\,.$$

Отсюда, дифференцируя по x, получаем:

$$\frac{d\tau}{dx}=f(x,\ \tau)\,. \tag{19}$$

Так как $\sigma_n(0)=0$, то и $\tau(0)=0$. Значит, $\tau(x)$ есть интеграл дифференциального уравнения, который уничтожается при $x=0$. С другой стороны, $y(x)$ есть тоже интеграл дифференциального уравнения и $y(0)=0$. А так как двух различных таких интегралов быть не может, то $\tau(x)$ необходимо должно быть тождественным с искомым интегралом $y(x)$, т. е. имеем:

$$\tau(x) = y(x).$$

Итак, мы доказали, что

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n(x) = y(x),$$

причем сходимость приближений $\sigma_n(x)$ есть равномерная, откуда и следует, что остаток $\rho_n = y - \sigma_n$ равномерно стремится к нулю с возрастанием значка n.

Этот факт затруднительно установить, если основываться на одной лишь формуле (14), дающей выражение этого остатка через предыдущий.

4. Быстрота сходимости приближений

Тем не менее указанная формула (14) годится для того, чтобы доказать, что сходимость приближений: $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$, к искомому $y(x)$ или, что то же самое, сходимость ряда:

$$y(x) = \sigma + \eta + \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n + \ldots$$

есть сходимость чрезвычайно сильная: она много сильнее, чем у какого-либо из известных разложений в ряды.

Чтобы видеть это, напишем формулу (14) в следующем виде:

$$\rho_{n+1}(x) = e^{\int_0^x f'_y(\alpha,\, \sigma_n)\, d\alpha} \int_0^x e^{-\int_t^x f'_y(\alpha,\, \sigma_n)\, d\alpha} \rho_n^2 \, \frac{f''_{y^2}(t, \sigma + \theta\rho_n)}{2}\, dt \tag{14*}$$

и сделаем грубую ее оценку. Для простоты, чтобы не иметь дела со знаками, считаем, что $f''_{y^2} > 0$; если бы f''_{y^2} была отрицательной, нужно было бы пользоваться рассмотрением абсолютных величин. Так как величины f'_y и f''_{y^2} ограниченные, то мы имеем право написать:

$$\rho_{n+1}(x) < K \int_0^x \rho_n^2(t)\, dt,$$

где K есть постоянное число, ни от чего не зависящее.

Допустим, что первоначальное приближение $\sigma(x)$ выбрано таким, что для первого остатка $\rho(x)$ имеется неравенство:

$$\rho(x) < \varepsilon,$$

где ε есть некоторое постоянное число, пока неопределенное.

В этих условиях мы имеем очевидные неравенства:

$$\rho < \varepsilon,$$
$$\rho_1 < K\varepsilon^2 x,$$
$$\rho_2 < K^3\varepsilon^4 \frac{x^3}{3},$$
$$\rho_3 < K^7\varepsilon^8 \frac{x^7}{3^2\cdot 7},$$
$$\rho_4 < K^{15}\varepsilon^{16} \frac{x^{15}}{3^4\cdot 7^2\cdot 15},$$

. . . .

$$\rho_n < K^{2^n-1}\varepsilon^{2^n} \frac{x^{2^n-1}}{(2^2-1)^{2^{n-2}}(2^3-1)^{2^{n-3}}(2^4-1)^{2^{n-4}}\dots(2^n-1)}.$$

Сделаем более компактную оценку для ρ_n. Ясно, что знаменатель больше, чем

$$2^{2^{n-2}}\cdot 2^{2\cdot 2^{n-3}}\cdot 2^{3\cdot 2^{n-4}}\cdot 2^{4\cdot 2^{n-5}}\dots 2^{n-1},$$

т. е. больше, чем

$$2^{1\cdot 2^{n-2}+2\cdot 2^{n-3}+3\cdot 2^{n-4}+4\cdot 2^{n-5}+\dots+(n-1)\cdot 2^0}.$$

что можно написать в виде:

$$2^{2^{n-1}\left(1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\dots+\frac{n-1}{2^{n-2}}\right)}.$$

Выражение в скобках можно рассматривать как сумму:

$$1+2x+3x^2+4x^3+\dots+(n-1)x^{n-2},$$

при $x=\frac{1}{2}$. Рассматривая эту сумму как производную многочлена:

$$1+x+x^2+\dots+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1}$$

и вычислив фактически эту производную, положив в ней $x=\frac{1}{2}$, получим для знаменателя величину:

$$2^{2^n-(n+1)}.$$

Принимая во внимание, что при оценке знаменателя мы начали с того, что заменили числа 3, 7, 15, 31, 63 меньшими числами 2, 4, 8, 16, 32, . . ., видим, что можно в предыдущей оценке знаменателя отбросить $-(n+1)$ и, следовательно, просто оценить знаменатель, как 2^{2^n}.

При такой оценке знаменателя будем иметь:

$$\rho_n < K_1^{2^n-1}\varepsilon^{2^n}x^{2^n-1}\frac{1}{2^{2^n}},$$

что можно написать в виде:

$$\rho_n < \frac{1}{K_1 x}\left(\frac{K_1 x\varepsilon}{2}\right)^{2^n}.$$

Здесь число K_1 есть постоянное положительное, не зависящее от n.

Пусть теперь вычисление интеграла $y(x)$ производится на отрезке $(0, L)$, т. е. предполагаем, что независимое переменное x остается в границах:

$$o \leqslant x \leqslant L.$$

Предыдущее неравенство в этих условиях дает:

$$\rho_n(x) < \frac{1}{K_1 L}\left(\frac{K_1 L \varepsilon}{2}\right)^{2^n}. \tag{20}$$

До сих пор величина ε оставалась у нас неопределенной. Выберем ее так, чтобы иметь:

$$K_1 L \varepsilon < 1. \tag{21}$$

В этих условиях между границами $o \leqslant x \leqslant L$ будем просто иметь[1]:

$$\rho_n(x) < \frac{1}{2^{2^n}}.$$

Следовательно, остаток $\rho_n(x)$ стремится к нулю сильнее, чем член любой геометрической прогрессии или даже чем факториальный член $\frac{1}{n!}$.

Итак, достаточно довести остаток ρ до надлежаще малой величины ε, как дальнейшие остатки будут стремиться к нулю скорее, чем общий член большинства известных сходящихся рядов.

Следовательно, при надлежащем выборе начального приближения последовательные приближения С. А. Чаплыгина дают результаты, чрезвычайно быстро стремящиеся к искомому интегралу $y(x)$.

Отметим, что та же самая формула (20) дает расходящийся результат, если ε выбрать так, чтобы

$$\frac{K_1 L \varepsilon}{2} > 1.$$

И так как остаток ρ_n все-таки должен стремиться к нулю, как было установлено выше, то это указывает на то, что взятая оценка остатка ρ_n по формуле:

$$\rho_{n+1} < K \int_0^x \rho_n^2 d\alpha.$$

была весьма грубой.

5. О более тонкой оценке остатка и о задаче интегрирования на практике

Подведем итог полученному.

Мы имели заданным дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{I}$$

и искали интеграл $y(x)$, удовлетворяющий условию $y(0) = 0$.

[1] Мы предполагаем, что $K_1 L > 1$. Если бы $K_1 L \leqslant 1$, то мы выбрали бы ε просто равным 1.

В качестве исходного приближения σ мы отправились от произвольной функции $\sigma(x)$, удовлетворяющей тому же самому условию $\sigma(0)=0$. Искомый интеграл $y(x)$ оказался разложенным в сходящийся ряд:

$$y = \sigma + \eta + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \ldots + \eta_n + \ldots, \tag{II}$$

в котором начальным членом σ служит взятое начальное приближение $\sigma(x)$, следующий член η определяется при помощи линейного дифференциального уравнения:

$$\frac{d\eta}{dx} = \eta f'_y(x, \sigma) + (-1)\left[\frac{d\sigma}{dx} - f(x, \sigma)\right],$$

при начальном условии $\eta(0)=0$, и общий член η_n определяется при помощи линейного же дифференциального уравнения, данного С. А. Чаплыгиным:

$$\frac{d\eta_n}{dx} = \eta_n f'_y(x, \sigma_n) + (-1)\left[\frac{d\sigma_n}{dx} - f(x, \sigma_n)\right]. \tag{III}$$

В этом линейном уравнении η_n определяется начальным условием $\eta_n(0)=0$ и буква σ_n обозначает сумму найденных выше членов ряда (II), т. е.

$$\sigma_n = \sigma + \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{n-1}.$$

Следовательно, в методе С. А. Чаплыгина интегрирование заданного уравнения (I) приводится к интегрированию цепочки линейных дифференциальных уравнений.

Мы видели, что все члены ряда (II), начиная с третьего члена η_1, суть все одного и того же самого знака, именно все члены $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ положительны, если $f''_{y^2} > 0$, и отрицательны, если $f''_{y^2} < 0$.

Далее мы видели, что ряд (II) всегда равномерно (и абсолютно) сходящийся и что сходимость его чрезвычайно быстрая, превышающая быстроту сходимости обычных разложений в бесконечные ряды, так как для общего члена η_n мы имеем неравенство:

$$|\eta_n(x)| < \frac{1}{2^{2^n}}, \tag{22}$$

начиная с достаточно больших значков n.

Чтобы видеть справедливость неравенства (22) во всех случаях, достаточно напомнить, что в силу равномерной сходимости разложения (II) мы будем иметь остатки ρ_m подчиненными неравенству:

$$|\rho_m| < \varepsilon,$$

где ε обозначает произвольно малое выбранное число и где значок m достаточно велик. Но тогда, в силу сделанных рассуждений, общий остаток ρ_n будет меньше, чем $\frac{1}{2^{2^n}}$, начиная с некоторого значка n. А так как все члены η_n имеют тот же самый знак, что и остаток, то, значит, $|\eta_n| < |\rho_n|$. Это и доказывает неравенство (22).

При определении малости остатка ρ_n мы пользовались грубой формулой:

$$|\rho_{n+1}| < K\int\limits_0^x \rho_n^2\,d\alpha\,,$$

где K обозначает постоянное число, не зависящее от n.

Однако, несмотря на эту грубую оценку, мы достигли предельного определения малости остатка ρ_n в том смысле, что эта малость остатка ρ_n уже не может быть усилена никакими дальнейшими исследованиями.

В самом деле, рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = y^2\,.$$

В этом случае $f'_y = 2y$ и $f''_{y^2} = 2$. Значит, в этом случае точное выражение остатка ρ_{n+1} по формуле (14) даст:

$$\rho_{n+1}(x) = \int\limits_0^x e^{\int\limits_t^x 2\sigma_n(\alpha)\,d\alpha}\rho_n^2(\alpha)\,d\alpha\,.$$

Так как в рассматриваемом случае искомый интеграл $y(x)$ тождественно равен нулю, $y(x)\equiv 0$, то всякое приближение σ_n отрицательно, так как должны иметь $\sigma_n(x) < y(x)$.

И так как $\sigma_n(x)$ должно равномерно стремиться к $y(x)$, т. е. к нулю, то ясно, что, начиная с некоторого члена, мы должны иметь:

$$\rho_{n+1} > \frac{1}{2}\int\limits_0^x \rho_n^2(\alpha)\,d\alpha\,,$$

так как показательный множитель

$$\int\limits_0^x 2\sigma_n d\alpha$$

стремится к единице с увеличением n.

В этих условиях очевидно a priori, что порядок малости $\frac{1}{2^{2^n}}$ не может быть усилен, так как если ρ_n достигло $\frac{1}{2^{2^n}}$, то ρ_{n+1} должно быть больше квадрата этой величины, т. е. больше $\frac{1}{2^{2^{n+1}}}$, а это доказывает, что достигнутая малость для ρ_n сохраняется в следующем и, значит, во всех дальнейших членах. Впрочем, легко прямым вычислением найти величину остатка ρ_n в рассматриваемом случае, которая окажется:

$$\rho_n > C\,\frac{1}{2^{2^n}}\,,$$

где C есть постоянная величина, бо́льшая нуля, от n не зависящая.

Таким образом, найденную малость остатка ρ_n нельзя усилить.

Итак, теоретический вопрос о быстроте сходимости разложения (II) С. А. Чаплыгина разрешен до конца, но это разрешение есть лишь начало следующей очень важной в практическом отношении задачи, представляющей гораздо большие трудности:

Сколько нужно взять членов разложения (II) С. А. Чаплыгина, чтобы получить практически достаточную точность, например, до 5%?

Задача эта требует более тонкого обследования остатка ρ_{n+1} по формуле (14*).

О МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ АКАДЕМИКА С. А. ЧАПЛЫГИНА *

В 1919 г. С. А. Чаплыгин опубликовал свои «Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений» в виде краткой монографии, всего на восемнадцати страницах. В ней знаменитым автором были сжатым образом даны принципы, лежащие в основе его замечательного метода. Чрезвычайная гибкость этого метода и его легкая приложимость к самым различным задачам естественно привлекли внимание и вызвали появление изысканий в этом направлении.

Возникает настоятельнейшая необходимость дать идеям С. А. Чаплыгина о приближенном интегрировании, представляющем истинное наше отечественное достояние, углубленное синтетическое изложение.

Ввиду широты и существенной трудности этого дела настоящий доклад, конечно, не может явиться попыткой такого изложения: он представляет собой не более как лишь отчет о состоянии теории С. А. Чаплыгина в настоящий момент.

Прежде чем приступить к существу дела, должен выразить глубокую благодарность Ольге Сергеевне Чаплыгиной, открывшей для меня бесценные ресурсы архива своего отца, по которым я мог сравнить настоящее состояние теории С. А. Чаплыгина с тем, что в действительности им задумывалось и осуществление чего выпадает на долю его преемников.

I. Дифференциальное уравнение первого порядка

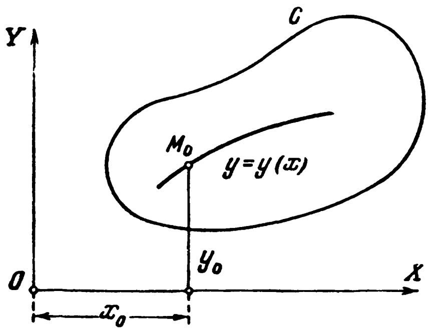
1. Постановка проблемы. Сам С. А. Чаплыгин детальным образом развил метод на уравнениях первого порядка [1], [2] и доказал со всей строгостью, что применение его к ним никогда не может встретить никаких ограничений. Пусть дано дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, где функция f предполагается непрерывной по совокупности аргументов

---

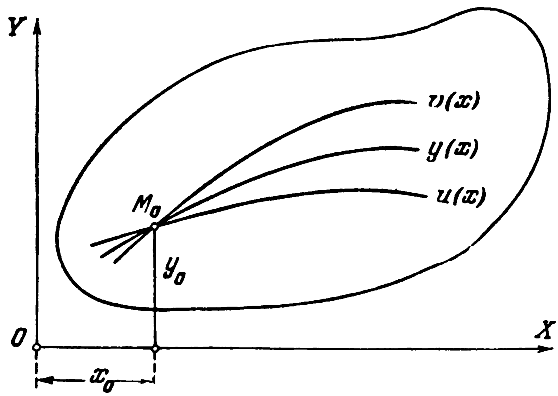
* Успехи математич. наук, 6, вып. 6. Настоящая статья представляет собой изложение доклада, прочитанного на научно-техническом совещании по автоматизированному электроприводу в Институте автоматики и телемеханики АН СССР 12 декабря 1944 г.

Статья была опубликована после смерти Н. Н. Лузина В. К. Гольцманом и П. И. Кузнецовым.

x и y в некоторой части плоскости XOY и, кроме того, удовлетворяющей в этой части плоскости какому-нибудь условию, обеспечивающему единственность интеграла. Например, мы можем просто предполагать, что функция f, непрерывная внутри замкнутой кривой C, имеет там всюду конечную частную производную $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$. Известно, что в этих условиях через всякую точку $M_0(x_0, y_0)$, лежащую внутри контура C, проходит заведомо единственная интегральная кривая $y = y(x)$ (рис. 1). Вопрос те-



Фиг. 1



Фиг. 2

перь ставится так: в целях практики фактически отыскать другую кривую, проходящую через эту же точку M_0 и наверное столь близкую к неизвестной интегральной кривой $y = y(x)$, что практически мы могли бы брать вместо ординат интегральной кривой $y = y(x)$ ординаты этой приближенной кривой.

2. Метод С. А. Чаплыгина. Принцип метода состоит в том, что в данной части плоскости XOY (рис. 2) мы проводим через точку $M_0(x_0, y_0)$ две кривые $y = u(x)$ и $y = v(x)$ так, чтобы неизвестная нам интегральная кривая $y = y(x)$ охватывалась ими с обеих сторон, т. е. так, чтобы заведомо имелось неравенство

$$u(x) < y(x) < v(x).$$

Ясно, что если удается сжать кусок плоскости между кривыми $y = u(x)$ и $y = v(x)$ до желаемой узости, то приближенное знание неизвестной интегральной кривой $y = y(x)$ является обеспеченным.

Фактическое выполнение этого метода требует предварительного разрешения двух проблем:

а) Каков критерий для того, чтобы какая-нибудь рассматриваемая кривая, выходящая из точки M_0, лежала вся заведомо выше или заведомо ниже неизвестной нам интегральной кривой?

б) Каков прием сжимания уже найденной нами пары кривых $y = u(x)$

и $y = v(x)$, между которыми заведомо лежит искомая интегральная кривая $y = y(x)$?

3. Дифференциальное неравенство как критерий положения кривой. Для решения первой проблемы С. А. Чаплыгин дал весьма замечательную теорему чрезвычайной простоты.

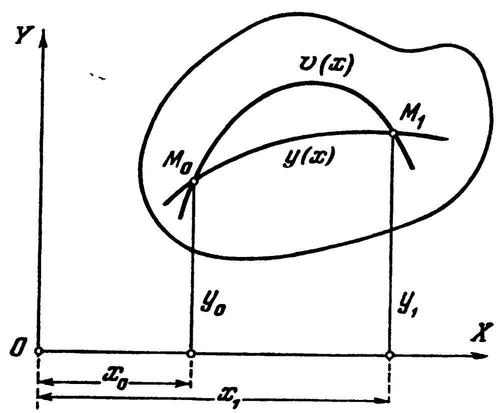
Теорема. *Непрерывная кривая $y = v(x)$, которая проходит через точку M_0 и вдоль которой соблюдается дифференциальное неравенство*

$$\frac{dv}{dx} - f(x, v) > 0,$$

лежит существенно выше интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через M_0. Аналогично, непрерывная кривая $y = u(x)$, проходящая через M_0, вдоль которой имеем

$$\frac{du}{dx} - f(x, u) < 0,$$

лежит существенно ниже интегральной кривой $y = y(x)$.



Фиг. 3

Самое доказательство этого предложения столь просто, что полностью проводится в нескольких словах. Действительно, кривая $y = v(x)$, выйдя из начальной точки M_0 (рис. 3) и имея в ней удовлетворенным неравенство

$$\left[\frac{dv}{dx}\right]_{x=x_0} > \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0},$$

обязана вблизи этой точки течь существенно выше интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через M_0. И если бы при дальнейшем своем течении кривая $y = v(x)$ когда-нибудь склонилась к интегральной кривой $y = y(x)$ и получила на ней какую-нибудь общую точку, то это должно произойти в первый раз в некоторой точке $M_1(x_1, y_1)$, которая может быть чрезвычайно далекой от начальной точки M_0. Но так как в этой точке M_1 мы также должны иметь неравенство

$$\left[\frac{dv}{dx}\right]_{x=x_1} > \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1},$$

то, приближаясь к точке M_1, кривая $y = v(x)$ обязана течь существенно ниже интегральной кривой $y = y(x)$. А это невозможно, ибо кривая $y = v(x)$, опираясь на концы дуги M_0M_1 интегральной кривой, пересекать ее не может, так как M_1 есть первая их общая точка после начальной точки M_0.

4. Интерпретация теоремы о дифференциальных неравенствах. Сам С. А. Чаплыгин указал двоякую интерпретацию своей теоремы. Во-первых, можно говорить: имея заданным дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} - f(x, y) = 0 \tag{1.1}$$

и не умея отыскать интеграл $y(x)$, принимающий заданное значение y_0 для заданного x_0, мы берем какую-нибудь дифференцируемую функцию $w(x)$ с теми же самыми начальными данными $y_0 = w(x_0)$ и заменяем ею в дифференциальном уравнении неизвестный нам интеграл $y(x)$. Если результат подстановки будет положительным, взятая нами функция $w(x)$ заведомо будет превосходить интеграл $y(x)$, т. е. будем иметь $w(x) > y(x)$ до тех пор, пока результат подстановки не переменит знака; аналогично, если результат подстановки будет отрицательным, то заведомо будем иметь $w(x) < y(x)$ до тех пор, пока результат подстановки не переменит знака.

Во-вторых, можно говорить: если мы не умеем интегрировать заданное дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} - f(x, y) = 0$, мы постараемся отыскать такие две непрерывные функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, которые охватывали бы с обеих сторон данную нам функцию $f(x, y)$, т. е., чтобы мы имели

$$\varphi(x, y) < f(x, y) < \psi(x, y)$$

и чтобы оба написанные при помощи их дифференциальные уравнения

$$\frac{du}{dx} = \varphi(x, u), \quad \frac{dv}{dx} = \psi(x, v) \tag{1.2}$$

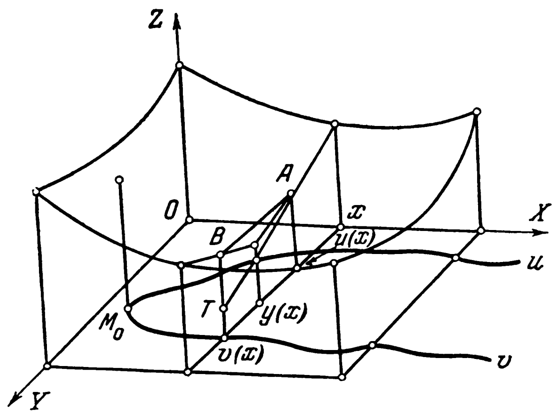
легко интегрировались до конца. Тогда неизвестная нам интегральная линия $y = y(x)$ первоначального дифференциального уравнения (1.1), проходящая через начальную точку $M_0(x_0, y_0)$, заведомо будет охвачена с обеих сторон интегральными кривыми $y = u(x)$ и $y = v(x)$, проходящими через M_0, наших вспомогательных дифференциальных уравнений (1.2).

5. Метод сжимания аппроксимирующей пары. С. А. Чаплыгин поставил себе целью пользоваться всегда лишь линейными вспомогательными дифференциальными уравнениями (1.2) для достижения все более и более тесного охвата неизвестной интегральной кривой $y(x)$. Для этого он ввел естественное предположение: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ сохраняет постоянный знак в рассматриваемой части плоскости.

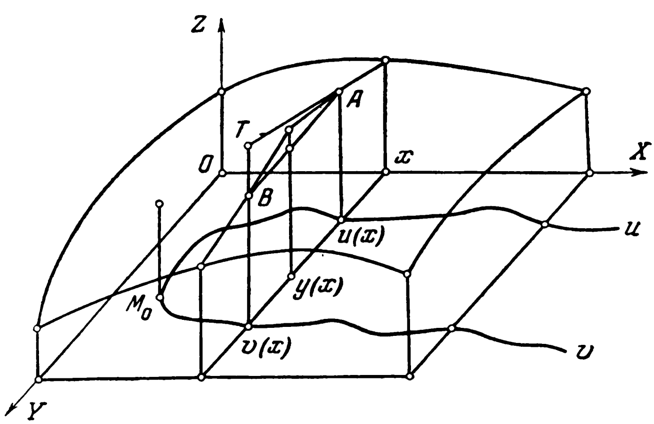
Геометрически это соответствует предположению, что поверхность

$$z = f(x, y),$$

которая порождается заданным дифференциальным уравнением (1.1), разрезается плоскостями $x = \text{const}$, перпендикулярными к оси OX, либо по кривым, выпуклость которых обращена вниз (случай положительной $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$), либо по кривым, обращенным выпуклостью вверх (случай отрицательной $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$). Обе эти возможности изображены на фиг. 4 и 5.



Фиг. 4



Фиг. 5

Для того чтобы получить два линейных вспомогательных дифференциальных уравнения (1.2), дающих аппроксимацию снизу и сверху, С. А. Чаплыгин указывает следующее правило.

Первый шаг. Взять любую начальную аппроксимирующую пару $[u(x), v(x)]$, удовлетворяющую дифференциальным неравенствам

$$\frac{du(x)}{dx} < f[x, u(x)], \qquad \frac{dv(x)}{dx} > f[x, v(x)].$$

Второй шаг. Рассечь поверхность $z = f(x, y)$ плоскостью, параллельной плоскости YOZ и проходящей через фиксированную точку x оси OX; взять на получившейся кривой дужку AB, проектирующуюся на плоскость XOY в виде отрезка $[u(x) \leqslant y \leqslant v(x)]$, и провести к ней хорду AB и касательную AT в верхнем конце $y = v(x)$ этого отрезка.

Третий шаг. Заставить фиксированное число x непрерывно возрастать; тогда хорда и касательная, двигаясь все время параллельно плоскости YOZ, опишут в пространстве две линейчатые поверхности: нижнюю $z = \varphi(x, y)$ и верхнюю $z = \psi(x, y)$, между которыми содержится данная поверхность $z = f(x, y)$ для всех точек $M(x, y)$ плоскости XOY, лежащих внутри аппроксимирующей пары кривых $y = u(x)$ и $y = v(x)$. Таким образом, имеем

$$\varphi(x, y) < f(x, y) < \psi(x, y),$$

причем функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ суть линейные относительно буквы y.

Четвертый шаг. Интегрировать оба линейных дифференциальных уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = \psi(x, y) \tag{1.3}$$

при начальных данных $x = x_0$, $y = y_0$. Тогда интегральная кривая $y = u_1(x)$ первого уравнения будет охвачена линиями $y = u(x)$ и $y = y(x)$ и, соответственно, интегральная кривая $y = v_1(x)$ второго уравнения будет охвачена линиями $y = y(x)$ и $y = v(x)$. Отсюда следует, что имеем неравенства

$$u(x) < u_1(x) < y(x) < v_1(x) < v(x)$$

и, значит, новая аппроксимирующая пара $[u_1(x), v_1(x)]$ содержится внутри начальной аппроксимирующей пары $[u(x), v(x)]$ и поэтому более тесно охватывает неизвестную нам интегральную кривую $y = y(x)$. В самом деле, такое расположение пяти рассматриваемых линий удостоверяется следующими соображениями.

Во-первых, вдоль кривой $y = v(x)$ мы имеем по условию

$$\frac{dv}{dx} > f(x, v);$$

но вдоль нее мы имеем также $f(x, v) = \psi(x, v)$. Следовательно, вдоль нее имеем:

$$\frac{dv}{dx} > \psi(x, v).$$

Отсюда заключаем, что $v(x) > v_1(x)$.

Во-вторых, из неравенства $f(x, y) < \psi(x, y)$ мы прямо усматриваем, что интегральная линия $y = v_1(x)$ уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \psi(x, y)$$

течет выше неизвестной нам интегральной линии $y = y(x)$ данного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Итак, имеем окончательно

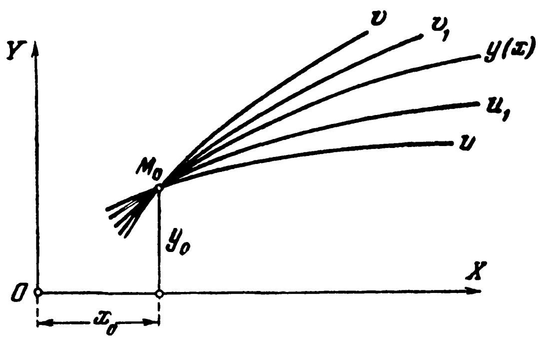
$$y(x) < v_1(x) < v(x). \tag{1.4}$$

Аналогично доказываются неравенства

$$u(x) < u_1(x) < y(x). \tag{1.5}$$

Неравенства (1.4) и (1.5) показывают, что аппроксимирующая пара $[u_1(x),\ v_1(x)]$, выведенная из начальной аппроксимирующей пары $[u(x), v(x)]$, является парой более сжатой.

6. Безграничная аппроксимация и сила ее сходимости. Из первоначальной аппроксимирующей пары $[u, v]$ мы вывели первую аппроксимирующую пару $[u_1,\ v_1]$ (рис. 6). Из последней, в свою очередь, таким же



Фиг. 6

точно приемом С. А. Чаплыгин выводит вторую аппроксимирующую пару $[u_2,\ v_2]$, потом из этой пары выводит третью аппроксимирующую пару $[u_2,\ v_3]$ и так далее безгранично.

Очень важно указать, что быстрота, или сила сходимости аппроксимирующей серии

$$[u(x),\ v(x)],\ [u_1(x),\ v_1(x)],\ [u_2(x),\ v_2(x)], \ldots, [u_n(x),\ v_n(x)], \ldots \tag{1.6}$$

совершенно исключительная: такой быстроты сходимости нет ни у одного известного до сих пор метода. В самом деле, во всех теоретических и практических вопросах считается достижением предела желания, когда удается получить аппроксимирующую серию с быстротою сходимости геометрической прогрессии.

Аппроксимирующая серия (1.6) С. А. Чаплыгина имеет быстроту сходимости, бесконечно более высокую, чем какая-либо геометрическая прогрессия.

Именно, при методе С. А. Чаплыгина соблюдается неравенство

$$0 \leqslant v_n(x) - u_n(x) < \frac{C}{2^{2^n}}, \tag{1.7}$$

где C есть постоянное, не зависящее от n ([4]).

Не приводя здесь доказательства, которое заняло бы некоторое место, мы ограничимся указанием на то, что оценка аппроксимации (1.7) еще груба и что более тонкая оценка дает в знаменателе для четвертого приближения 109 биллионов.

Такая быстрота сходимости характерна для метода С. А. Чаплыгина, который в отношении дифференциальных уравнений первого порядка можно рассматривать как доведенный до конца в теоретическом смысле.

II. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка

1. Постановка проблемы. Сам С. А. Чаплыгин стремился распространить свой метод на дифференциальные уравнения высшего порядка и с этой целью сначала рассмотрел случай линейного уравнения второго порядка.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y'' - p_1 y' - p_2 y - q = 0, \tag{2.1}$$

где p_1, p_2 и q — непрерывные функции переменного x, имеющие непрерывные производные. Мы предполагаем всегда существующее решение

$$y = y(x),$$

определенное начальными данными

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0',$$

нам известным. Пусть мы взяли какую-нибудь трижды дифференцируемую функцию $v(x)$ с теми же самыми начальными данными

$$v(x_0) = y_0, \quad v'(x_0) = y_0'$$

и, подставив ее вместо $y(x)$ в данное дифференциальное уравнение (2.1), получили положительный результат

$$v'' - p_1 v' - p_2 v - q > 0. \tag{2.2}$$

С. А. Чаплыгин ставит здесь следующую проблему: можно ли заключить, что рассматриваемая функция $v(x)$ удовлетворяет неравенству

$$v(x) > y(x) \tag{2.3}$$

не только вблизи начальной абсциссы x_0, но и до тех пор, пока соблюдается неравенство (2.2)?

Аналогичный вопрос ставится и для функции $u(x)$ с теми же самыми начальными данными, удовлетворяющей обратному неравенству

$$u'' - p_1 u' - p_2 u - q < 0. \tag{2.4}$$

Ясно, что если бы неравенство

$$u(x) < y(x)$$

соблюдалось до тех пор, пока имеет силу неравенство (2.4), то на пару функций

$$[u(x),\ v(x)]$$

мы могли бы смотреть, как на аппроксимирующую пару, охватывающую неизвестное нам решение $y(x)$.

2. Защитное уравнение Риккати. Сам С. А. Чаплыгин твердо знал, что, в противоположность дифференциальным уравнениям первого порядка, соблюдение неравенства (2.2) еще не есть гарантия верности неравенства (2.3). Но, к несчастью, путь автора, который привел его к установлению этого важного факта, для нас остается неизвестным: в материалах, которыми мы располагаем по архиву, не содержится никакого намека на это. Поэтому производит сильное впечатление та глубокая проницательность, с какою С. А. Чаплыгин ставит условием, гарантирующим верность неравенства (2.3) на каком-либо отрезке $[x_0, x_1]$, непрерывность на этом отрезке интеграла (2.3) уравнения Риккати

$$\sigma' + \sigma^2 + p_1\sigma + p_1' - p_2 = 0. \tag{2.5}$$

Это,— как сейчас говорят,— «защитное уравнение».

Вот анализ С. А. Чаплыгина: если функция $\sigma(x)$, удовлетворяющая уравнению Риккати (2.5), непрерывна на отрезке $[x_0,\ x_1]$, то функция $s(x)$, определенная равенством

$$s(x) = e^{\int\limits_{x_0}^{x} \sigma(\alpha)d\alpha}, \tag{2.6}$$

непрерывна на этом отрезке, положительна, нигде не уничтожается и имеет непрерывную производную, потому что

$$s'(x) = s(x)\,\sigma(x). \tag{2.7}$$

Легко проверить, что обе функции $\sigma(x)$ и $s(x)$ связаны между собой соотношением

$$\frac{d}{dx}[(\sigma + p_1)\,s] = p_2 s.$$

В самом деле, выполнив дифференцирование, мы имеем в левой части в силу уравнения (2.5) и выражения (2.7):

$$(\sigma' + p_1')\,s + (\sigma + p_1)\,s' = (-\sigma^2 - p_1\sigma + p_2)\,s + (\sigma + p_1)\,s\sigma = p_2 s.$$

Установив это, вычтем из неравенства (2.2) равенство (2.1); имеем:

$$v'' - y'' - p_1(v' - y') - p_2(v - y) > 0. \tag{2.8}$$

Это можно переписать в виде:

$$v'' - y'' + \sigma(v' - y') - (\sigma + p_1)(v' - y') - p_2(v - y) > 0.$$

Умножив обе части этого равенства на s (что законно, так как s есть функция положительная), мы найдем, используя (2.7) и (2.8):

$$(v' - y')'s + (v' - y')\,s' - [(\sigma + p_1)\,s]\,(v - y)' - [(\sigma + p_1)\,s]'\,(v - y) > 0,$$

что можно переписать в виде:

$$[(v'-y')s]'-[(v-y)(\sigma+p_1)s']>0$$

или

$$\frac{d}{dx}[(v'-y')s-(v-y)(\sigma+p_1)s]>0. \tag{2.9}$$

Заметив, что функция, написанная в квадратных скобках, непрерывна, уничтожается при $x=x_0$ и имеет в силу неравенства (2.9) положительную производную, мы заключаем, что на отрезке $[x_0, x_1]$ она является положительной. Значит, имеем:

$$(v'-y')s-(v-y)(\sigma+p_1)s>0.$$

Ввиду положительности функции s мы можем сократить это неравенсто на s и написать:

$$v'-y'-(v-y)(\sigma+p_1)>0.$$

Положив $v-y=z$, мы можем написать это неравенство в виде:

$$z'-z(\sigma+p_1)>0, \tag{2.10}$$

где z есть непрерывная функция на отрезке $[x_0, x_1]$, уничтожающаяся при $x=x_1$, причем неравенство (2.10) соблюдается всюду на этом отрезке.

Так как дифференциальное уравнение

$$Y'-Y(\sigma+p_1)=0$$

имеет решение $Y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $Y(x_0)=0$ тождественным нулю: $Y(x)\equiv 0$, то основная теорема С. А. Чаплыгина, будучи применена к дифференциальному неравенству (2.10), нам говорит, что имеем внутри отрезка $[x_0, x_1]$ неравенство $z>0$ и, следовательно, имеем всюду внутри отрезка $[x_0, x_1]$ неравенство (2.3):

$$v(x)>y(x),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, из анализа, развернутого С. А. Чаплыгиным, следует вывод:

если $y(x)$ есть решение линейного дифференциального уравнения (2.1)

$$y''-p_1y'-p_2y-q=0,$$

определенное начальными данными $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, и если какая-нибудь функция $v(x)$ с теми же начальными данными удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$v''-p_1v'-p_2v-q>0 \tag{2.2}$$

всюду на некотором отрезке $[x_0, x_1]$, где $x_0<x_1$, то непрерывность на этом отрезке хотя бы одного решения $\sigma(x)$ уравнения Риккати (2.5)

$$\sigma'+\sigma^2+p_1\sigma+p'_1-p_2=0$$

гарантирует верность неравенства (2.3),

$$v(x) > y(x),$$

всюду внутри этого отрезка.

Ввиду такой особенной роли этого уравнения к нему вполне приложимо название «защитного уравнения» Риккати, которое ему дал Б. Н. Петров.

3. Предел применимости теоремы С. А. Чаплыгина для линейного уравнения второго порядка. В том, что было опубликовано С. А. Чаплыгиным в отношении линейных уравнений второго порядка, имеется большая недоговоренность и совершенно ясные указания на то, что автором, после упорных размышлений, получены какие-то значительные и важные результаты, о которых мы не имеем никаких представлений и намеки на которые порою прорываются сквозь сжатые, скупо роняемые им фразы. Несомненно, С. А. Чаплыгин имел какие-то случаи нарушения его основной теоремы для линейных уравнений второго порядка и поставил проблему о точном определении границы применимости этой теоремы. Крайне вероятно, что в защитном уравнении Риккати он видел лишь инструмент отыскания этой границы. Но сведений обо всем этом у нас не имеется, так как в архиве пока не нашли соответствующих следов.

Как иллюстрацию я привожу здесь три заключительные фразы С. А. Чаплыгина, помещенные им в конце своего изложения метода для линейных уравнений второго порядка[1], вместе с их анализом, сообщенным мне Б. Н. Петровым[2].

«Итак, пределом применимости теоремы будет значение x, являющееся полюсом σ и в то же время представляющее собою корень функции S».

Расшифровка этой фразы не представляет труда. В самом деле, функции σ и s связаны равенством (2.6),

$$s(x) = e^{\int\limits_{x_0}^{x} \sigma(\alpha)d\alpha},$$

из которого следует, что

$$\sigma(x) = \frac{d}{dx} \ln s(x) = \frac{s'(x)}{s(x)}. \qquad (2.11)$$

Подставив в защитное уравнение Риккати (2.5) это выражение для $\sigma(x)$, мы получаем для функции $s(x)$ линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$s'' + (p_1 s)' - p_2 s = 0, \qquad (2.12)$$

которое является сопряженным данному дифференциальному уравнению (2.1)

$$y'' - p_1 y' - p_2 y = q,$$

[1] См. [1], стр. 354.

[2] Мы разбили текст С. А. Чаплыгина на изолированные фразы, так как даже отдельные слова в них имеют самостоятельное значение, скрывая за собой длинный путь размышлений, о которых автор не говорит ничего.

если у этого последнего отбросить правую часть. Таким образом, преобразование (2.11) превращает защитное уравнение Риккати (2.5) в линейное однородное дифференциальное уравнение (2.12). Обратное, очевидно, также верно: преобразование (2.6) переводит линейное уравнение второго порядка (2.12) в защитное уравнение Риккати (2.5),

$$\sigma' + \sigma^2 + p_1\sigma + p_1' - p_2 = 0.$$

Здесь следует обратить внимание на то обстоятельство, что равносильность защитного уравнения Риккати (2.5) и линейного уравнения (2.12) еще не означает взаимно однозначного соответствия их решений $\sigma(x)$ и $s(x)$, так как хотя каждой интегральной кривой $y = \sigma(x)$ уравнения Риккати в силу формулы (2.6) отвечает интегральная кривая $y = s(x)$ линейного уравнения (2.12), но эта последняя не может быть какой угодно, потому что должна проходить через неподвижную точку $(x_0, 1)$. Это показывает формула (2.6), ибо, полагая $x = x_0$, мы имеем $s(x_0) = 1$. Таким образом, формула (2.6) есть преобразование совокупности всех интегральных кривых $y = \sigma(x)$ уравнения Риккати в пучок интегральных кривых $y = s(x)$ однородного уравнения (2.12), имеющий центром неподвижную точку $(x_0, 1)$.

Так как однородное уравнение (2.12) имеет непрерывное решение $s(x)$ с непрерывной первой производной $s'(x)$ на всяком отрезке оси OX, на котором сохраняется непрерывность коэффициентов этого уравнения, то формула (2.11) показывает, что уход в бесконечность решения $\sigma(x)$ уравнения Риккати может осуществляться в самом деле лишь тогда, когда x приближается к корню уравнения

$$s(x) = 0.$$

Это вполне объясняет первую фразу С. А. Чаплыгина.

Переходим ко второй фразе. Она такова: «... при этом необходимо иметь в виду, что присутствие в функциях σ и s произвольных постоянных позволяет до известной степени отодвинуть отмеченный предел».

Это место также нуждается в разъяснении. Прежде всего, фактом является наличие в решении $\sigma(x)$ уравнения Риккати и в решении $s(x)$ однородного уравнения (2.12) по одному произвольному постоянному. Другое произвольное постоянное в функции $s(x)$ отсутствует, так как интегральная кривая $y = s(x)$ должна проходить через неподвижную точку $(x_0, 1)$ и может лишь поворачиваться около нее, вращая свою касательную в этой точке. Отсюда у нас имеется лишь одно произвольное постоянное, именно: величина производной $s'(x_0)$ в точке x_0. Фактом также является и наша возможность распоряжаться выбором численной величины этого произвольного постоянного C так, чтобы точка x_1 ухода функции $\sigma(x)$ в бесконечность, или, что есть то же самое, точка x_1 уничтожения функции $s(x)$ была возможно более удаленной от начальной абсциссы x_0. Чтобы убедиться в этом, достаточно сначала заметить, что защитным уравнением может оказаться любое уравнение Риккати

$$\sigma' + \sigma^2 + A\sigma + B = 0\,, \tag{2.13}$$

коэффициенты которого суть непрерывные функции с непрерывными производными и у которого квадрат неизвестной функции имеет коэффициентом единицу. В самом деле, тогда коэффициенты p_1 и p_2 заданного дифференциального уравнения (2.1) определяются при помощи равенств

$$p_1 = A, \quad p_1' - p_2 = B,$$

откуда находим:

$$p_1 = A, \quad p_2 = A' - B.$$

Заметив это, возьмем уравнение Риккати (2.13) с постоянными коэффициентами A и B. В этом случае возможно проинтегрировать до конца уравнение Риккати (2.13). В самом деле, написав вместо производной σ отношение дифференциалов $\frac{d\sigma}{dx}$, мы имеем:

$$\frac{d\sigma}{dx} + \sigma^2 + A\sigma + B = 0.$$

Отсюда, разделяя переменные и интегрируя, мы получаем:

$$-\int \frac{d\sigma}{\sigma^2 + A\sigma + B} = x + C, \tag{2.14}$$

где C — произвольное постоянное. Здесь представляются три случая.

Случай 1. *Квадратное уравнение* $\sigma^2 + A\sigma + B = 0$ *имеет равные корни.*

В этом случае мы имеем тождество

$$\sigma^2 + A\sigma + B \equiv (\sigma - a)^2,$$

где a есть кратный корень рассматриваемого квадратного уравнения. Равенство (2.14) тогда перепишется в виде:

$$-\int \frac{d\sigma}{(\sigma - a)^2} = x + C,$$

откуда, интегрируя, имеем:

$$\frac{1}{\sigma - a} = x + C$$

и, значит,

$$\sigma = a + \frac{1}{x + C}\,.$$

Мы видим, что защитное уравнение Риккати в этом случае имеет подвижной полюс $x_1 = -C$, который мы можем отодвигать сколь угодно далеко от начальной точки $x = x_0$, выбирая для этого C достаточно большим. Таким образом, в этом случае теорема С. А. Чаплыгина верна для бесконечного отрезка $[x_0, +\infty]$, т. е. пределом применимости будет бесконечность.

Случай 2. *Квадратное уравнение* $\sigma^2 + A\sigma + B = 0$ *имеет действительные различные корни.*

В этом случае мы имеем тождество

$$\sigma^2 + A\sigma + B \equiv (\sigma - a)(\sigma - b),$$

где a и b — действительные различные числа, $a < b$. Равенство (2.14) тогда перепишется в виде:

$$-\int \frac{d\sigma}{(\sigma - a)(\sigma - b)} = x + C,$$

откуда, интегрируя, имеем:

$$\frac{1}{b - a} \ln \frac{\sigma - a}{\sigma - b} = x_1 + C$$

и, значит,

$$\sigma = \frac{aC^* - e^{(b-a)x}}{C^* - e^{(b-a)x}},$$

где C^* — произвольное постоянное. Мы видим, что и здесь, выбирая C^* достаточно большим, мы можем отодвигать сколь угодно далеко от начальной точки x_0 полюс функции $\sigma(x)$.

Таким образом, и в этом случае теорема верна для бесконечного предела, т. е. неравенство $v(x) > y(x)$ будет справедливо при всяком x, большем начального x_0.

Случай 3. *Квадратное уравнение* $\sigma^2 + A\sigma + B = 0$ *имеет мнимые корни.*

В этом случае мы имеем тождество:

$$\sigma^2 + A\sigma + B \equiv (\sigma - a)^2 + b^2,$$

где a и b — действительные числа, $b \neq 0$. Равенство (2.14) тогда перепишется в виде:

$$-\int \frac{d\sigma}{(\sigma - a)^2 + b^2} = x + C,$$

откуда, интегрируя, имеем

$$\frac{1}{b} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sigma - a}{b} = x + C$$

и, значит,

$$\sigma = a + b \operatorname{tg}(bx + C^*),$$

где C^* — произвольное постоянное.

Функция $\operatorname{tg} z$ есть функция периодическая с периодом π, непрерывная всюду, кроме бесконечного числа полюсов:

$$z = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

где k — любое целое число. Значит, точки ухода функции $\operatorname{tg} z$ в бесконечность, т. е. ее полюсы, образуют фиксированную линейную решетку с шагом, равным π, причем точка $\frac{\pi}{2}$ принадлежит решётке. Отсюда следует, что точки ухода функции $\sigma(x)$ в бесконечность образуют линейную решётку шага $\frac{\pi}{b}$, причем точка $\frac{\pi}{2b} - \frac{C^*}{b}$ принадлежит этой решётке. Когда произвольное постоянное C^* начинает непрерывно изменяться, тогда рассматриваемая решётка становится подвижной и начинает непрерывно перемещаться вдоль оси OX, не изменяя своего шага $\frac{\pi}{b}$.

Мы видим, что никаким выбором произвольного постоянного C в интеграле защитного уравнения Риккати мы не можем отодвинуть подвижной полюс от начальной точки x_0 дальше, чем на шаг подвижной решётки, т. е. дальше чем на $\frac{\pi}{b}$. Таким образом, в рассматриваемом случае методом защитного уравнения Риккати уже невозможно установить применимость теоремы С. А. Чаплыгина на отрезке $[x_0, x_1]$ длины, большей, чем $\frac{\pi}{b}$. И если мы все-таки хотим утверждать эту применимость на таком отрезке, нам необходим для этого какой-то иной метод, отличный от метода использования защитного уравнения Риккати.

Прежде всего, независимо от каких-либо методов обнаружения, спрашивается: эта применимость теоремы сама по себе имеет ли место на таких отрезках? По-видимому, в тесной связи с этим вопросом стоит последняя (третья) весьма загадочная фраза С. А. Чаплыгина:

«Однако, предел этот может и, в некоторых случаях, будет существовать, хотя бы неравенство (2.2)

$$v'' - p_1 v' - p_2 v - p > 0$$

было справедливо при всяком x, большем начального x_0». Фраза эта совершенно определенно говорит нам о том, что С. А. Чаплыгин имел какие-то примеры нарушения его теоремы, несмотря на справедливость неравенства (2.2).

К этому вопросу относятся работы Б. Н. Петрова*, посвященные детальному исследованию линейного уравнения

$$y'' + y = 0, \tag{2.15}$$

для которого защитное уравнение Риккати

$$\sigma' + \sigma^2 + 1 = 0 \tag{2.16}$$

дает место третьему случаю мнимых корней. Здесь мы имеем $a = 0$ и $b = 1$, так что общий интеграл уравнения Риккати (2.16) есть

$$\sigma(x) = \operatorname{tg}(x + C^*).$$

В этом случае решётка полюсов имеет своим шагом π, так что невозможно доказать методом защитного уравнения применимость теоремы С. А. Чаплыгина за отрезком длины π.

---

* См. работу [5]. (*Прим. ред.*)

Чтобы выяснить вопрос о применимости, Б. Н. Петров взял неоднородное уравнение

$$v'' + v = q \tag{2.17}$$

с положительной правой частью $q(x)$, $q(x) > 0$ и написал его решение $v(x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$v(0) = 0, \ v'(0) = 0, \tag{2.18}$$

в виде:

$$v(x) = \int_0^x q(\alpha) \sin(x - \alpha)\, d\alpha\,. \tag{2.19}$$

Легко, в самом деле, проверить, что выражение (2.19) есть решение дифференциального уравнения (2.17) и что оно удовлетворяет начальным условиям (2.18). Действительно, дифференцируя дважды выражение (2.19), находим:

$$v'(x) = \int_0^x q(\alpha) \cos(x - \alpha)\, d\alpha \tag{2.20}$$

и

$$v''(x) = q(x) - \int_0^x q(\alpha) \sin(x - \alpha)\, d\alpha. \tag{2.21}$$

Мы немедленно замечаем, что выражения (2.19) и (2.20) дают $v(0) = 0$ и $v'(0) = 0$. Складывая же выражения (2.19) и (2.21), мы имеем уравнение (2.17) удовлетворенным.

Ясно, что исходное дифференциальное уравнение (2.15)

$$y'' + y = 0$$

имеет решение $y(x)$, удовлетворяющее начальным данным $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, тождественно равным нулю: $y(x) \equiv 0$.

Значит, если при положительной функции $q(x)$ выражение (2.19) станет для какого-нибудь x_1, $x_1 > 0$ отрицательным, то отсюда будет следовать, что теорема С. А. Чаплыгина уже неприменима к отрезку $[0, x_1]$, хотя дифференциальное неравенство

$$v'' + v > 0$$

справедливо при всяком положительном x, так как мы предполагаем, что всегда $q(x) > 0$.

Возьмем, следуя Б. Н. Петрову, фиксированное положительное число ε, малое сколь угодно, и рассмотрим выражение

$$Z(x) = \int_0^x \sin(x - \alpha)\, d\alpha.$$

Имеем, очевидно,

$$Z(x) = \int_0^{\varepsilon} \frac{d}{d\alpha} \cos(x-\alpha)\,dx = \cos(x-\varepsilon) - \cos x = 2\sin\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, полагая $x = \pi + \varepsilon$, находим:

$$Z(\pi+\varepsilon) = 2\sin\left(\pi + \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\frac{\varepsilon}{2} < 0.$$

Итак, величина $Z(\pi+\varepsilon)$ есть отрицательная.

Но мы можем переписать $Z(\pi+\varepsilon)$ в виде

$$Z(\pi+\varepsilon) = \int_0^{\pi+\varepsilon} f(\alpha)\sin(x-\alpha)\,d\alpha,$$

так как можем положить:

$$f(\alpha) = 1 \text{ в промежутке } (0 < \alpha < \varepsilon),$$

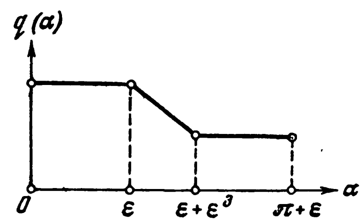
$$f(\alpha) = 0 \text{ в промежутке } (\varepsilon < \alpha < \pi + \varepsilon).$$

Пусть теперь $q(\alpha)$ — непрерывная функция, определенная на отрезке $[0 \leqslant \alpha \leqslant \pi + \varepsilon]$ следующим законом (рис. 7):

1) $q(\alpha) \equiv 1$ на отрезке $[0 \leqslant \alpha \leqslant \varepsilon]$,

2) $q(\alpha) \equiv \varepsilon^3$ на отрезке $[\varepsilon + \varepsilon^3 \leqslant \alpha \leqslant \pi + \varepsilon]$,

3) $q(\alpha)$ — линейная функция на отрезке $[\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant \varepsilon + \varepsilon^3]$.



Фиг. 7

Ясно, что имеем:

$$v(\pi+\varepsilon) = \int_0^{\pi+\varepsilon} q(\alpha)\sin(x-\alpha)\,d\alpha = \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\varepsilon^3} + \int_{\varepsilon+\varepsilon^3}^{\pi+\varepsilon} q(\alpha)\sin(x-\alpha)\,d\alpha.$$

Ввиду того, что $q(\alpha) \equiv 1$ на отрезке $[0 \leqslant \alpha \leqslant \varepsilon]$, имеем первый интеграл в правой части равным $Z(\pi+\varepsilon)$, т. е. равным

$$2\sin\left(\pi + \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\frac{\varepsilon}{2} = -2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу того, что $q(\alpha) \equiv \varepsilon^3$ на отрезке $[\varepsilon + \varepsilon^3, \pi + \varepsilon]$, имеем:

$$\left|\int_{\varepsilon+\varepsilon^3}^{\pi+\varepsilon} q(\alpha)\sin(x-\alpha)\,d\alpha\right| \leqslant 4\varepsilon^3,$$

потому что $\pi + \varepsilon < 4$. Наконец, вследствие линейности $q(\alpha)$ на отрезке $[\varepsilon, \varepsilon + \varepsilon^3]$, имеем:

$$\left|\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\varepsilon^3} q(\alpha)\sin(x-\alpha)\,d\alpha\right| < \varepsilon^3.$$

Итак, имеем:

$$v(\pi+\varepsilon) = -2\sin^2\frac{\varepsilon}{2} + R,$$

где

$$|R| < 4\varepsilon^3 + \varepsilon^3 = 5\varepsilon^3.$$

Таким образом, величина $v(\pi+\varepsilon)$ есть сумма отрицательного бесконечно малого второго порядка и бесконечно малого третьего порядка.

Отсюда для достаточно малого положительного ε находим:

$$v(\pi+\varepsilon) < 0.$$

Это обнаруживает неприменимость теоремы С. А. Чаплыгина на отрезке $[0, \pi+\varepsilon]$, где положительное ε сколь угодно мало.

Вместе с тем, метод защитного уравнения Риккати показывает, что теорема С. А. Чаплыгина применима на всяком отрезке $[x_0, x_1]$ длины меньшей, чем π.

Таким образом, мы приходим к следующему результату: в некоторых случаях предел применимости теоремы С. А. Чаплыгина конечен и в точности дается методом защитного уравнения Риккати.

Что будет происходить в других случаях,— мы ничего не знаем.

III. Нелинейное уравнение второго порядка

1. Метод приведения к линейному неравенству. В применении к нелинейным уравнениям второго (и тем более высшего) порядка теория метода С. А. Чаплыгина не только не закончена, но даже общий ход дальнейшего ее развития представляет много неясного. Сам С. А. Чаплыгин для нелинейных уравнений второго порядка ограничился следующими строками [1]: «Перейдем теперь к рассмотрению нелинейных уравнений высших порядков и начнем опять с уравнения второго порядка

$$y'' - f(x, y, y') = 0, \tag{3.1}$$

предполагая, что функции $y(x)$ и $f(x, y, y')$ удовлетворяют всем условиям, указанным в тексте основной теоремы. Пусть конечная и непрерывная, вместе с двумя своими первыми производными, функция $v(x)$ удовлетворяет в начальной точке $x = x_0$ требованию:

$$v(x_0) = y(x_0) = y_0, \quad v'(x_0) = y'(x_0) = y'_0$$

и оправдывает на участке $[x_0, x_1]$ неравенство

$$v'' = f(x, v, v') > 0.$$

Это соотношение при помощи (3.1) мы можем привести к виду:

$$v'' - y'' - p_1(v' - y') - p_2(v - y) > 0, \tag{3.2}$$

[1] См. работу [1], стр. 357—358.

положив

$$\left.\begin{aligned} \frac{f(x,\ v,\ v') - f(x,\ v,\ y')}{v' - y'} &= p_1, \\ \frac{f(x,\ v,\ y') - f(x,\ y,\ y')}{v - y} &= p_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Так как по условиям, наложенным на функции $y(x)$, $v(x)$ и $f(x, y, y')$, выражения p_1 и p_2 всюду в интересующей нас области конечны и непрерывны, то из линейного неравенства (3.2), на основании сказанного выше о неравенстве (2.8)

$$v'' - y'' - p_1(v_1' - y') - p_2(v - y) > 0, \tag{3.4}$$

приходим к выводу, что $v(x)$ будет верхнею границею интеграла $y(x)$ уравнения (3.1)

$$v(x) > y(x)$$

при $x > x_0$, пока значение x не превзойдет некоторого предела».

Неполнота текста совершенно очевидна, и вот где главная трудность: автор, опираясь на неравенство (3.2) и на совпадение его с неравенством (3.4), написанным им для линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' - p_1 y' - p_2 y - q = 0, \tag{3.5}$$

строит свое заключение о справедливости финального неравенства

$$v(x) > y(x) \tag{3.6}$$

внутри некоторого отрезка $[x_0,\ x_1]$. Но неравенство (3.2) по внешнему только виду походит на неравенство (3.4), по существу же оно совсем иной природы. В самом деле, в неравенстве (3.4) коэффициенты p_1 и p_2 — это строго фиксированные непрерывные функции переменного x, почерпнутые непосредственно из первоначально данного нам линейного дифференциального уравнения (3.5) и, следовательно, от рассматриваемого решения $y(x)$ и от выбираемой функции сравнения $v(x)$ отнюдь не зависящие.

Отсюда и происходит то, что когда мы пишем для неравенства (3.4) защитное уравнение Риккати

$$\sigma' + \sigma^2 + p_1\sigma + p_1' - p_2 = 0 \tag{3.7}$$

с целью установления отрезка $[x_0,\ x_1]$ применимости основной теоремы, т. е. справедливости неравенства (3.6), то мы уверены, что такой отрезок действительно существует и что его длина $x_1 - x_0$ не зависит ни от неизвестного нам решения $y(x)$, ни от выбираемой нами (иногда случайно) функции сравнения $v(x)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно просто взглянуть на уравнение Риккати (3.7): его коэффициенты p_1 и $p_1' - p_2$ это фиксированные непрерывные функции независимого переменного x, и поэтому всегда имеется решение $\sigma(x)$, непрерывное на некотором отрезке

$[x_0, x_1]$ не нулевой длины, $x_1 > x_0$, не зависящем ни от $y(x)$, ни от $v(x)$. По этой причине предел x_1 применимости теоремы для линейных уравнений не зависит от выбираемой функции сравнения $v(x)$.

Совсем иную картину являет нам неравенство (3.2), написанное для нелинейного уравнения (3.1). В этом неравенстве коэффициенты p_1 и p_2 — уже не фиксированные функции от x, но функциональные выражения (3.3), существенно зависящие от y, y', v и v'.

Отсюда следует то, что когда мы формальным образом напишем уравнение Риккати (3.7) с такими коэффициентами p_1 и $p_1' - p_2$, то «защитным» это уравнение Риккати никак признать не приходится, так как оно защищает от ухода интеграла $\sigma(x)$ в бесконечность отрезок $[x_0, x]$, длина которого $x_1 - x$ и положение x_1 существенно зависят от неизвестного нам решения $y(x)$ и функции сравнения $v(x)$.

В этой зависимости конца x_1 отрезка $[x_0, x_1]$ от решения $y(x)$ еще нет большой беды, так как в конце концов естественно думать, что для всякого решения $y(x)$, определенного начальными данными $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y_0'$, имеется свой собственный предел применимости теоремы С. А. Чаплыгина. Напротив, зависимость конца x_1 от функции сравнения $v(x)$ уничтожает всякий смысл обращения к уравнению Риккати (3.7), потому что, во-первых, каждая вообще функция $v(x)$, имеющая начальные данные $v(0) = y_0$, $v'(0) = y_0'$ и удовлетворяющая неравенству

$$v'' - f(x, v, v') > 0,$$

дает $v''(x_0) > y''(x_0)$ и, значит, имея вблизи точки x_0 вследствие непрерывности v'' и y'' удовлетворенным неравенство $v''(x) > y''(x)$, она должна вблизи этой точки удовлетворять и неравенству $v(x) > y(x)$, которое, таким образом, является фактом чрезвычайно тривиальным и не нуждающимся ни в каких дифференциальных уравнениях. И, во-вторых, если предел x_1 справедливости неравенства $v(x) > y(x)$ зависит от выбираемой функции $v(x)$, то он у всякой $v(x)$ имеется свой собственный, и тогда нет никакой гарантии в том, что, выбирая различные функции сравнения $v(x)$, мы не будем иметь предела x_1, бесконечно приближающегося к начальной точке x_0.

Если бы такой факт осуществился на деле, то это означало бы, что теорема С. А. Чаплыгина просто совсем неприменима к такому нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка, по крайней мере при начальных данных y_0, y_0', если не ограничиться каким-либо предварительным условием, наложенным a priori на совокупность допустимых функций сравнения $v(x)$. Таким образом, можно заранее предвидеть существование нелинейных уравнений второго порядка с нулевым отрезком $[x_0, x_1]$, $x_1 - x_0 = 0$, применимости основной теоремы.

2. П р и м е р Б. Н. П е т р о в а. Такие нелинейные уравнения второго порядка с полной неприменимостью к ним основной теоремы были найдены Б. Н. Петровым [1].

[1] См. работу [6].

Возьмем уравнение

$$y'' + y^2 = 0 \tag{3.8}$$

и проинтегрируем при начальных данных $v_0 = 0$, $v' = 0$ уравнение

$$v'' + v^2 = q, \tag{3.9}$$

где q — положительное число, заранее фиксированное. Вводя обозначение $\frac{dv}{dx} = p$, мы имеем $v'' = p\frac{dp}{dv}$. Поэтому уравнение (3.9) перепишется в виде:

$$p\frac{dp}{dv} = q - v^2,$$

откуда находим:

$$d\frac{p^2}{2} = (q - v^2)\,dv = d\left(qv - \frac{v^3}{3}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{p^2}{2} = qv - \frac{v^3}{3} + C_1.$$

Так как при $x = 0$ мы должны иметь $v = 0$ и $p = 0$, то $C_1 = 0$. Отсюда

$$\frac{dv}{dx} = p = \sqrt{2}\sqrt{qv - \frac{v^3}{3}}.$$

Значит,

$$\frac{dv}{\sqrt{qv - \frac{v^3}{3}}} = \sqrt{2}\cdot dx.$$

Отсюда

$$\int\frac{dv}{\sqrt{qv - \frac{v^3}{3}}} = \sqrt{2}\cdot x + C_2.$$

Так как при $x = 0$ мы должны иметь $v = 0$, то $C_2 = 0$, и, значит, мы имеем окончательно:

$$\int_0^v \frac{d\alpha}{\sqrt{q\alpha - \frac{\alpha^3}{3}}} = \sqrt{2}\cdot x. \tag{3.10}$$

Обращение эллиптического интеграла (3.10) нам дает:

$$v(x) = \sqrt{3q}\cdot \mathrm{sn}^2\left(\sqrt{\frac{q}{3}}\cdot x\right), \tag{3.11}$$

где sn — символ функции Якоби [1].

В нашем случае модуль k имеет численную величину:

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (k > 0).$$

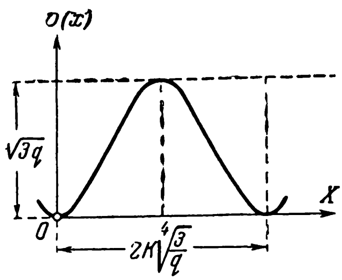
---

[1] По определению $z = \mathrm{sn}\,u$, если $u = \int_0^z \frac{d\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2)(1-k^2\alpha^2)}}$.

Обозначая, по Якоби, четверть действительного периода функции sn через K:

$$K = \int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2)\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right)}},$$

мы можем выразить решение (3.11) дифференциального уравнения (3.9) кривой, изображенной на рис. 8. Это есть непрерывная неограниченно дифференцируемая периодическая линия с периодом $2K\sqrt{\frac{3}{q}}$, лежащая вся выше оси OX, кроме точек



Фиг. 8

$$x_n = n2K\sqrt[4]{\frac{3}{q}} \quad (n \text{ — любое целое}),$$

где кривая прикасается к этой оси. Таким образом, все минимумы равны нулю и все максимумы равны $\sqrt{3q}$.

В начале координат (при $n = 0$) мы имеем прикосновение кривой к оси OX, и, следовательно,

$$v(0) = 0, \; v'(0) = 0,$$

в согласии с начальными данными решения $v(x)$ дифференциального уравнения (3.9)

$$v'' + v^2 = q.$$

Из этого уравнения следует, что $v''(0) = q$.

Установив это, предположим положительное постоянное q чрезвычайно большим и рассмотрим разность

$$v^*(x) = v(x) - \varepsilon x^2 \left(2K\sqrt[4]{\frac{3}{q}} - x\right),$$

где ε — положительное весьма малое число. Так как в точке $x_1 = 2K\sqrt[4]{\frac{3}{q}}$ мы имеем $v(x_1) = 0$ и $v'(x_1) = 0$, то функция $v^*(x)$ заведомо есть отрицательная вблизи точки x_1 и влево от нее. С другой стороны, ввиду того, что q есть величина положительная, чрезвычайно большая, а положительное число ε можно взять сколь угодно малым, следует, что функция $v^*(x)$ заведомо есть положительная вблизи начала координат $x = 0$ и вправо от него. Следовательно, функция $v^*(x)$, при непрерывном пробеге вправо точкою x отрезка $[0, x]$, сначала положительна, а затем изменяет свой знак, становясь отрицательной.

Наконец, легко видеть, что функция $v^*(x)$ удовлетворяет неравенству

$$(v^*)'' + (v^*)^2 > 0$$

на всем отрезке $[0, x_1]$. В самом деле, мы имеем:

$$(v^*)'' = v'' + 6\varepsilon x - 4\varepsilon K \sqrt[4]{\frac{3}{q}}$$

и

$$(v^*)^2 = v^2 - 2v(x)\ \varepsilon x^2 \left(2K \sqrt[4]{\frac{3}{q}} - x\right) + \varepsilon^2 x^4 \left(2K \sqrt[4]{\frac{3}{q}} - x\right)^2.$$

Складывая, имеем в левой части $(v^*)'' + (v^*)^2$. В правой будет стоять: q плюс три члена бесконечно малых вместе с ε, наконец, член, абсолютная величина которого, очевидно, не превосходит числа

$$2\sqrt{3q}\left(2K \sqrt[4]{\frac{3}{q}}\right)^2 \varepsilon < 48K^3\varepsilon.$$

Значит, этот член также бесконечно мал вместе с ε.

Из сказанного следует, что при фиксированном большом положительном q и при достаточно малом ε мы имеем неравенство

$$(v^*)'' + (v^*)^2 > 0$$

всюду на отрезке $[0, x_1]$, где $x_1 = 2K \sqrt[4]{\frac{3}{q}}$. И так как на этом отрезке функция $v^*(x)$ наверное изменяет свой знак, то предел применимости теоремы С. А. Чаплыгина заведомо меньше, чем $x_1 = 2K \sqrt[4]{\frac{3}{q}}$. Здесь число q может быть взято сколь угодно большим; поэтому число x_1 можно сделать сколь угодно малым. Отсюда следует, что нелинейное уравнение (3.8)

$$y'' + y^2 = 0$$

имеет нулевой предел применимости теоремы для начальных данных $y_0 = 0, y_0' = 0$.

Итак, существуют нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка с нулевым пределом применимости основной теоремы.

В изученном примере существенно предполагается, что семейство функций сравнения $v(x)$ не ограничено в своей совокупности, так как максимум выражения (3.11) равен $\sqrt{3q}$, где q — число, сколь угодно большое.

Однако положение резко изменяется, когда за семейство функций сравнения $v(x)$ берут семейство, ограниченное в своей совокупности $|v(x)| < M$, где M — фиксированное число. В этом случае, по-видимому, уравнение

$$y'' - f(x, y) = 0, \tag{3.12}$$

где y' не фигурирует, снова получает ненулевой предел, потому что в выражениях (3.3) мы имеем $p_1 \equiv 0$, и p_2 ограничено. В этих условиях защитное уравнение Риккати (3.7) может еще продолжать выполнять свою роль.

Если же y' входит явно в уравнение

$$y'' - f(x,\ y,\ y') = 0,$$

то можно ожидать нулевого предела даже при семействе функций сравнения $v(x)$, ограниченном в своей совокупности.

Впрочем, нулевой предел может получиться и у уравнения (3.12) с ограниченным в своей совокупности семейством функций сравнения $v(x)$, если функция $f(x,\ y)$ становится бесконечной в какой-либо конечной части плоскости. Таков, по-видимому, случай уравнения

$$y'' + \frac{1}{(y-1)^2} = 0,$$

для которого $|v(x)| < 1$.

3. Последние идеи С. А. Чаплыгина. По-видимому, сам автор «Оснований» предвидел возможность феномена уравнения с нулевым пределом применимости теоремы о дифференциальных неравенствах. Данные архива в этом отношении в высшей степени важны и интересны, но представляют чрезвычайные трудности в отношении их анализа. То, что пока удалось найти в архиве, это — эскиз теории в виде пяти отрывков, содержащих очень тонкие соображения, которые автор имел в виду положить в основание своей теории для уравнений второго порядка.

В этом эскизе, насколько можно понять, автор делает различие между «широким полем» и «узким полем», в которых соблюдается его основная теорема о дифференциальном неравенстве для уравнения второго порядка: соблюдаясь в узком поле, она может перестать соблюдаться в широком поле.

Стремясь разыскать узкое поле, С. А. Чаплыгин ищет огибающую семейства всех интегральных кривых, проходящих через начальную точку $M_0(x_0,\ y_0)$: пересечение этой огибающей с какой-нибудь фиксированной интегральной линией $y = y(x)$, определенной начальными данными $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, дает другой конец $M_1(x_1,\ y_1)$ узкого поля, где должна соблюдаться теорема о дифференциальном неравенстве.

Таким образом, первый просмотр материалов в архиве С. А. Чаплыгина обнаружил, что автор, по-видимому, имел в виду положить в основание своей теории соображения, аналогичные тем, которыми пользуется новейшее вариационное исчисление, делающее различие между классической теорией Якоби, ищущей на экстремалях так называемые «фокальные точки» (узкие поля), и глобальной теорией Гильберта (широкие поля).

Следует еще раз указать, что анализ архивного материала очень труден, и эти трудности увеличиваются еще тем обстоятельством, что имеются ясные указания на неполноту данных архива: по-видимому, в них отсутствуют какие-то исследования о широких полях; разыскание их пролило бы много света.

IV. Другие проблемы по методу С. А. Чаплыгина

1. Дифференциальное уравнение порядка выше второго. Мы довольно подробно коснулись проблемы дифференциального уравнения второго порядка, потому что она является первым этапом после законченной (теоретически) проблемы уравнений первого порядка. Но имеется много еще других проблем, частью поставленных самим автором метода, частью уже начатых разработкой. Мы ограничимся простым перечнем.

Для линейного уравнения порядка выше второго С. А. Чаплыгин развил мысль о цепочке защитных уравнений первого порядка, из которых лишь первое есть уравнение Риккати, остальные — линейные.

Для нелинейного уравнения автор делает приведение к линейным неравенствам, как это им сделано для уравнения второго порядка.

Развивать теорию в этом направлении я полагал бы преждевременным, пока не будет закончена теория уравнения второго порядка, т. е. пока не будет определен во всех случаях точный предел применимости теоремы для линейного уравнения второго порядка и пока не будет приведен в ясность вопрос об «узких» и «широких» полях для нелинейных уравнений второго порядка.

2. Система совместных дифференциальных уравнений. В. П. Ветчинкину мы обязаны сохранением ценной стенограммы доклада, лично сделанного С. А. Чаплыгиным по поводу систем дифференциальных уравнений *. В нем он рассматривает системы уравнений первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z)$$

при начальных данных $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ и берет функции сравнения $v(x)$, $w(x)$, удовлетворяющие системе дифференциальных неравенств

$$\frac{dv}{dx} - f(x, v, w) \gtreqless 0, \quad \frac{dw}{dx} - g(x, v, w) \gtreqless 0$$

при тех же самых начальных данных: $v(x_0) = y_0$, $w(x_0) = z_0$. Здесь можно говорить о пространственной интегральной линии, проходящей через начальную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, и об ее конусе аппроксимации с вершиною в M_0.

Теория эта еще совсем не тронута никаким исследователем. Самым важным в ней представляется вопрос, имеет ли эта теория абсолютный характер, т. е. такой, какой имеет теория одного дифференциального уравнения первого порядка, совсем не имеющая нужды говорить о «пределе применимости теоремы о неравенствах», или, напротив, теория эта имеет необходимость вводить в рассмотрение указанный предел, подобно уравнениям второго порядка.

3. Уравнение в частных производных первого порядка. Метод дифференциальных неравенств по отношению к такому урав-

* См. работу [3].

нению вызывает живейший интерес и в самом деле имеет большую важность. Проблема ставится так: имея уравнение в частных производных

$$q - f(x, y, z, p) = 0,$$

где $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, и имея решение его

$$z = z(x, y),$$

определенное начальным условием Коши

$$z(x, y_0) = \varphi(x),$$

где φ — заданная функция, что можно сказать о функции сравнения

$$v(x, y),$$

удовлетворяющей тому же самому начальному условию Коши

$$v(x, y_0) = \varphi(x)$$

и, кроме того, неравенству

$$\frac{\partial v}{\partial y} - f\left(x, y, v, \frac{\partial v}{\partial x}\right) > 0\,*. \tag{4.1}$$

В настоящее время не осталось сомнений в том, что теория эта имеет такой же характер, как и теория для одного дифференциального уравнения первого порядка. Это означает, что соблюдение неравенства (4.1) в частных производных влечет за собой удовлетворение конечного неравенства

$$v(x, y) > z(x, y)$$

всюду на плоскости XOY, где соблюдено неравенство (4.1).

Аналогично соблюдение обратного неравенства в частных производны

$$\frac{\partial u}{\partial y} - f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) < 0 \tag{4.2}$$

для функции $u(x, y)$, удовлетворяющей тому же самому начальному условию Коши

$$u(x, y_0) = \varphi(x),$$

влечет соблюдение конечного неравенства

$$u(x, y) < z(x, y)$$

всюду, где удовлетворяется (4.2).

Геометрически это означает, что неизвестная нам интегральная поверхность

$$z = z(x, y)$$

---

* См. работу [7].

заключена между двумя аппроксимирующими листиками

$$u = u(x, y), \; v = v(x, y).$$

Проблема теперь ставится о быстроте сжимания бесконечной серии аппроксимирующих пар

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_n, v_n), \ldots$$

4. Краевая задача для уравнения второго порядка. С. А. Чаплыгин решил эту задачу [1] для уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - pw = 0. \tag{4.3}$$

Его результат состоит в следующем: если функция сравнения $u(x, y, z)$ имеет на замкнутой поверхности S те же самые значения, как и интеграл w, и если u делает положительной левую часть уравнения (4.3), то всюду внутри S имеем $w > u$.

5. Интегральное уравнение. Д. Ю. Панов [8] совершенно правильно указывает на то, что «основная идея методы С. А. Чаплыгина весьма широка и возможности ее применения в той или иной модификации не исчерпываются областью дифференциальных уравнений» (стр. 844, строки 5—7 сверху). Исходя из этой идеи, автор применяет найденные им интегральные неравенства, аналогичные дифференциальным неравенствам С. А. Чаплыгина, и полученные им «функции сравнения» к аппроксимации решений линейных и нелинейных интегральных уравнений типа Фредгольма. Остается на почве этих идей исследовать и уравнения типа Вольтерра.

6. Уравнение в конечных разностях. Применение метода С. А. Чаплыгина к такому уравнению представляет значительный интерес, так как это явилось бы моделью и для дифференциального уравнения. Здесь исследований совсем нет, и даже не намечены основные проблемы.

Заключение. Как я уже сказал, мой доклад является лишь отчетом о том, что̀ математики до сих пор сделали в отношении развития идей нашего классика, академика С. А. Чаплыгина, в области приближенного интегрирования.

Ввиду теоретической законченности метода для дифференциальных уравнений первого порядка здесь прежде всего нужно довести до конца исследования для уравнений первого же порядка в частных производных. Здесь исследователей ждет полный успех. Затем нужно довести до конца исследование линейных уравнений второго порядка в отношении точного отыскания предела применимости неравенств во всех без исключения случаях. Наконец, нужно исследовать доклад С. А. Чаплыгина о системах дифференциальных уравнений первого порядка.

Организовать это дело нужно путем привлечения к исследованию начинающих ученых, для которых оно послужило бы прекрасным опытом и пробой сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М., 1919. (Собр. соч., I, Гостехиздат, 1948, стр. 348—368).
2. Чаплыгин С. А. Приближенное интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Брошюра, изданная Комиссией особых артиллерийских опытов. М., 1920. (Собр. соч., I, стр. 402—419).
3. Чаплыгин С. А. Приближенное интегрирование системы двух дифференциальных уравнений. (Собр. соч., I, стр. 427—444).
4. Лузин Н. Н. О методе приближенного интегрирования С. А. Чаплыгина. Труды ЦАГИ, вып. 141, 1932.
5. Петров Б. Н. Граница применимости теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах к линейным уравнениям с обыкновенными производными второго порядка. АН СССР, ОТН, 1946, 51, № 5, 251—254.
6. Петров Б. Н. Неприменимость теоремы о дифференциальном неравенстве С. А. Чаплыгина к некоторым нелинейным уравнениям с обыкновенными производными второго порядка. АН СССР, ОТН, 1946, 51, № 7, 495—498.
7. Саваренский Е. Ф. Неограниченная применимость теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах к линейным уравнениям с частными производными первого порядка. АН СССР, ОТН, 51, № 5, 255—258.
8. Панов Д. Ю. О применении метода С. А. Чаплыгина к решению интегральных уравнений. Изв. АН СССР, ОМЕН, 1934, № 6, 843—886.

III

РАЗЛИЧНЫЕ СТАТЬИ ПО АНАЛИЗУ

ЗАМЕТКА О ЛЕММЕ ПУАНКАРЕ *

Чтение предыдущей статьи Н. М. Гюнтера ** навело меня на мысль отказаться от ограничения автора, касающегося употребления объемов, ограниченных поверхностями Ляпунова.

Вернемся к этому вопросу.

1. Речь идет о следующем предложении Пуанкаре: *если* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_n, \ldots$ *есть бесконечная последовательность функций, определенных внутри объема* V, *непрерывных вместе со своими частными производными первого порядка и линейно независимых между собою, то в* n*-мерном эвклидовом пространстве* $E(a_1, a_2 \ldots a_n)$ *можно определить такую прямую, чтобы в каждой ее точке* $P(a_1, a_2 \ldots a_n)$ *мы имели неравенство*:

$$\frac{\int \Delta_1 F\, d\tau}{\int F^2\, d\tau} > C\sqrt[3]{n^2},$$

где C *есть положительная константа, зависящая только от данного объема* V, *а*

$$\Delta_1 F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2, \quad F = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n$$

и интегралы распространены по объему V.

2. Сначала рассмотрим несколько весьма полезных неравенств. Пусть $F(x)$ есть функция, определенная на отрезке $[0 \leqslant x \leqslant b]$ и непрерывная вместе со своей производной $F'(x)$. Обозначим через J двойной интеграл:

$$\int [F(y) - F(x)]^2\, dx\, dy,$$

распространенный на площадь прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, где $a \leqslant b$. Я покажу, что имеет место следующее важное неравенство:

$$J < \left[\frac{a^3}{3} + \frac{ab}{2}(b - a)\right] \int\limits_0^b \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 dx.$$

---

* «Remarque sur un lemme de Poincaré». Математич. сборник, 1926, 33, вып. 4, 357—362.

** Там же, 357—362.

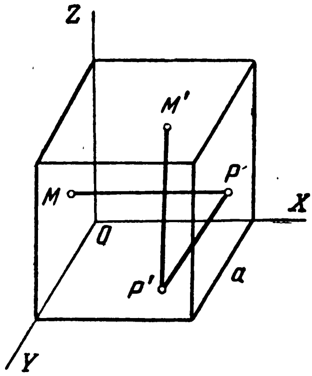
Мне достаточно будет применить неравенство Шварца к тождеству:

$$F(y) - F(x) = \int_x^y F'(t)\,dt.$$

В самом деле

$$J = \int \left[\int_x^y F'(t)\,dt\right]^2 dx\,dy \leqslant \int |y - x| \left|\int_x^y \left(\frac{dF}{dt}\right)^2 dt\right| dx\,dy <$$

$$< \int_0^b \left(\frac{dF}{ds}\right)^2 ds \int |y - x|\,dx\,dy = \left[\frac{a^3}{3} + \frac{ab}{2}(b - a)\right] \int_0^b \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 dx.$$



Фиг. 1

В частности, если $a = b$, мы имеем:

$$J = \frac{a^3}{3} \int_0^a \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 dx.$$

3. Пусть $F(x, y, z) = F(M)$ — функция, определенная внутри куба с ребром a и непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка. Обозначим через J шестикратный интеграл, распространенный по этому кубу:

$$J = \int [F(M') - F(M)]^2\,d\tau'\,d\tau,$$

где $d\tau'$ и $d\tau$ — элементы объема, содержащие соответственно произвольные точки $M'(x', y', z')$ и $M(x, y, z)$ куба. Я покажу, что мы имеем неравенство:

$$J < a^5 \int \Delta_1 F\,d\tau.$$

Мне достаточно будет определить две вспомогательных точки $P(x', y', z')$ и $P(x, y, z)$ и применить неравенство Шварца к тождеству:

$$F(M') - F(M) = 1 \cdot [F(M') - F(P')] + 1 \cdot [F(P') - F(P)] + \\ + 1 \cdot [F(P) - F(M)].$$

Таким образом мы получаем:

$$J < 3\int [F(M') - F(P')]^2\,d\tau'\,d\tau + 3\int [F(P') - F(P)]^2\,d\tau'\,d\tau + \\ + 3\int [F(P) - F(M)]^2\,d\tau'\,d\tau = J_1 + J_2 + J_3.$$

Применим теперь предыдущий результат к интегралу J_1. Мы имеем:

$$J_1 = 3a^2 \int [F(M') - F(P')]^2\,dx'\,dy'\,dz'\,dz < 3a^2 \int dx'\,dy'\,\frac{a^3}{3} \int \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)^2 dz' =$$

$$= a^5 \int \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 d\tau.$$

Аналогичным образом мы будем, очевидно, иметь:

$$J_2 < a^5 \int \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 d\tau \quad \text{и} \quad J_3 < a^5 \int \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 d\tau.$$

Отсюда имеем окончательно:

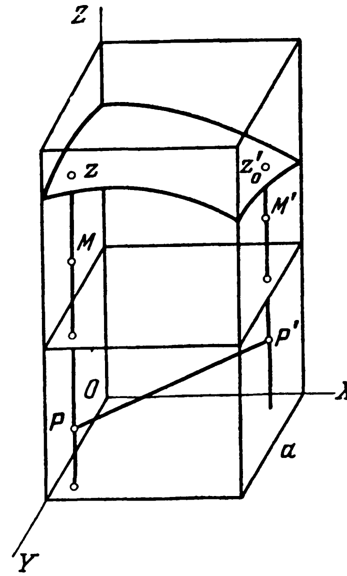
$$J < a^5 \int \Delta_1 F \, d\tau.$$

4. Возьмем теперь объем V, ограниченный: цилиндром, поперечное сечение которого является квадратом со стороною a, плоскостью XOY и поверхностью $Z = f(x, y)$, где функция f непрерывна и удовлетворяет неравенствам

$$a < f < 3a.$$

Пусть $F(x, y, z)$ есть функция, определенная внутри V и непрерывная вместе со всеми частными производными первого порядка. Обозначим через J шестикратный интеграл, распространенный по этому объему V:

$$J = \int [F(M') - F(M)]^2 \, d\tau' \, d\tau.$$



Фиг. 2

Я покажу, что мы имеем основное неравенство:

$$J < 47 \, a^4 V \int \Delta_1 F \, d\tau.$$

Для доказательства определим в нижнем кубе две точки $P(x, y, \zeta)$ и $P'(x', x', \zeta')$, где $0 \leqslant \zeta \leqslant a$ и $0 \leqslant \zeta' \leqslant a$, и применим неравенство Шварца к тождеству:

$$F(M') - F(M) = 1 \cdot [F(M') - F(P')] + 1 \cdot [F(P') - F(P)] + \\ + 1 \cdot [F(P) - F(M)].$$

Таким образом мы получим:

$$a^2 J < 3 \int [F(M') - F(P)]^2 \, d\tau' \, d\tau \, d\zeta' \, d\zeta + 3 \int [F(P') - F(P)]^2 \, d\tau' \, d\tau \, d\zeta' \, d\zeta + \\ + 3 \int [F(P) - F(M)]^2 \, d\tau' \, d\tau \, d\zeta' \, d\zeta = J_1 + J_2 + J_3.$$

Если мы используем результат § 2, то получим:

$$J_1 = 3a \, V \int [F(M') - F(P')]^2 \, d\tau' \, d\zeta' = \\ = 3a \, V \int dx' \, dy' \int [F(M') - F(P')]^2 dz' \, d\zeta' < \\ < 3a \, V \int dx' \, dy' \left[\frac{a^3}{3} + \frac{aZ'}{2}(Z' - a)\right] \int\limits_0^{Z'} \left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)^2 dz',$$

где мы обозначаем через Z' значение $f(x', y')$. Так как $a \leqslant Z' \leqslant 3a$, то мы можем написать:

$$J_1 < 10a^4 V \int \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)^2 d\tau'.$$

Аналогичным образом мы имеем неравенство:

$$J_3 < 10a^4 V \int \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 d\tau.$$

Переходим к подсчету интеграла J_2. Применение предыдущего результата (§ 3) дает нам:

$$J_2 = 3 \int ZZ' [F(P') - F(P)]^2 \, dx\, dy\, d\zeta\, dx'\, dy'\, d\zeta' =$$

$$= 3 \int ZZ' [F(P') - F(P)]^2 \, d\tau'\, d\tau < 27\, a^2 a^5 \int \Delta_1 F\, d\tau < 27 a^4 V \int \Delta_1 F\, d\tau.$$

В конце концов:

$$J < 47a^2 V \int \Delta_1 F\, d\tau,$$

где интеграл распространен по всему объему V.

5. В заключение возьмем или куб с ребром a, или тело, рассмотренное в предыдущем параграфе; обозначим через V рассматриваемое тело. Пусть $F(x, y, z)$ есть функция, определенная в V, непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка и такая, что мы имеем $\int F\, d\tau = 0$, где интеграл распространен по объему V. Я утверждаю теперь, что мы имеем:

$$\frac{\int \Delta_1 F\, d\tau}{\int F^2\, d\tau} > \frac{1}{24a^2}.$$

В самом деле, в силу равенства $\int F\, d\tau = 0$ мы имеем:

$$J = \int [F(M') - F(M)]^2 \, d\tau'\, d\tau = 2V \int F^2\, d\tau.$$

Следовательно,

$$2V \int F^2\, d\tau < 47a^2 V \int \Delta_1 F\, d\tau.$$

6. Установив это, вернемся к предложению Пуанкаре. Пусть V есть объем, ограниченный одной или несколькими такими поверхностями (S), в конечном числе, без кратных точек и попарно без общих точек, что касательная плоскость, определенная в каждой точке M поверхности (S), меняется непрерывно вместе с положением точки M. Заключим объем V в куб K с ребром Λ, ориентированный по осям координат, и допустим, что грани куба не содержат ни одной точки поверхности (S).

Возьмем произвольное положительное целое число n и определим такое целое положительное число p, чтобы мы имели $p^3 \leqslant n < (p+1)^3$.

Разделим куб K на p^3 малых кубов равноотстоящими плоскостями, параллельными плоскостям координат. Обозначим через (Σ) систему малых кубов $\varkappa$, которые принадлежат объему V, и через (Σ') — систему малых кубов $\varkappa'$, содержащих каждый внутри себя (в узком смысле) точки поверхности (S).

Установив это, поставим в соответствие каждому кубу $\varkappa'$ системы (Σ') некоторую внутреннюю точку M', принадлежащую поверхности (S). Пусть N' — внутренняя нормаль в точке M'. Обозначим через D' направление той оси координат, которая образует наименьший угол с N'. В силу известных свойств поверхностей, у которых нормаль меняется непрерывно, мы знаем, что каждая прямая D, параллельная D' и имеющая общие точки с кубом $\varkappa'$, пересекает поверхность (S) в окрестности точки M' в одной и только одной точке M. Так как поверхность (S) имеет в точке M' определенную касательную плоскость, перпендикулярную к N', то множество этих точек M содержится или только в кубе $\varkappa'$, или в соединении куба $\varkappa'$ и куба $\varkappa_1'$ системы (Σ'), имеющего общую грань с кубом $\varkappa'$.

Отсюда следует, что если присоединить к $\varkappa'$ или к соединению $\varkappa'$ и $\varkappa_1'$ такой новый куб $\varkappa$, непосредственно соседний в направлении D', чтобы он имел общую грань с $\varkappa'$ или с $\varkappa_1'$, то этот новый куб $\varkappa$ необходимо будет принадлежать системе (Σ). Отсюда мы немедленно заключаем, что множество точек объема V, которые принадлежат соединению кубов $\varkappa'$ и $\varkappa$ или же соединению кубов $\varkappa'$, $\varkappa_1'$ и $\varkappa$, образуют как раз объем, рассмотренный нами в § 4; обозначим его через V'. Пусть (Σ_1) есть система тех кубов $\varkappa_1$ системы (Σ), которые не составляют части ни одного из этих малых объемов V'.

Очевидно, что каждая точка M всего объема V принадлежит или одному и только одному кубу $\varkappa_1$ системы (Σ_1), или же самое большее трем малым объемам V'.

Отсюда мы выводим, что

$$3\int \Delta_1 F\, d\tau > \Sigma \int \Delta_1 F\, d\tau,$$

где интеграл в левой части распространен по всему объему V, а правая часть является суммой интегралов, распространенных соответственно по всем малым объемам V' и по всем кубам $\varkappa_1$ системы (Σ_1).

Отсюда мы получаем неравенство:

$$\frac{\int \Delta_1 F\, d\tau}{\int F^2\, d\tau} = \frac{3\int \Delta_1 F\, d\tau}{3\int F^2\, d\tau} > \frac{\sum\int \Delta_1 F\, d\tau}{3\sum\int F^2\, d\tau},$$

где суммы распространены на все $\varkappa_1$ и V'.

Так как число кубов $\varkappa_1$ и объемов V', очевидно, самое большее равно $n-1$, мы всегда можем выбрать постоянные $a_1, a_2, \ldots, a_n$, входящие в равенство $F = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n$, таким образом, чтобы мы имели $\int F\, d\tau = 0$, каков бы ни был куб $\varkappa_1$, или малый объем V', по которому распространен этот интеграл. Тогда, в силу § 5, мы будем иметь:

$$\frac{\int \Delta_1 F \, d\tau}{\int F^2 \, d\tau} > \frac{1}{24\left(\frac{\Lambda}{p}\right)^2},$$

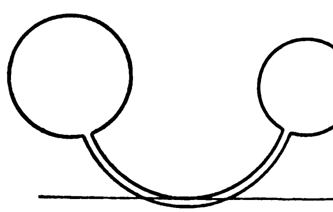
каковы бы ни были x_1 и V'.

В конце концов мы имеем при достаточно большом n:

$$\frac{\int \Delta_1 F \, d\tau}{\int F^2 \, d\tau} > \frac{p^2}{72\,\Lambda^2} > \frac{1}{72\,\Lambda^2}\sqrt[3]{n^2},$$

причем интегралы распространены по всему объему V. Но это неравенство и выражает предложение Пуанкаре.

7. Таким образом, мы видим, что если данный объем ограничен поверхностью (S) без кратных точек, имеющей касательную плоскость, меняющуюся непрерывно, то предложение Пуанкаре применимо. Пришлось бы проделать значительную работу, чтобы узнать, каково необходимое



Фиг. 3

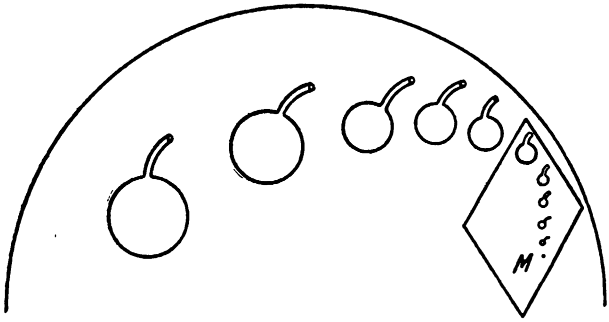
и достаточное условие, которому должна удовлетворять поверхность (S), чтобы это предложение Пуанкаре было применимо, но можно опасаться, что эта работа бесполезна или, во всяком случае, непропорциональна своей полезности, по крайней мере в настоящее время. Поэтому я ограничусь лишь указанием поверхности (S), имеющей определенную касательную плоскость в каждой точке и к которой предложение Пуанкаре тем не менее неприменимо.

Если мы имеем объем V, образованный двумя сферами, соединенными правильным криволинейным очень тонким каналом (фиг. 3), константа K Пуанкаре[1] тем меньше, чем тоньше канал. Это можно проверить, положив F равным $+AV_1^{-1}$ в одной сфере и равным $-AV_2^{-1}$ в другой, и линейно интерполируя в канале; здесь V_1 и V_2 — объемы сфер, A — очень большая положительная постоянная.

---

[1] Здесь речь идет о нижнем пределе отношения $\int\limits_{(V)} \Delta_1 F \, d\tau : \int\limits_{(V)} F^2 \, d\tau$, причем функция F имеет непрерывные вторые производные.

Отсюда следует, что поверхность (S), содержащая предельную точку сфер с бесконечно малыми и бесконечно тонкими каналами (фиг. 4), не



Фиг. 4

может удовлетворять предложению Пуанкаре, хотя она имеет касательную плоскость в каждой своей точке, в том числе даже в предельной точке.

Проверочный расчет нетруден.

К ТЕОРЕТИЧЕСКОМУ ОБОСНОВАНИЮ ПЕРИОДОГРАММ *

Глава 1

ПЕРИОДИЧНОСТЬ И ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧНОСТЬ

§ 1. **Введение.** Цель настоящей статьи — пересмотр приобревших широкую известность приемов анализа для выяснения периодичности эмпирически данных кривых. Техника этих приемов давно выработана и, в практическом применении, нередко дает превосходные результаты. Тем не менее остается не вполне ясной та граница, до которой применимость этих приемов совершенно надежна и за которой они могут давать фантастические результаты, не имеющие ничего общего с сущностью явления. Вследствие этого такой пересмотр является, по нашему мнению, в настоящий момент вполне целесообразным.

§ 2. **Чистая периодичность.** Чисто-периодической или просто периодической называется функция, воспроизводящаяся при прибавлении к аргументу x постоянного числа p, называемого периодом:

$$f(x+p)=f(x).$$

Мы преимущественно ограничиваемся рассмотрением лишь непрерывных функций $f(x)$, определенных всюду на бесконечном интервале $(-\infty < x < +\infty)$. Геометрически такая функция изображается кривой, представляющей ряд следующих одна за другой тождественных волн.

Если $f(x)$ есть функция с ограниченным изменением (непрерывная или разрывная), тогда она разложима в ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi}{p}nx+b_n\sin\frac{2\pi}{p}nx\right), \tag{1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_n&=\frac{2}{p}\int_0^p f(\alpha)\cos\frac{2\pi}{p}n\alpha\,d\alpha,\\ b_n&=\frac{2}{p}\int_0^p f(\alpha)\sin\frac{2\pi}{p}n\alpha\,d\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

---

* Данная статья является докладом об основаниях метода периодограмм, сделанным в Московском геофизическом институте по приглашению заместителя директора Института проф. С. С. Ковнера. Этот доклад был прочтен в извлечении на заседании Института, состоявшемся 26 октября 1933 г.

Известно, что в сделанном предположении относительно функции $f(x)$ ряд Фурье будет всюду сходящимся. Если $[a, b]$ есть отрезок (замкнутый), в каждой точке которого (включая концы) функция $f(x)$ есть непрерывная на оси OX, тогда ряд Фурье для $f(x)$ есть равномерно сходящийся к $f(x)$. Если какая-либо точка c есть точка разрыва для $f(x)$, тогда $f(c-0)$ и $f(c+0)$ существуют, так как мы предположили функцию $f(x)$ с ограниченным изменением. В этом случае ряд Фурье для $f(x)$ будет сходящимся и в точке c, причем его сумма $S(x)$ в этой точке будет равна среднему арифметическому $f(c-0)$ и $f(c+0)$, т. е. $S(c) = \frac{f(c-0)+f(c+0)}{2}$. Поэтому, отождествляя $S(x)$ и $f(x)$, для случая разрывной функции $f(x)$ с ограниченным изменением, мы впредь будем всегда предполагать, что $f(x)$ в точке разрыва всегда равна среднему арифметическому ее правого и левого значений в этой точке. Вспомним к тому же, что точек разрыва у функции с ограниченным изменением может иметься лишь счетное множество.

Наконец, при сделанном предположении относительно функции $f(x)$, коэффициенты a_n и b_n ее ряда Фурье будут порядка малости не выше, чем $\frac{1}{n}$, так как

$$|a_n| < \frac{M}{n} \quad \text{и} \quad |b_n| < \frac{M}{n},$$

где M есть положительное постоянное.

§ 3. **Преобразование ряда Фурье.** Для целей дальнейших и глубоко лежащих аналогий является необходимым дать другую форму ряду Фурье, вводя употребление мнимых чисел.

С этой целью сначала положим:

$$a_{-n} = a_n \quad \text{и} \quad b_{-n} = -b_n.$$

Это дает нам возможность написать

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{a_n}{2}\cos\frac{2\pi}{p}nx + \frac{b_n}{2}\sin\frac{2\pi}{p}nx\right),$$

где значок $'$, поставленный над знаком суммы, обозначает неполноту этой последней, именно отсутствие члена для $n = 0$.

Ясно, что, вводя недостающий член под знак суммы, мы имеем право написать:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\widetilde{a}_n\cos\frac{2\pi}{p}nx + \widetilde{b}_n\sin\frac{2\pi}{p}nx\right),$$

где полагаем:

$$\widetilde{a}_n = \frac{a_n}{2} \quad \text{и} \quad \widetilde{b}_n = \frac{b_n}{n}$$

для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

В этом обозначении имеем:

$$\widetilde{a}_n = \frac{1}{p}\int_0^p f(\alpha)\cos\frac{2\pi}{p}n\alpha\, d\alpha \quad \text{и} \quad \widetilde{b}_n = \int_0^p \frac{1}{p} f(\alpha)\sin\frac{2\pi}{p}n\alpha\, d\alpha.$$

Введем, наконец, последнее обозначение и положим:

$$A_n = a_n - ib_n,$$

где $i = \sqrt{-1}$.

С этим обозначением мы имеем:

$$A_n = \frac{1}{p}\int_0^p f(\alpha)\, e^{-i\frac{2\pi}{p}n\alpha}\, d\alpha \tag{3}$$

и, следовательно, самый ряд Фурье напишется в виде:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{i\frac{2\pi}{p}nx}. \tag{4}$$

Числа

$$\frac{2\pi}{p}n, \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{5}$$

называются показателями Фурье для $f(x)$.

В этих обозначениях важная теорема из теории рядов Фурье, называемая равенством Парсеваля и выражающаяся равенством:

$$\frac{1}{p}\int_0^p f^2(\alpha)\, d\alpha = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2}\right),$$

перепишется просто в виде:

$$\frac{1}{p}\int_0^p |f(\alpha)|^2\, d\alpha = \sum_{-\infty}^{+\infty} |A_n|^2. \tag{6}$$

Заметим, наконец, что важное в теории рядов Фурье неравенство Бесселя:

$$\frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^2}{2} + \frac{b_k^2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{p}\int_0^p |f(\alpha)|^2\, d\alpha$$

теперь перепишется в виде:

$$\Sigma\, |A_n|^2 \leqslant \frac{1}{p}\int_0^p |f(\alpha)|^2\, d\alpha, \tag{7}$$

где знак Σ может обозначать просто часть бесконечного ряда, стоящего направо в равенстве Парсеваля, притом совершенно неважно, какую именно.

§ 4. Аналитическое изображение чисто-периодических функций. В предыдущих параграфах мы предположили чисто-периодическую функцию $f(x)$ функцией с ограниченным изменением и даже непрерывной. Если мы сохраним для функции $f(x)$ лишь предположение непрерывности (на всей оси абсцисс) без того, чтобы требовать у ней ограниченности изменения, то тогда можно еще продолжать говорить о ее ряде Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{i\frac{2\pi}{p}nx}, \tag{4*}$$

где

$$A_n = \frac{1}{p}\int_0^p f(\alpha) e^{-i\frac{2\pi}{p}n\alpha} d\alpha. \tag{3}$$

Только в этом случае, вообще говоря, ряд Фурье может быть и расходящимся (по крайней мере в отдельных точках); поэтому здесь приходится говорить уже не о «разложении» — в точном смысле этого слова — функции $f(x)$ в ряд Фурье, но лишь о соответствии данной непрерывной периодической функции ее ряду Фурье (4*), коэффициенты которого определяются по тем же самым формулам (3), как и тогда, когда $f(x)$ есть функция с ограниченным изменением и когда, следовательно, ее ряд Фурье есть везде сходящийся. Поэтому знак $=$ разложения в собственном смысле здесь заменен знаком $\sim$ соответствия функции ее ряду Фурье.

И, однако, всякая непрерывная периодическая функция $f(x)$ разложима в равномерно сходящийся ряд на всей области $(-\infty < x < +\infty)$, только членами этого ряда будут уже не тригонометрические функции $e^{i\frac{2\pi}{p}nx}$, а линейные их комбинации.

Таких разложений бесчисленное множество. Чтобы иметь одно из них достаточно применить процесс Фейера, т. е. введя обозначение

$$s_n(x) = \sum_{-n}^{+n} A_k e^{i\frac{2\pi}{p}kx},$$

составить отношение:

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_n(x)}{n+1}.$$

В этом случае, согласно знаменитой теореме Фейера, мы имеем равномерно на всей области $(-\infty < x < +\infty)$ равенство:

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \sigma_n(x).$$

Так как простой подсчет нам немедленно дает.

$$\sigma_n(x) = \sum_{-n}^{+n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) A_k e^{i\frac{2\pi}{p}kx},$$

то, введя дополнительные обозначения

$$L_0(x) = A_0$$

и

$$L_n(x) = \sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x),$$

мы видим, что $L_n(x)$ есть линейное выражение вида:

$$L_n(x) = \sum_{-n}^{+n} \rho_{k,n} A_k e^{i\frac{2\pi}{p}kx},$$

где $\rho_{k,n}$ есть числовой коэффициент, зависящий лишь от k и n.

С этим обозначением мы, очевидно, имеем

$$f(x) = L_0(x) + L_1(x) + \cdots + L_n(x) + \cdots$$

равномерно на всей оси абцисс. Это и дает нам искомое аналитическое изображение произвольной чисто-периодической непрерывной функции $f(x)$ на всей области $(-\infty < x < +\infty)$ с помощью равномерно сходящегося ряда конечных линейных выражений от членов ряда Фурье для данной функции $f(x)$.

§ 5. **Почти периодические функции.** В 1925 г. в «Acta Mathematica» появилась фундаментальная работа Гаральда Бора, содержащая одно из тех ценных в математике открытий, которые не часто выпадают на ее долю: это открытие состояло в определении и выявлении свойств чрезвычайно важного класса функций, представляющих естественнейшее расширение класса чисто-периодических функций. Функции эти, названные Бором почти-периодическими, имеют многочисленные приложения к математическому анализу, небесной механике и физике. Законы, управляющие почти-периодическими функциями, столь стройны и столь естественно продолжают соответственные законы, которым подчинены чисто-периодические функции, что произошла неожиданная вещь: давно нам известные и давно привычные законы чисто-периодических функций, относительно которых, казалось, было сказано уже все и к которым, по-видимому, нельзя было добавить ничего нового, эти самые законы внезапно получили совсем новое освещение и дали возможность нового их понимания при свете теории почти-периодических функций: некоторые результаты из теории чисто-периодических функций, казавшиеся нам просто «фактами», не нуждавшимися в объяснениях, получили внезапно совсем новый смысл.

Справедливость требует, впрочем, добавить, что теории почти-периодических функций Бора предшествовала чрезвычайно глубокомысленная работа Боля (магистерская диссертация, 1893 г.), где рассматривался класс функций, хотя и более узкий, чем класс почти-периодических функций Бора, но зато значительно расширявший класс чисто-периодических функций: это так называемые квази-периодические функции, представляющие собой конечные суммы чисто-периодических функций с взаимно несоизмеримыми периодами. С того времени квази-периодические функции не раз служили предметом работ таких авторов, как Аппелль, Пикар, Эсклангон. Нам кажется, что неважно то, что Бор не знал того или иного частного мемуара Боля или Эсклангона; важно, что ко времени работ

Бора изыскания о квази-периодических функциях начали приобретать систематичность и, по-видимому, было затруднительно не подвергнуться их влиянию, хотя бы и бессознательно[1]. Так, например, в настоящий момент невозможно, размышляя о функциях мнимого переменного, не подвергнуться влиянию мысли Вейерштрасса, хотя бы не прочтя ни одной строчки его трудов. Часть, принадлежащая Бору в концепции почти-периодических функций и в их теории, достаточно велика и прекрасна, чтобы оказалось нужным пытаться ее увеличить еще более, оставляя в тени истинного инициатора и предшественника в счастливой и ценной попытке выйти за класс чисто-периодических функций — Боля: если квази-периодические функции Боля суть конечные суммы чисто-периодических функций с несоизмеримыми периодами, то почти-периодические функции Бора суть суммы равномерно-сходящихся рядов конечных сумм чисто-периодических функций [2].

Для естествознания квази-периодические функции ценны тогда, когда изучаемый феномен подозревается зависящим от нескольких (теоретически: от конечного числа) чисто-периодических феноменов с несоизмеримыми периодами. Почти-периодические же функции ценны тогда, когда изучаемый феномен подозревается зависящим от чрезвычайно большого (теоретически: от бесконечного) числа чисто-периодических феноменов с несоизмеримыми периодами.

Но теория почти-периодических функций, конечно, покрывает теорию квази-периодических функций, так как всегда можно считать, что чисто-периодические феномены находятся, формальным образом, в бесконечном числе, причем все они, кроме конечного числа их, имеют нулевую амплитуду, когда речь идет о квази-периодических функциях.

§ 6. Определение почти-периодической функции. Это определение, данное Бором, есть чрезвычайно естественное расширение определения чисто-периодической функции.

Мы знаем, что непрерывная функция $f(x)$ называется чисто-периодической, когда она воспроизводится при прибавлении к аргументу x

[1] Проф. А. И. Плесснеру я обязан существенным указанием на то, что работы Эсклангона: «Les fonctions quasi-périodiques (Thèse, Paris, 1904) и «Nouvelles recherches sur les fonctions quasi-périodiques» (Annales Obs. Bordeaux, 1919), собственно, в некоторых пунктах текут уже в русле позднейших изысканий Бора, так как Эсклангон рассматривает и случаи соединения бесконечного множества чисто-периодических функций разных периодов, называя такие функции квази-периодическими функциями бесконечного порядка.

[2] С глубоким удовлетворением мы отмечаем здесь же, что один из самых важных и действительно, по идее, существенно новых результатов, найденных уже после завершения Бором теории почти-периодических функций, получен у нас. Профессору В. В. Степанову принадлежит одно из важнейших и наиболее естественных определений разрывной почти-периодической функции. Ему же принадлежат первые основные результаты, вытекающие из этого определения и оказавшиеся совершенно аналогичными фундаментальным результатам теории Бора. Идеи В. В. Степанова тотчас же нашли многочисленные отзвуки в последовавших за тем работах Вейля, Винера, Безиковича и самого Бора, стремящихся путем дальнейшего следования по пути, открытому В. В. Степановым, довершить дело перенесения важной теоремы Фишера — Риса из области чисто-периодических функций в расширенную таким образом область почти-периодических функций (в уже новом смысле).

постоянного числа p, называемого периодом:

$$f(x+p)=f(x). \tag{I}$$

При этом ясно, что всякое число, кратное числу p, т. е.

$$\cdots -3p,\ -2p, -p,\ 0,\ p,\ 2p,\ 3p, \cdots,$$

будет также периодом рассматриваемой чисто-периодической функции $f(x)$.

Вот теперь определение Бора: непрерывная функция $f(x)$, определенная всюду на области $(-\infty < x < +\infty)$, называется почти-периодической, когда она воспроизводится с точностью до ε при прибавлении к аргументу x каждого из чисел τ:

$$\cdots,\ \tau_{-3},\ \tau_{-2},\ \tau_{-1},\ 0,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3 \cdots,$$

называемых почти-периодами, соответствующими числу ε, т. е. когда

$$|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon. \tag{II}$$

При этом непременно предполагается, что расстояния двух соседних τ_k и τ_{k+1} остаются ограниченными сверху и снизу [1] для всякого ε; здесь, как и везде в дальнейшем, ε обозначает какое-нибудь фиксированное положительное число, могущее быть взятым сколь угодно малым.

Мы замечаем, что имеется, в самом деле, как бы совершенная аналогия определений: чистой периодичности и почти-периодичности. К тому же ясно, что непрерывные чисто-периодические функции образуют лишь частный случай почти-периодических функций.

§ 7. Первые следствия определения почти-периодичности. Здесь не место развивать сколько-нибудь подробно теорию почти-периодических функций, которую читатель должен искать в специальной книжке. Таким образом, мы ограничимся лишь тем, что просто перечислим главнейшие из этих следствий, указав затем нужные нам теоремы из теории почти-периодических функций.

Первым из важнейших следствий определения почти-периодичности является:

а) всякая почти-периодическая функция $f(x)$ есть функция, ограниченная и равномерно-непрерывная на всей области $(-\infty < x < +\infty)$.

Вторым важнейшим следствием является:

б) почти-периодичность сохраняется, когда над почти-периодическими функциями проделывают первые четыре действия арифметики, лишь бы действия эти проделывались конечное число раз, причем действие деления лишь над такими функциями, модуль которых превосходит некоторое положительное постоянное.

---

[1] Ограниченность сверху и снизу расстояний соседних точек τ_k и τ_{k+1} ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) означает, по самому ее определению, что имеются такие два существенно-положительных числа m и M, которые заставляют удовлетворяться неравенство $m < \tau_{k+1}-\tau_k < M$ при любом целом k.

Наконец третьим важнейшим следствием является:

в) сумма равномерно сходящегося на всей области ($-\infty < x < +\infty$) ряда почти-периодических функций есть почти-периодическая функция.

В частности, весьма замечательное предложение выводится отсюда как частный случай:

всякий равномерно сходящийся ряд

$$L_1(x) + L_2(x) + \ldots + L_n(x) + \ldots,$$

в котором каждый член $L(x)$ обозначает конечную линейную комбинацию вида

$$ae^{i\lambda x} + be^{i\mu x} + \cdots + re^{i\rho x},$$

где числа $a, b, \ldots, r$ суть какие-нибудь действительные или мнимые и где $\lambda, \mu, \ldots, \rho$ действительные, имеет суммою почти-периодическую функцию.

В самом деле, если ν есть действительное число, функция $e^{i\nu x}$ есть непрерывная чисто-периодическая функция с периодом $\frac{2\pi}{\nu}$, и, значит, каждый член $L(x)$ рассматриваемого ряда есть квази-периодическая, т. е. почти-периодическая функция.

§ 8. Аналитическое изображение почти периодических функций. Предыдущее предложение весьма замечательно, так как дает способ образовывать бесчисленное множество почти-периодических функций. Но еще более замечательно обратное предложение, являющееся одним из наиболее прекрасных открытий Бора, в силу которого всякая почти периодическая функция $f(x)$ есть сумма равномерно сходящегося ряда

$$L_1(x) + L_2(x) + \cdots + L_n(x) + \cdots,$$

в котором каждый член $L(x)$ есть конечная линейная комбинация вида

$$ae^{i\lambda x} + be^{i\mu x} + \cdots + re^{i\rho x},$$

где числа $a, b, \cdots, r$ суть какие-нибудь, действительные или мнимые и где все показатели $\lambda, \mu, \cdots, \rho$ суть действительные.

В то время как доказательство аналогичного предложения для чисто-периодических функций не представляет никаких затруднений (см. § 4), доказательство указанной обратной теоремы Бора представляет большие трудности, преодолеть которые элементарными средствами (т. е. исходя из самого определения почти-периодической функции и чисто логическим путем, без введения каких-либо аналитических аппаратов) при современном состоянии науки еще не удалось.

§ 9. Средняя величина почти-периодической функции. Известно, что средней величиной заданной непрерывной функции $f(x)$ на каком-нибудь отрезке $\delta = [a, b]$ называется выражение:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha.$$

Эту среднюю величину мы будем обозначать символом

$$C_\delta\{f(x)\}.$$

Это же самое определение, разумеется, приложимо к почти-периодическим функциям. Только здесь, для этих функций, обнаруживается особое явление, открытое Бором и состоящее в том, что

Среднее $C_\delta\{f(x)\}$ для почти-периодической функции $f(x)$ всегда стремится к одному и тому же конечному пределу, когда длина отрезка δ безгранично возрастает, причем этот предел совершенно не зависит от того, как при этом перемещается самый отрезок δ.

Вследствие этого замечательного свойства почти-периодических функций естественно этот предел назвать просто «средним» рассматриваемой почти-периодической функции $f(x)$ и обозначить его символом

$$C\{f(x)\} \text{ или } C\{f\}.$$

Таким образом, среднее $C\{f(x)\}$ почти-периодической функции $f(x)$ есть совершенно определенное конечное число, ей отвечающее.

Вследствие того, что среднее $C\{f(x)\}$ получается как предел среднего $C_\delta\{f(x)\}$ при любом изменении отрезка δ, лишь бы длина его безгранично увеличивалась, т. е. по формуле

$$C\{f(x)\} = \lim C_\delta\{f(x)\},$$

когда длина $\delta \to +\infty$, мы можем, в частности, написать:

$$C\{f(x)\} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\alpha)\,d\alpha. \tag{8}$$

Из этой формулы сразу следует, что в том случае, когда $f(x)$ есть, чисто-периодическая непрерывная функция, имеющая своим периодом p, тогда среднее $C\{f(x)\}$ дается простой формулой:

$$C\{f(x)\} = \frac{1}{p}\int_0^p f(\alpha)\,d\alpha. \tag{9}$$

Для доказательства достаточно заметить, что, полагая $T = mp$, где m есть целое положительное, мы имеем:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{mp}\int_0^{mp} f(\alpha)\,d\alpha = \frac{m\int_0^p f(\alpha)\,d\alpha}{mp} = \frac{1}{p}\int_0^p f(\alpha)d\alpha.$$

Отсюда ясно, что получаем формулу (9), делая m бесконечно-возрастающим.

Полученная важная формула (8) позволяет совсем иначе написать коэффициенты Фурье для чисто-периодической непрерывной функции $f(x)$. Действительно, обращаясь для этого к формуле (3), дающей выражение коэффициентов Фурье, и замечая, что в рассматриваемом случае $f(x)$ и $e^{-i\frac{2\pi}{p}nx}$ обе суть чисто-периодические непрерывные функции с периодом p, и, значит, их произведение $f(x)\,e^{-i\frac{2\pi}{p}nx}$ является такой же функцией, мы просто имеем:

$$A_n = C\left\{f(x)\,e^{-i\frac{2\pi}{p}nx}\right\}, \tag{3'}$$

где число n есть целое (отрицательное, нуль, положительное), $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Самый же ряд Фурье для непрерывной чисто-периодической функции $f(x)$ сначала может быть просто написан в виде:

$$f(x) \backsim \sum_n A_n e^{i\frac{2\pi}{p}nx}, \tag{4'}$$

где подразумевается, что n пробегает целые числа (те и только те, для которых $A_n \neq 0$). Для дальнейшего преобразования ряда Фурье напомним, что для чисто-периодической функции $f(x)$ числа

$$\frac{2\pi}{p}n, \tag{5}$$

где n есть всякое целое, для которого $A_n \neq 0$, называются показателями Фурье для $f(x)$. Так как для данной чисто-периодической непрерывной функции $f(x)$, имеющей p своим периодом, показатели Фурье (5) образуют лишь счетное (или конечное) множество, то их можно перенумеровать целыми положительными числами, написав, следовательно, все показатели Фурье для рассматриваемой функции $f(x)$ в виде:

$$\Lambda_1,\ \Lambda_2, \ldots,\ \Lambda_m, \ldots \tag{5*}$$

Введя фундаментальное обозначение (5*) для показателей Фурье функции $f(x)$, мы можем теперь переписать в другом виде коэффициенты Фурье, самый ряд Фурье и вообще все формулы, относящиеся к чисто-периодическим непрерывным функциям.

Прежде всего, формула (3′) показывает, что коэффициент A_n ряда Фурье порождается, собственно, не знаком n, а соответствующим ему показателем Фурье $\frac{2\pi}{p}n$. Но в ряду (5*) этот показатель занимает вполне определенное m-е место. Поэтому мы имеем:

$$\frac{2\pi}{p}n = \Lambda_m.$$

Естественно поэтому соответствующий коэффициент снабдить не значком n, а значком m, и, значит, написать коэффициенты Фурье для рассматриваемой функции $f(x)$ в виде:

$$A_m = C\{f(x)e^{-i\Lambda_m x}\}. \tag{3*}$$

Самый же ряд Фурье для $f(x)$ тогда напишется в виде:

$$f(x) \backsim \sum_m A_m e^{i\Lambda_m x}. \tag{4**}$$

Соответственно этому, формула Парсеваля для $f(x)$ напишется в виде:

$$\sum_m |A_m|^2 = C\{|f(x)|^2\}, \tag{6*}$$

так как, если $f(x)$ есть чисто-периодическая и непрерывная функция, то модуль ее $|f(x)|$ и его квадрат являются такими же функциями.

Наконец, неравенство Бесселя напишется в виде:

$$\Sigma |A_m|^2 \leqslant C\{|f(x)|^2\}, \tag{7*}$$

где знак суммы Σ, без указания внизу значка m полного суммирования, напоминает, что, вообще говоря, берется не вся сумма членов $|A_m|^2$, а произвольная ее часть.

§ 10. Неравенство Бесселя для почти-периодических функций и его значение. В высшей степени важным является перенос на почти-периодические функции неравенства Бесселя. Этот перенос влечет за собой чрезвычайно значительные следствия для самих почти-периодических функций.

Мы начинаем с указания того, что функция e^{ikx} есть непрерывная и чисто-периодическая, когда K есть постоянное действительное число. Ее среднее

$$C\{e^{iKx}\}$$

есть поэтому вполне определенное конечное число, зависящее от величины K. Если $K = 0$, мы имеем, очевидно,

$$C\{1\} = 1,$$

если же $K \neq 0$, то, как показывает непосредственный подсчет, мы имеем:

$$C\{e^{iKx}\} = 0, \quad K \neq 0.$$

Таким образом, мы имеем:

$$C\{e^{iKx}\} = \begin{cases} 1, & \text{если } K = 0, \\ 0, & \text{если } K \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что, рассматривая в произведении двух чисто-периодических функций $e^{i\Lambda x} \times e^{i\lambda x}$ действительное число Λ как данное и фиксированное, а действительное количество λ как переменную величину, мы имеем:

$$C\{e^{i\Lambda x} e^{-i\lambda x}\} = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda = \Lambda, \\ 0, & \text{если } \lambda \neq \Lambda. \end{cases}$$

Таким образом, написанное среднее, рассматриваемое как функция действительного переменного λ, оказывается равным нулю всюду, кроме одной лишь точки Λ, где эта функция равна единице.

Это дает мысль, взяв произвольную, но совершенно определенную почти-периодическую функцию $f(x)$, рассмотреть произведение

$$f(x)\cdot e^{-i\lambda x},$$

где λ есть действительное переменное. Ясно, что произведение есть почти периодическая функция и, значит, ее среднее

$$C\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\} = a(\lambda)$$

есть некоторая функция (вспомогательная) $a(\lambda)$ действительного переменного λ, конечная и вполне определенная для всякого значения λ.

Ближайшей целью является ознакомление с этой вспомогательной функцией $a(\lambda)$.

Для этого дадим аргументу λ произвольные различные друг от друга значения

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\ \lambda_N,$$

взятые в каком-нибудь конечном числе N, и рассмотрим сумму

$$\sum_{r=1}^{r=N} c_r e^{i\lambda_r x}.$$

Ясно, что это есть квази-периодическая функция и, значит, выражение

$$\left| f(x) - \sum_{r=1}^{r=N} c_r e^{i\lambda_r x}\right|^2$$

есть некоторая почти-периодическая функция. Так как она существенно положительна, то ее среднее будет тоже положительным (или нулем). Итак,

$$C\left\{\left| f(x) - \sum_{r=1}^{r=N} c_r e^{i\lambda_r x}\right|^2\right\} \geqslant 0.$$

Обозначив, для простоты вычислений, через символ $\overline{A}$ число, сопряженное мнимому числу A, мы должны, таким образом, вычислить среднее произведения:

$$\left[f(x) - \sum_{r=1}^{r=N} c_r e^{i\lambda_r x}\right] \times \left[\overline{f}(x) - \sum_{s=1}^{s=N} \overline{c}_s e^{-i\lambda_s x}\right],$$

т. е. выражения:

$$f(x)\cdot\overline{f}(x) + \sum_{r=1}^{r=N}\sum_{s=1}^{s=N} c_r\overline{c}_s e^{i(\lambda_r-\lambda_s)x} - \sum_{s=1}^{s=N}\overline{c}_s f(x)\,e^{-i\lambda_s x} -$$

$$-\sum_{r=1}^{r=N} c_r\overline{f}(x)\,e^{i\lambda_r x}.$$

Так как среднее конечной суммы равно сумме средних, то дело сводится к вычислению четырех средних.

Первое среднее дает:

$$C\{f(x)\bar{f}(x)\} = C\{|f(x)|^2\}.$$

Второе среднее, очевидно, дает:

$$C\left\{\sum_{r=1}^{r=N}\sum_{s=1}^{s=N} c_r \bar{c}_s e^{i(\lambda_r - \lambda_s)x}\right\} = \sum_{r=1}^{r=N} |c_r|^2.$$

Третье среднее, в принятых обозначениях, дает:

$$C\left\{\sum_{s=1}^{s=N} \bar{c}_s f(x)\, e^{-i\lambda_s x}\right\} = \sum_{s=1}^{s=N} \bar{c}_s a(\lambda_s) = \sum_{r=1}^{r=N} \bar{c}_r a(\lambda_r).$$

Четвертое среднее, если учесть то обстоятельство, что средние от сопряженных выражений сами суть сопряженные, дает:

$$C\left\{\sum_{r=1}^{r=N} c_r \bar{f}(x)\, e^{i\lambda_r x}\right\} = \sum_{r=1}^{r=N} c_r \bar{a}(\lambda_r).$$

Таким образом, мы находим неравенство:

$$C\{|f(x)|^2\} + \sum_{r=1}^{r=N} |c_r|^2 - \sum_{r=1}^{r=N} \bar{c}_r a(\lambda_r) - \sum_{r=1}^{r=N} c_r \bar{a}(\lambda_r) \geqslant 0.$$

Прибавив к левой части этого неравенства и вычтя из нее же сумму

$$\sum_{r=1}^{r=N} |a(\lambda_r)|^2,$$

мы можем предыдущее неравенство написать в виде:

$$C\{|f(x)|^2\} - \sum_{r=1}^{r=N} |a(\lambda_r)|^2 + \sum_{r=1}^{r=N} |c_r - a(\lambda_r)|^2 \geqslant 0.$$

До сих пор мы рассматривали числа c_r, $r = 1, 2, 3, \ldots, N$, как совершенно произвольные. Теперь, полагая

$$c_r = a(\lambda_r), \quad r = 1, 2, \ldots, N,$$

мы находим:

$$C\{|f(x)|^2\} - \sum_{r=1}^{r=N} |a(\lambda_r)|^2 \geqslant 0.$$

Это неравенство, являющееся аналогом неравенства Бесселя и переписанное в виде:

$$\sum_{r=1}^{r=N} |a(\lambda_r)|^2 \leqslant C\{|f(x)|^2\}, \tag{10}$$

приводит нас к следующему чрезвычайно важному заключению:

Вспомогательная функция $a(\lambda)$ действительного переменного λ, определенная равенством

$$a(\lambda) = C\{f(x)\,e^{i\lambda x}\},$$

где $f(x)$ есть произвольно взятая почти-периодическая функция, является функцией, равной нулю, для всех величин λ, за исключением, быть может, некоторого счетного множества их.

Для того чтобы установить этот факт, важность которого есть чрезвычайная, достаточно заметить, что количество $C\{|f(x)|^2\}$, стоящее в правой части неравенства (10), есть конечное. Поэтому неравенство (10) указывает на то, что среди всевозможных действительных чисел Λ н ни одного такого, для которого $|a(\Lambda)|^2$ превосходит $C\{|f(x)|^2\}$, что может иметься лишь одно Λ, для которого $|a(\Lambda)|^2$ превосходит $\frac{1}{2}C\{|f(x)|^2\}$, и так далее. Вообще, может иметься лишь $m-1$ различных значений величины Λ, для которых $|a(\Lambda)|^2$ превосходит $\frac{1}{m}C\{|f(x)|^2\}$. Отсюда следует, что все без исключения значения Λ, для которых $|a(\Lambda)|$ отлично от нуля, можно расположить в такую последовательность

$$\Lambda_1;\ \Lambda_2,\ \Lambda_3, \ldots, \Lambda_m, \ldots, \tag{11}$$

что соответствующие им абсолютные величины функции $a(\lambda)$ образуют убывающую (невозрастающую) последовательность:

$$|a(\Lambda_1)| \geqslant |a(\Lambda_2)| \geqslant |a(\Lambda_3)| \geqslant \ldots \geqslant |a(\Lambda_m)| \geqslant \ldots$$

Это и доказывает справедливость сформулированного выше предложения

Введем новое обозначение, положив

$$A_m = a(\Lambda_m). \tag{12}$$

В этом обозначении неравенство (10) показывает, что ряд

$$|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 + \ldots + |A_m|^2 + \ldots,$$

члены которого все без исключения существенно положительны, есть сходящийся, так как сумма скольких угодно его членов никогда не может превзойти величины $C\{|f(x)|^2\}$.

Поэтому из неравенства (10) следует справедливость неравенства:

$$\sum |A_m|^2 \leqslant C\{|f(x)|^2\}, \tag{7**}$$

где знак суммы Σ, без указания внизу значка m полного суммирования, напоминает, что, вообще говоря, берется не вся сумма членов $|A_m|^2$, а произвольная ее часть.

Неравенство (7**) называется неравенством Бесселя для почти-периодических функций.

§ 11. Показатели Фурье, коэффициенты Фурье и ряд Фурье для почти-периодических функций. Теперь уже совершенно ясен тот путь, которым идет теория почти-периодических функций, вводя понятие ряда Фурье для всякой почти-периодической функции $f(x)$.

Выше мы видели, что имеется лишь счетное множество различных друг от друга чисел

$$\Lambda_1,\ \Lambda_2,\ \Lambda_3, \ldots, \Lambda_m, \ldots, \tag{11}$$

таких, что

$$|a(\Lambda_m)| > 0, \quad m = 1,\ 2,\ 3, \ldots,$$

и что для всякого другого значения аргумента λ, отличного от чисел (11), мы необходимо должны иметь равенство:

$$a(\lambda) = 0.$$

Числа Λ_m (11), делающие $a(\lambda)$ отличной от нуля, называются **показателями Фурье** почти-периодической функции $f(x)$, для которой составлена вспомогательная функция $a(\lambda)$:

$$a(\lambda) = C\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\}.$$

Величины A_m, определяемые по формуле

$$A_m = a(\Lambda_m), \tag{12}$$

называются **коэффициентами Фурье** почти-периодической функции $f(x)$. Таким образом, всякому показателю Фурье Λ_m отвечает свой собственный коэффициент Фурье A_m.

Произведение

$$A_m e^{i\Lambda_m x}$$

называется **членом Фурье**, соответствующим показателю Фурье Λ_m.

Наконец, формальное выражение

$$\sum_m A_m e^{i\Lambda_m x},$$

представляющее просто собрание всех членов Фурье, называется **рядом Фурье** данной почти-периодической функции $f(x)$. Чтобы указать на то, что рассматриваемый ряд Фурье составлен для почти-периодической функции $f(x)$, обычно пишут:

$$f(x) \backsim \sum_m A_m \theta^{i\Lambda_m x}. \tag{4**}$$

О сходимости этого ряда, вообще говоря, не может быть и речи, потому что и в более простом случае чисто-периодической непрерывной функции $f(x)$ мы, при настоящем состоянии науки, не имеем никаких сведений об обязательном наличии хотя бы одной точки сходимости, не имея при этом опровергающих это ожидание примеров.

§ 12. Равенство Парсеваля для почти-периодических функций. Единственность почти-периодических функций. Из неравенства Бесселя (7**) следует только то, что сумма всех существенно положительных чисел

$|A_m|^2$ не может превысить количества $C\{|f(x)|^2\}$, т. е.

$$\sum_m |A_m|^2 \leqslant C\{|f(x)|^2\}.$$

На самом же деле в теории почти-периодических функций имеется нечто гораздо большее: оказывается, что сумма всех чисел $|A_m|^2$ действительно в точности равна величине среднего $C\{|f(x)|^2\}$. Установление этого факта, выражающегося, таким образом, в виде точного равенства

$$\sum_m |A_m|^2 = C\{|f(x)|^2\}, \tag{6*}$$

является одним из прекраснейших результатов работ Бора.

Равенство (6*) называется равенством Парсеваля для почти-периодических функций.

Чрезвычайная важность равенства Парсеваля для почти-периодических функций становится совершенно ясной из следующего вопроса: мы знаем, что всякой почти-периодической непрерывной функции $f(x)$ соответствует один и только один (отвлекаясь от порядка членов) ее ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_m A_m e^{i\Lambda_m x}.$$

Вопрос, о котором только что говорилось, состоит в обратном: могут ли две совершенно различные непрерывные почти-периодические функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ иметь один и тот же (отвлекаясь от порядка членов) ряд Фурье?

Равенство Парсеваля дает на этот вопрос совершенно определенный ответ: всякий ряд Фурье принадлежит только одной почти-периодической функции $f(x)$.

Иначе говоря, две существенно различные почти-периодические функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ никогда не могут обладать одним и тем же рядом Фурье.

Для доказательства достаточно заметить, что если бы нашлись две такие существенно различные почти-периодические функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеющие один и тот же самый ряд Фурье, то их разность $f(x)$

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

была бы такою почти-периодическою функцией, нетождественной нулю которая не имеет ни одного коэффициента Фурье, т. е. это была бы такая почти-периодическая функция $f(x)$, для которой ее вспомогательная функция $a(\lambda)$ равна нулю для всякого (без исключения) значения аргумента λ.

В этом случае, в силу равенства Парсеваля, мы не можем иметь среднее $C\{|f(x)|^2\}$ отличным от нуля, так как равенство Парсеваля определенно указывает, что, когда это среднее превосходит нуль, то оно равно сумме членов $|A_m|^2$, которые, поэтому, обязаны быть существенно положительными и, следовательно, отличными от нуля.

Таким образом, для рассматриваемой функции — разности $f(x)$ — мы должны необходимо иметь

$$C\{|f(x)|^2\} = 0.$$

А тогда элементарное рассуждение немедленно обнаруживает, что $f(x) = 0$ для всякого x области $(-\infty < x < +\infty)$, что нами отрицалось ранее.

Таким образом, мы, в силу равенства Парсеваля, имеем для всякого ряда Фурье лишь единственную порождающую его почти-периодическую функцию.

Читатель не преминет отметить полнейшую аналогию теории почти-периодических и чисто-периодических функций в изложенных нами ее частях.

§ 13. Эмпирический смысл ряда Фурье почти-периодической функции. Представим себе какое-нибудь явление, дающее нам непрерывную запись в виде непрерывной кривой. Если эта кривая окажется периодической, ничто не будет препятствовать сделать заключение о том, что и самое явление есть также периодическое и что его период в точности равен периоду отвечающей ему эмпирической кривой. Если теперь записанная прибором непрерывная кривая оказалась совершенно совпадающей (поскольку позволяет это констатировать точность измерений) с известной нам ранее какой-нибудь квази-периодической кривой (например, с графиком суммы двух чисто-периодических функций с взаимно несоизмеримыми периодами), тогда кажется по-прежнему вполне естественным заключить, что и рассматриваемое явление представляет собой результирующую двух различных чисто-периодических влияний с взаимно неравными периодами. Теперь спрашивается: позволительно ли распространить наше заключение на тот случай, когда эмпирическая кривая оказалась бы на данном участке совпадающей с абсолютной точностью (в предположении, что наши приборы измерения абсолютно точны) с некоторой почти-периодической кривой? Теоретически вопрос этот представляется весьма деликатным, так как он тесно связывается с вопросом о том, в какой мере можно рассматривать почти-периодическую функцию $f(x)$ как составленную из тех чисто-периодических функций, которые суть члены ряда Фурье рассматриваемой функции $f(x)$? Если функция $f(x)$ имеет ряд Фурье сходящимся, утвердительное заключение кажется естественным. Но если почти-периодическая функция $f(x)$ имеет свой ряд Фурье расходящимся — за неимением точных доказательств обратного — почти во всех точках и притом при всяком расположении его членов, в какой мере можно говорить о такой функции $f(x)$ как о составленной из чисто-периодических функций?

Не желая сейчас рассматривать во всех деталях этот обременительный и тонкий вопрос, мы ограничимся лишь тем простым замечанием, что создатели метода периодограмм, очевидно, ответили на него утвердительно, так как их методы, по существу, суть не что иное, как попытки «выловить» из хаотического течения данной функции $f(x)$ ее наиболее крупные члены Фурье (с наибольшими $|A_m|$) с помощью тех или иных аналитических аппаратов, которые, как мы увидим, собственно, копируют функцию Бора $a(\lambda)$.

Глава II

ЧИСТО-ПЕРИОДИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§ 14. **Гармонический анализ.** Под этим именем следует понимать стремление рассматривать какой-нибудь предложенный теоретически или данный в опыте периодический феномен как сложный, получившийся в результате соединения весьма многих или даже бесконечно многих элементарных периодических феноменов, которые считаются нами уже неразложимыми на более простые. Эти элементарные периодические феномены имеют своим периодом либо тот же самый период P, как и данный сложный феномен, либо его аликвотные (т. е. целочисленные) части: $\frac{1}{2}P$, $\frac{1}{3}P$, ..., $\frac{1}{n}P$, ... Обычно за элементарный феномен берется так называемый гармонический, совершающийся по закону основного колебания звучащей струны, т. е. по «закону синуса».

Электротехника, акустика, медицина (кардиограммы), астрономия (цефеиды) и многие другие науки дают прекрасные примеры ценности гармонического анализа.

§ 15. **Ряд Фурье как математический аппарат гармонического анализа.** Обычным средством гармонического анализа служит ряд Фурье. Если данный периодический феномен, имеющий своим периодом p, выражен в виде функции $f(x)$, то, полагая

$$k = \frac{2\pi}{p}$$

и называя k «частотой колебаний», мы имеем:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos kx + a_2 \cos 2kx + \ldots + a_n \cos nkx + \ldots$$
$$\ldots + b_1 \sin kx + b_2 \sin 2kx + \ldots + b_n \sin nkx + \ldots, \tag{13}$$

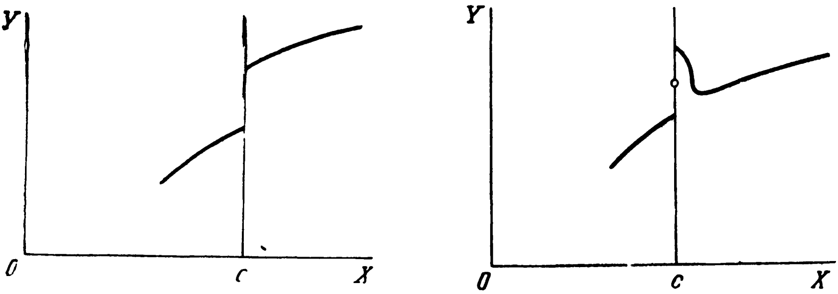
где

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(\alpha) \cos nk\alpha \, d\alpha \quad \text{и} \quad b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(\alpha) \sin nk\alpha \, d\alpha. \tag{14}$$

Если функция $f(x)$ есть непрерывная, периодическая и с ограниченным изменением, то лучшего средства, теоретически говоря, для гармонического анализа искать не приходится, так как ряд Фурье (13) есть равномерно сходящийся на всей области $(-\infty < x < +\infty)$ и, значит, представляет совершенным образом наш феномен для всех эпох (мы рассматриваем аргумент x как время). Можно лишь практически быть недовольным, если ряд (13), сходясь равномерно, не является столь быстро сходящимся, как этого требует практика. Но тогда уже должны выступить на сцену другие математические методы, дающие усиление сходимости. Здесь мы их касаться не станем.

Совсем в ином положении мы оказываемся, когда данная функция $f(x)$, сохраняя ограниченное изменение, является разрывной в каких-либо точках.

Мы уже имели возможность заметить (см. § 2), что в этом случае величина функции $f(x)$ в точке разрыва c, такая, какой она дается



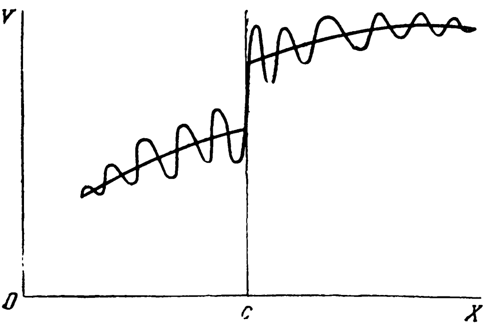
Фиг. 1 Фиг. 2

суммой $S(x)$ ряда Фурье (13) в точке c, является несколько искусственной. В самом деле, $S(c)$ в этом случае всегда равна полусумме пределов функции $f(x)$ слева и справа в точке разрыва c,

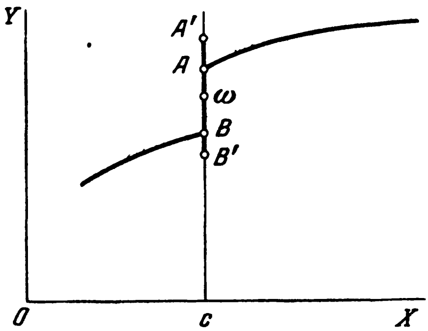
$$S(c) = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2},$$

и, следовательно, ряд Фурье вовсе не учитывает времени подготовки функции $f(x)$ к разрыву в точке c с той и с другой ее стороны, но характеризует феномен разрыва лишь стационарно. потому что во всех случаях, без исключения, $S(c)$ равно указанной полусумме (фиг. 1—4).

Но имеется еще и другое, чрезвычайно своеобразное, явление, носящее название феномена Джиббса и характеризующее поведение суммы $S_n(x)$ тригонометрического ряда Фурье, остановленного на n-м месте, вблизи точки разрыва c. Именно, оказывается, что последовательные суммы $S_n(x)$ ряда Фурье, будучи изображены в виде кривых, равномерно прилегают, когда n безгранично возрастает, к разлагаемой кривой $y = f(x)$ там, где она непрерывна. Но во всяком месте разрыва c наблюдается вот какая особенность поведения суммы $S_n(x)$: по мере приближения аргумента x к точке разрыва c со стороны верхней ветви кривой $y = f(x)$ кривая $y = S_n(x)$ начинает все чаще и чаще пересекать эту ветвь, увеличивая вместе с тем свои размахи, т. е. подскакивая все выше и выше над этой ветвью, с тем, чтобы, подскочив в последний раз над ветвью и сделав при этом самое сильное уклонение вверх, низринуться затем вниз и, пересекши прямую $x = c$ вблизи середины отрезка, образуемого на ней концами обеих ветвей данной кривой $y = f(x)$, уйти окончательно к нижней ветви этой кривой, где описанная картина снова повторяется, только, понятно, в обратном порядке. Последнее означает, что, перейдя к нижней ветви данной кривой, кривая суммы $y = S_n(x)$ свой самый сильный уклон книзу от нижней ветви делает вблизи точки разрыва $x = c$ и что затем, хотя и следует ряд уклонов книзу, но уже меньшего размаха, и что, наконец, течение кривой $y = S_n(x)$ близко следует нижней ветви, испытывая при этом лишь чуть заметную дрожь около нее.



Фиг. 3



Фиг. 4

Описанный характер изменения суммы $S_n(x)$, в сущности, не представлял бы ничего интересного, если бы не следующее обстоятельство: по мере безграничного возрастания числа n кривая $y = S_n(x)$ все теснее и теснее примыкает к ветвям данной кривой $y = f(x)$ всюду, кроме непосредственного соседства с точкой разрыва c: тут резкость уклона кривой $y = S_n(x)$ нисколько не смягчается при возрастании числа n, так что величины максимального уклона этой кривой вверх от верхней ветви и вниз от нижней ветви не уменьшаются, но стремятся к совершенно определенному пределу, совершенно не зависящему от природы функции: предел этот зависит лишь от размера скачка функции $f(x)$ в точке разрыва c.

Говоря более точно, геометрическим пределом непрерывной кривой $y = S_n(x)$ служат вовсе не обе ветви кривой плюс вертикальный отрезок AB, соединяющий их концы, но эти ветви плюс существенно бо́льший отрезок $A'B'$, концентрический с отрезком AB, причем отношение $\frac{A'B'}{AB}$ есть абсолютная константа, не зависящая ни от чего, т. е. есть определенное число.

Точное определение этого отношения дается формулой:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{G}{\pi},$$

где G есть число Джиббса, равное $2\int\limits_0^\pi \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha$.

Так как приближенно $G = 3{,}704\ldots$ и $\pi = 3{,}141\ldots$, то

$$\frac{G}{\pi} = 1{,}178\ldots$$

Мы видим, таким образом, что подскок кривой $y = S_n(x)$ над верхней ветвью разлагаемой функции $f(x)$ в точке разрыва всегда равен 0,178... скачка функции $f(x)$.

Описанный феномен Джиббса показывает, что, останавливая ряд Фурье даже на сколь угодно далеком члене, мы получаем такой результат, который вблизи точки разрыва ничего общего не имеет с наблюдаемым явлением, потому что своеобразие поведения остановленной суммы $S_n(x)$ вызывается свойством самого математического аппарата и отнюдь не отражает даже в наименьшей степени сущность самого явления.

Третий дефект ряда Фурье как гармонического анализатора совершенно очевиден: имея данной непрерывную чисто-периодическую функцию $f(x)$ с неизвестным периодом P и разлагая ее в ряд Фурье на отрезке длины p, мы получаем, что сумма $S_n(x)$ этого ряда не имеет вне этого отрезка ничего общего с заданной функцией $f(x)$.

Возьмем самый простой случай, чаще всего представляющийся в астрофизике. Пусть $f(x)$ есть элементарная гармоническая функция, т. е. такая, изменение которой совершается по закону синуса:

$$f(x) = c\sin(kx + q), \tag{15}$$

где

$$k = \frac{2\pi}{P} \text{ и } P \text{ есть истинный период.}$$

Число q есть ф а з а явления.

Производя же гармонический анализ явления на отрезке $[0 \leqslant x \leqslant p]$, мы имеем:

$$\begin{aligned} S(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + a_n\cos nx + \ldots \\ \ldots + b_1\sin x + b_2\sin 2x + \ldots + b_n\sin nx + \ldots, \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{2c}{\pi}\,\frac{\frac{p}{P}}{\left(\frac{p}{P}\right)^2 - n^2}\sin\pi\frac{p}{P}\sin\left(\pi\frac{p}{P} + q\right), \\ b_n &= \frac{2c}{\pi}\,\frac{n}{\left(\frac{p}{P}\right)^2 - n^2}\sin\pi\frac{p}{P}\cos\left(\pi\frac{p}{P} + q\right). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Ясно, что

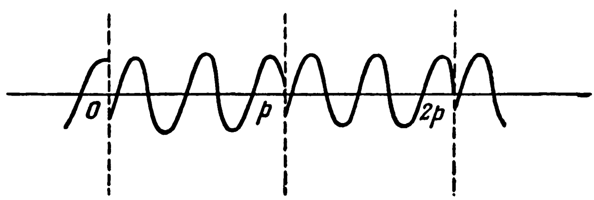
$$S(x) = f(x)$$

внутри (в строгом смысле) отрезка $[0 \leqslant x \leqslant p]$. Если p равно P или ему кратно, т. е. если $p = mP$, где m — целое, то все члены ряда Фурье (16) равны нулю, кроме только двух; в этом случае разложение Фурье (16) просто тождественно с данной формулой (15), и мы, понятно, имеем тождество $S(x) = f(x)$ везде на области $(-\infty < x < +\infty)$.

Во всех же других случаях мы имеем картину, показанную на фиг. 5, т. е. картину прежде всего разрывов суммы $S(x)$ в точках

$0, \pm p, \pm 2p, \ldots$ и затем, что важнее всего, фазового смещения, так как на всех других отрезках $[mp, (m+1)p]$, кроме основного $[0, p]$, кривая $y = S(x)$ является не чем иным, как сдвинутой по оси OX данной кривой $y = f(x)$.

§ 16. Усеченный ряд Фурье. Рассмотрим функцию $f(x)$, величины которой даются наблюдением. Мы предполагаем для простоты, что наблюдения делаются через равные промежутки времени; ради простоты мы будем считать промежуток между двумя соседними наблюдениями равным единице. И, кроме того, мы предположим, что в самом наблюдаемом явлении функция $f(x)$ есть непрерывная и периодическая с целым периодом, равным p единицам.



Фиг. 5

В этих условиях функция $f(x)$ разложима в бесконечный (вообще говоря) ряд Фурье. Но так как мы не имеем в наблюдении всей непрерывной функции $f(x)$ в ее интервале периодичности $[0 \leqslant x \leqslant p]$, т. е. ее значений для *всех* действительных величин аргумента x (как рациональных, так и иррациональных), а имеем лишь значения $f(x)$ для целых значений аргумента p, то является вопрос, каким образом использовать наблюденные величины

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_p,$$

где $y_\mu = f(\mu)$ для гармонического анализа функции $f(x)$.

С этой целью обычно пишут равенства

$$y_\mu = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos k\mu + a_2 \cos 2k\mu + \ldots + a_{n-1} \cos (n-1) k\mu +$$
$$+ b_1 \sin k\mu + b_2 \sin 2k\mu + \ldots + b_{n-1} \sin (n-1) k\mu, \qquad (18)$$

где $k = \frac{2\pi}{p}$, n — некоторое пока еще неопределенное целое положительное число, и $\mu = 1, 2, 3, \ldots, p$.

Равенства (18) можно рассматривать как систему p уравнений относительно $2n-1$ неизвестных a_0, a_ν, b_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, p)$.

Если $n > \frac{p+1}{2}$, то система (18) недостаточна и имеется бесчисленное множество решений относительно неизвестных a_0, a_ν и b_ν.

Если $n < \frac{p+1}{2}$, то система (18) избыточна и, вообще говоря, нет ни одного решения для неизвестных a_0, a_ν и b_ν, так как нет совместности.

Если $n = \frac{p+1}{2}$, то решение системы (18) дается формулами:

$$\left.\begin{aligned} a_\nu &= \frac{2}{p}\sum_{\mu=1}^{p} y_\mu \cos\mu\nu k, \\ b_\nu &= \frac{2}{p}\sum_{\mu=1}^{p} y_\mu \sin\mu\nu k. \end{aligned} \quad \left(\nu = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \frac{p+1}{2}\right) \right\} \tag{19}$$

Возникает вопрос: можно ли рассматривать формулу (18), в которой коэффициенты a_0, a_ν, b_ν определяются по формулам (19), как усеченный ряд Фурье для $f(x)$?

Как показывают примеры, у нас нет ни гарантии в том, что простые гармонические составляющие $a_\nu \cos\nu kx$ и $b_\nu \sin\nu kx$ имеют какое-нибудь отношение к истинной функции $f(x)$, ни уверенности в том, что в промежутках между двумя наблюдениями истинная функция $f(x)$ ведет себя примерно так же, как вычисленная по формулам (19) сумма $S_n(x)$:

$$\begin{aligned} S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos kx + \ldots + a_{n-1}\cos(n-1)kx + \\ + b_1 \sin kx + \ldots + b_{n-1}\sin\,(n-1)kx. \end{aligned} \tag{20}$$

В качестве примера возьмем самый простой случай гармонического колебания:

$$f(x) = c\sin\left(\frac{2\pi}{p}x + q\right),$$

где p есть какое-нибудь положительное число.

Ясно, что для целых значений аргумента x мы имеем равенство:

$$f(x) = c\sin\left(\frac{2\pi(1+mp)}{p}x + q\right),$$

где m есть произвольное целое число: $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

С другой стороны, равенство

$$\sin\left(\frac{2\pi}{p}x + q\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{P}x + Q\right)$$

при целых x возможно, как показывает элементарный анализ, лишь когда

$$P = \frac{p}{1+mp} \quad \text{и} \quad Q = q \quad \text{или} \quad Q = \pi - q.$$

Из этого примера явствует, что невозможно на основе наблюдений через равные промежутки времени найти истинный период явления даже в случае простого гармонического колебания.

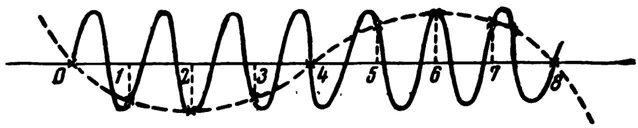
Обычно в такого рода обстоятельствах самая природа вещей или дополнительные наблюдения дают указания на истинный период. Чаще всего мы сталкиваемся с этого рода трудностями, когда имеем дело с коротким периодом, а наблюдения подсказывают нам ложным образом длинный период. Если кажущийся длинный период есть P, а истинный период есть p, то, в силу предыдущего, должны иметь:

$$|1 + mp| < 1,$$

т. е. необходимо, чтобы $|mp| < 2$, откуда

$$0 < p < 2.$$

Итак, в этом случае промежуток наблюдения оказывается длиннее половины периода.



Фиг. 6

Вышеприведенный чертеж (фиг. 6) изображает изменение яркости света переменной звезды, период которой меньше двух суток. Наблюдения же производятся ежесуточно и в одно и то же время. Истинная кривая яркости изображена черной линией, имеющей истинным (т. е. наименьшим) периодом $1\frac{1}{7}$ суток, тогда как кажущаяся кривая яркости, представляющаяся на первый взгляд, есть пунктирная кривая с ее периодом (наименьшим), равным восьми суткам.

Отправляясь от этой распознанной кривой (пунктирной), мы, по формуле $P_m = \frac{p}{|1+mp|}$, имеем табличку всех возможных периодов:

$$P_1 = \frac{8}{1+8} = \frac{8}{9}, \quad P_{-1} = \frac{8}{8-1} = 1^1/_7,$$

$$P_2 = \frac{8}{1+16} = \frac{8}{17}, \quad P_{-2} = \frac{8}{16-1} = \frac{8}{15},$$

. . . .

$$P_m = \frac{8}{1+8m}, \qquad P_{-m} = \frac{8}{8m-1}.$$

Так как периоды очень быстро убывают, то уже в продолжение самого наблюдения, занимающего известный промежуток времени, изменение яркости света должно быть уловлено, если бы период был мал. Уже это обстоятельство сильно ограничивает произвол в разыскании истинного периода.

Значительным подспорьем в этом деле может служить постановка ежечасного наблюдения каждой ночью, вместо того, чтобы производить наблюдение ночью один только раз. В этом случае мы будем уже знать не только y_ν, но и $\frac{dy_\nu}{dx}$. И так как мы имеем:

$$y_\nu = c \sin\left(\frac{2\pi}{p}\nu + q\right),$$

то

$$\frac{dy_\nu}{dx} = \frac{2\pi}{p} c \cos\left(\frac{2\pi}{p}\nu + q\right).$$

Следовательно, вторая кривая имеет тот же самый кажущийся период, но уже другую амплитуду a. Имеем в нашем случае табличку:

$$P = 8, \quad a_0 = \frac{\pi c}{4},$$

$$P_1 = \frac{8}{9}, \ a_1 = 9a_0,$$

$$P_2 = \frac{8}{17}, \ a_2 = 17a_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Различие результатов столь велико, что легко может быть уловлено наблюдением, а вместе с этим различием может быть уловлен и самый период.

Другое средство большого теоретического значения — это проведение второй серии наблюдений, но уже с другим промежутком наблюдения.

Обозначая промежутки обеих серий наблюдений соответственно через λ_1 и λ_2, мы имеем:

$$\begin{aligned} y_\nu &= c\sin\left(\frac{2\pi}{p}\lambda_1\nu + q_1\right), \\ z_\nu &= c\sin\left(\frac{2\pi}{p}\lambda_2\nu + q_2\right). \end{aligned} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$$

Если m_1 и m_2 суть целые числа, то, обозначая через P_1 и P_2 кажущиеся периоды обеих серий, имеем:

$$P_1 = \frac{\lambda_1 p}{\lambda_1 + m_1 p} \text{ и } P_2 = \frac{\lambda_2 p}{\lambda_2 + m_2 p}.$$

Кажущиеся периоды могут совпасть тогда и только тогда, когда $\lambda_1 m_2 = \lambda_2 m_1$.

Теоретически говоря, если $\lambda_1 : \lambda_2$ есть рациональное число, указанное совпадение всегда возможно и притом бесконечным числом способов. Если же $\lambda_1 : \lambda_2$ есть иррациональное число, то необходимо имеем $m_1 = m_2 = 0$, и тогда $P_1 = P_2 = p$. Значит, в этом случае истинный период находится прямым совпадением кажущихся периодов.

Последнее, чисто теоретическое соображение на практике применяют следующим образом. Если известно, что истинный период p должен превосходить некоторую величину p_0, то мы необходимо должны иметь для целых чисел m_1 и m_2 соответственно некоторые границы M_1 и M_2, т. е. $m_1 \leqslant M_1$ и $m_2 \leqslant M_2$. С другой стороны, написав отношение $\lambda_1 : \lambda_2$ в виде несократимой дроби $N_1 : N_2$, мы немедленно убеждаемся на основании пропорции $\lambda_1 : \lambda_2 = m_1 : m_2$, что уже одно из неравенств $N_1 > M_1$ или $N_2 > M_2$ покажет, что кажущийся общий период p есть истинный.

§ 17. Остановленный ряд Фурье, как результат сглаживания эмпирически данной кривой. Пусть $Y(x)$ есть эмпирически данная функция, предполагаемая периодической, с периодом, равным p, и пусть тригонометрическое выражение

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}\left(a_\nu \cos\frac{2\pi}{p}\nu x + b_\nu \sin\frac{2\pi}{p}\nu x\right).$$

есть то, чем стала данная нам функция $Y(x)$ после ее «сглаживания». Самое «сглаживание» мы поведем, выбрав численные коэффициенты a_0, a_ν, b_ν указанного тригонометрического выражения таким образом, чтобы интеграл

$$E = \frac{1}{p}\int_0^p [Y(x) - y(x)]^2 dx$$

получил минимальную величину.

Это требование приводит к уравнениям:

$$\frac{\partial E}{\partial a_\nu} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial E}{\partial b_\nu} = 0, \ (\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots, n),$$

разрешая которые относительно неизвестных a_0, a_ν и b_ν, мы немедленно убеждаемся в том, что решением их являются как раз коэффициенты Фурье для функции $Y(x)$.

Сама же минимальная величина, $E_{\min}$, интеграла E является, очевидно, не чем иным, как мерой достигнутого приближения $y(x)$ данной функции $Y(x)$. Ее величина дается формулой:

$$E_{\min} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(a_\nu^2 + b_\nu^2),$$

где a_ν и b_ν суть коэффициенты Фурье для $Y(x)$.

§ 18. **О фактическом вычислении коэффициентов Фурье.** Для практического вычисления коэффициентов Фурье эмпирически данной функции $f(x)$ употребительны четыре рода приемов: 1) аналитические, 2) геометрические, 3) кинематические и 4) физические. Мы оставим в стороне описание этих приемов, упомянув лишь о том, что к числу последних относятся приемы, использующие для вычисления коэффициентов Фурье явление электрического резонанса.

§ 19. **Случай одного периода. Разыскание периодов явления по коэффициентам Фурье.** Пусть $f(x)$ — некоторая почти-периодическая функция, которую мы предположим голоморфной вдоль всей оси OX. Если мы возьмем какой-нибудь отрезок $[a, b]$ на оси OX и на нем разложим функцию $f(x)$ в ряд Фурье, то такое разложение будет единственным. Обратно, имея такое разложение Фурье, хотя бы и годное только внутри отрезка $[a, b]$, мы это разложение имеем сходящимся к $f(x)$ внутри $[a, b]$. И так как, по условию, $f(x)$ есть голоморфная функция вдоль всей оси абсцисс OX, то аналитическое продолжение суммы $S(x)$ нашего ряда изнутри отрезка $[a, b]$ наружу его даст нам совершенное знание функции $f(x)$ вдоль всей оси OX; в частности, это должно было бы дать нам знание и ряда Фурье для почти-периодической функции $f(x)$, а вместе с ним членов Фурье, показателей Фурье и коэффициентов Фурье.

Таким образом, если функция $f(x)$ есть квази-периодическая и голоморфная вдоль всей оси OX, то знание разложения Фурье функции $f(x)$ на каком-нибудь отрезке $[a, b]$ оси OX содержит implicite знание периодов всех ее образующих функций и, следовательно, всех составляющих периодов рассматриваемого явления.

Эти соображения молчаливо предполагаются, когда ставят проблему: *Зная a priori, что данное своими численными коэффициентами* a_0, a_ν, b_ν *разложение Фурье в данном отрезке* $[0, p]$ *должно изобразить функцию вида* $c\sin\left(\frac{2\pi}{P}x + q\right)$, *отыскать численно неизвестный период* P.

Обращаясь для этого к формулам (17), мы видим, что коэффициенты a_m, b_m изменяют свои знаки на обратные при переходе числа m через неизвестное отношение $\frac{p}{P}$, т. е. при

$$m < \frac{p}{P} < m + 1$$

знаки соседних коэффициентов уже различны. Следовательно, истинный период P содержится между

$$\frac{p}{m+1} \quad \text{и} \quad \frac{p}{m}.$$

Для более точного определения неизвестного периода, обращаясь к формулам (17), мы имеем:

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{m}{n}\,\frac{\left(\frac{p}{P}\right)^2 - n^2}{\left(\frac{p}{P}\right)^2 - m^2}, \quad \frac{b_m}{b_n} = \frac{\left(\frac{p}{P}\right)^2 - n^2}{\left(\frac{p}{P}\right)^2 - m^2}$$

и значит:

$$\left(\frac{p}{P}\right)^2 = \frac{m^2 n a_m - n^2 m a_n}{n a_m - m a_n} = \frac{m^2 b_m - n^2 b_n}{b_m - b_n}.$$

В этих формулах имеется выгодный произвол целых чисел m и n. Полагая $n = m + 1$ и вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned} z(m) &= \frac{m^2(m+1)\,a_m - (m+1)^2\,m a_{m+1}}{(m+1)\,a_m - m a_{m+1}}, \\ z'(m) &= \frac{m^2 b_m - (m+1)^2\,b_{m+1}}{b_m - b_{m+1}}, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

мы имеем:

$$z(m) = z'(m) = \left(\frac{p}{P}\right)^2 = \text{const}.$$

В этих формулах наиболее выгодно пользоваться «критическим» m, т. е. таким, при котором коэффициенты a_n, b_n меняют свои знаки на обратные при переходе от m к $m + 1$.

§ 20. Случай двух периодов (фиг. 7—9). Больший интерес представляет определение двух неизвестных периодов P_1 и P_2 по разложению Фурье. В этом случае $z(m)$ уже зависит от m. Если разложенная в ряд Фурье с численными коэффициентами функция $y(x)$ предполагается имеющей форму

$$y(x) = c_1 \sin\left(\frac{2\pi}{P_1} x + q_1\right) + c_2 \sin\left(\frac{2\pi}{P_2} x + q_2\right),$$

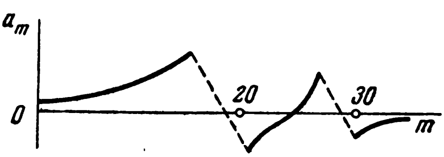
то, введя сокращенные обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \sin \pi \frac{p}{P_\nu} \cos\left(\pi \frac{p}{P_\nu} + q_\nu\right) &= A_\nu, \\ \frac{2}{\pi} \sin \pi \frac{p}{P_\nu} \sin\left(\pi \frac{p}{P_\nu} + q_\nu\right) &= B_\nu, \\ \frac{p}{P_\nu} &= \xi_\nu, \end{aligned}\right\} (\nu = 1,\ 2)$$

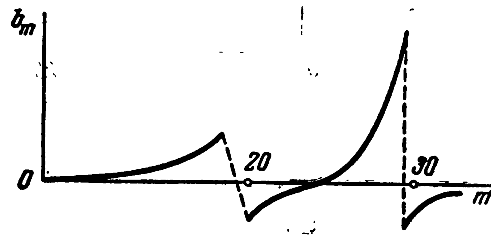
мы имеем:

$$a_m = \frac{mA_1}{\xi_1^2 - m^2} + \frac{mA_2}{\xi_2^2 - m^2}; \quad b_m = \frac{\xi_1 B_1}{\xi_1^2 - m^2} + \frac{\xi_2 B_2}{\xi_2^2 - m^2}. \tag{22}$$

Никто не мешает нам рассматривать m как действительное переменное, принимающее всяческие значения. Тогда a_m и b_m суть рациональные функции с полюсами в точках ξ_1 и ξ_2. Обращаясь же к формулам (21)



Фиг. 7



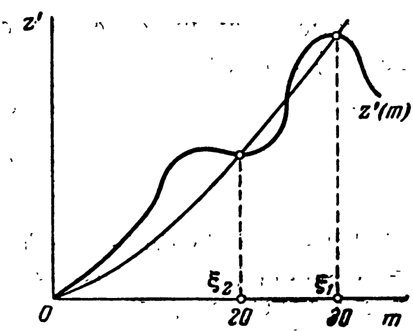
Фиг. 8

мы замечаем, что функции $z(m)$ и $z'(m)$, определенные на основании равенства (22), суть функции всюду непрерывные. Ясно, что кривые $z = z(m)$ и $z' = z'(m)$ пересекаются с параболами $z = m^2$ и $z = (m+1)^2$ в точках, имеющих абсциссами ξ_1, ξ_2, $\xi_1 - 1$ и $\xi_2 - 1$. Это, в принципе, позволяет определять неизвестные периоды.

Например, для функции

$$y(x) = \sin \frac{\pi}{6} x + \sin \frac{\pi}{9} x$$

и для $p = 350$ мы имеем фиг. 9. Дальнейшие уточнения в определении периодов строятся обычно на изложенной базе.



Фиг. 9

Здесь очень важно для дальнейшего упомянуть еще вот о чем.

Соединив в ряде Фурье оба члена с одинаковым периодом в один и написав, таким образом, равенство

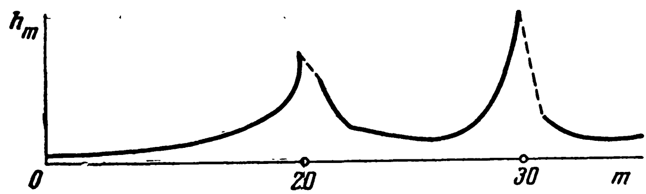
$$a_n \cos \frac{2\pi}{p} nx + b_n \sin \frac{2\pi}{p} nx = h_n \sin\left(\frac{2\pi}{p} nx + \phi_n\right),$$

где $h_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, мы для случая кривой $y(x) = c\sin\left(\frac{2\pi}{P} + q\right)$ найдем:

$$h_n = \frac{2c}{\pi}\frac{\sin n\frac{p}{P}}{\left(\frac{p}{P}\right)^2 - n^2}\sqrt{\left(\frac{p}{P}\right)^2\sin^2\left(\pi\frac{p}{P} + q\right) + n^2\cos^2\left(\pi\frac{p}{P} + q\right)}.$$

Отсюда видно, что место максимума функции $h(n)$ в точности совпадает с точкой $\xi = \frac{p}{P}$, т. е. уже дает знание неизвестного периода P. Самый же максимум h_m равен, очевидно, амплитуде истинного периода P.

Это обстоятельство дает идею составлять функцию и в случае кривой $y(x)$ со многими периодами и, находя места максимумов функции — амплитуды $K(n)$, определять через их положения истинные периоды.



Фиг. 10

Так, например, для упоминавшейся кривой $y = \sin\frac{\pi}{6}x + \sin\frac{\pi}{9}x$ мы имеем фиг. 10. Дальнейшее развитие этой идеи приводит к понятию периодограммы, т. е. к почти-периодическому анализу.

§ 21. Определение амплитуд и фаз по найденным периодам. Задача эта, теоретически говоря, не имеет ни малейшей трудности. Все дело сводится к тому, чтобы, зная $p_1, p_2, \ldots, p_n$, отыскать в выражении

$$f(x) = c_0 + c_1\sin\left(\frac{2\pi}{p_1}x + q_1\right) + \ldots + c_n\sin\left(\frac{2\pi}{p_n}x + q_n\right)$$

численные величины $c_0, c_1, \ldots, c_n, q_1, \ldots, q_n$. Для этого мы пишем функцию $f(x)$ в виде:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{2\pi}{p_1}x + \ldots + a_n\frac{2\pi}{p_n}x + \\ + b_1\sin\frac{2\pi}{p_1}x + \ldots + b_n\frac{2\pi}{p_n}x \tag{23}$$

и, полагая $x = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ в уравнении (23), причем числа $y_\nu = f(x_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots, m_\nu$, считаются известными из наблюдения, просто решаем систему линейных уравнений с неизвестными a_0, a_ν, b_ν.

§ 22. Общая задача отыскания периодов. Теоретически общая задача отыскания неизвестных периодов может быть поставлена чисто формально следующим образом:

Дана эмпирическая функция $f(x)$; требуется изобразить $f(x)$ в виде:

$$f(x) = c_0 + c_1\sin\left(\frac{2\pi}{p_1}x + q_1\right) + \ldots + c_n\sin\left(\frac{2\pi}{p_n}x + q_n\right), \tag{24}$$

определив $3n+1$ неизвестных $c_0, c_1, \ldots c_n, q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots, p_n$ из $3n+1$ наблюдений.

Затруднительность этого пути обусловливается трансцендентностью системы $3n+1$ уравнений (24), в которых полагают $x = x_1, x_2, \ldots, x_{3n+1}$, как раз относительно неизвестных периодов $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Удовлетворительного решения этой системы уравнений в общем виде не имеется.

Поэтому удовлетворяются частными уловками вроде: 1) ослабления влияния нежелательных периодов с тем, чтобы ярче выявить эффект интересующего подозреваемого периода; 2) исключения из длинных периодов влияния коротких; 3) исключения из коротких периодов влияния длинных; 4) расщепления близких друг к другу периодов способом «биений»; 5) удаления уже найденных периодов из числа тех, которые еще остаются неизвестными.

Ввиду того, что эти уловки еще не выросли в систематически применяемые методы и не получили еще достойного теоретического обоснования, мы ограничиваемся в этой статье лишь упоминанием о них.

§ 23. Группа линейных методов. Метод Лагранжа. Усовершенствование Дэла. Эти методы проистекают все от первоначального метода, найденного еще Лагранжем и служащего родоначальником всех их.

Вот основная идея, положенная Лагранжем в основание его метода. Мы отправляемся от равенств:

$$y_\nu = c_0 + \sum_{\mu=1}^{n} c_\mu \sin\left(\frac{2\pi}{p_\mu}\nu\lambda + q_\mu\right), \quad (\nu = 1,\ 2, \ldots, m). \tag{25}$$

Эти равенства написаны в том общем предположении, что измерения $y_1, y_2, \ldots, y_m$ сделаны через равные промежутки времени: $\lambda,\ 2\lambda, \ldots, m\lambda$.

Составляя конечные разности четных порядков $\Delta^{(2)} y_\nu$, $\Delta^{(4)} y_\nu, \ldots$ $\ldots, \Delta^{(2n)} y_\nu$, мы, с одной стороны, имеем линейные выражения от количеств $y_1, y_2, \ldots, y_m$, с другой же стороны, вычисления производятся очень легко и над неизвестными величинами, стоящими в правой части.

Таким образом, мы получаем равенства:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^{(2)} y_\nu &= y_{\nu-1} - 2y_\nu + y_{\nu+1} = -4 \sum_{\mu=1}^{n} c_\mu \sin^2\frac{\pi\lambda}{p_\mu} \sin\left(\frac{2\pi}{p_\mu}\nu\lambda + q_\mu\right), \\
\Delta^{(4)} y_\nu &= y_{\nu-2} - 4y_{\nu-1} + 6y_\nu - 4y_{\nu+1} + y_{\nu+3} = \\
&= 16 \sum_{\mu=1}^{n} c_\mu \sin^4\frac{\pi\lambda}{p_\mu} \sin\left(\frac{2\pi}{p_\mu}\nu\lambda + q_\mu\right), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta^{(2n)} y_\nu &= \sum_{s=0}^{n} (-1)^s C_{2n}^s y_{\nu(n-s)} = \\
&= (-1)^n 2^{2n} \sum_{\mu=1}^{n} c_\mu \sin^{2n}\frac{\pi\lambda}{p_\mu} \sin\left(\frac{2\pi}{p_\mu}\nu\lambda + q_\mu\right).
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Прежде всего при применении метода Лагранжа мы определяем число n возможных периодов. С этой целью нужно составить последовательность определителей:

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} \Delta^{(2)} y_1 & \Delta^{(4)} y_1 & \ldots & \Delta^{(2r)} y_1 \\ \Delta^{(2)} y_2 & \Delta^{(4)} y_2 & \ldots & \Delta^{(2r)} y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta^{(2)} y_r & \Delta^{(4)} y_r & \ldots & \Delta^{(2r)} y_r \end{vmatrix},$$

где $r = 1, 2, 3, \ldots$. Число n неизвестных периодов определяется из того требования, чтобы Δ_n был самым старшим неуничтожающимся определителем, $\Delta_n \neq 0$.

Определив таким образом число n неизвестных периодов, переписываем систему уравнений (25) и (26) в виде:

$$\left.\begin{aligned} y_\nu - c_0 &= K_{1\nu} + K_{2\nu} + \ldots + K_{n\nu}, \\ \Delta^{(2)} y_\nu &= -z_1^2 K_{1\nu} - z_2^2 K_{2\nu} + \ldots + z_n^2 K_{n\nu}, \\ \Delta^{(4)} y_\nu &= +z_1^4 K_{1\nu} + z_2^4 K_{2\nu} + \ldots + z_n^4 K_{n\nu} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta^{(2n)} y_\nu &= (-1)^n z_1^{2n} K_{1\nu} + (-1)^n z_2^{2n} K_{2\nu} + \ldots + (-1)^n z_n^{2n} K_{n\nu}, \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

где полагаем:

$$z_\mu = 2 \sin \frac{\pi\lambda}{p\mu} \quad \text{и} \quad K_{\mu\nu} = c_\mu \sin\left(\frac{2\pi}{p_\mu} \nu\lambda + q_\mu\right) \text{ при } \mu = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Следует отметить, что уравнения (27) написаны в предположении, что время наблюдения $x_\nu = \nu\lambda$.

Исключая количества $K_{\mu\nu}$, мы получаем:

$$\begin{vmatrix} y_\nu - c_0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \Delta^{(2)} y_\nu & -z_1^2 & -z_2^2 & \ldots & -z_n^2 \\ \Delta^{(4)} y_\nu & +z_1^4 & +z_2^4 & \ldots & +z_n^4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta^{(2n)} y_\nu & (-1)^n z_1^{2n} & (-1)^n z_2^{2n} & \ldots & (-1)^n z_n^{2n} \end{vmatrix} = 0. \quad (28)$$

Это равенство имеет вид:

$$\Delta^{(2n)} y_n + \beta_1 \Delta^{(2n-2)} y_\nu + \ldots + \beta_{n-1} \Delta^{(2)} y_\nu + \beta_n (y_\nu - c_0) = 0. \quad (29)$$

Здесь целый значок ν можно изменить произвольно. Таким образом, мы всегда можем иметь $n+1$ уравнений (29) с одними и теми же самыми неизвестными числами $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, так как всегда можно предполагать, что сделано $3n+1$ наблюдений.

Предполагая же $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ найденными, мы строим алгебраическое уравнение n-й степени:

$$\xi^{(n)} + \beta_1 \xi^{n-1} + \beta_2 \xi^{n-2} + \ldots + \beta_{n-1} \xi + \beta_n = 0, \quad 30)$$

корни которого, очевидно, тождественны с корнями

$$-z_1^2,\ -z_2^2, \ldots,\ -z_n^2. \tag{31}$$

А раз величины (31) определены, то, вспомнив их смысл:

$$z_\nu = 2\sin\frac{\pi\lambda}{p_\nu}, \tag{32}$$

мы видим, что искомые периоды $p_1, p_2, \ldots p_n$ найдены. В этом и состоит прекрасный метод Лагранжа.

С тех пор как Лагранж открыл изложенный метод, появилось много его видоизменений, принадлежащих Оппенгейму, Хопфнеру, Брунсу Хирайама, Кюнену. Изменения состояли главным образом в замене одних линейных выражений другими. Так, Оппенгейм вместо конечных разностей $\Delta^{(2s)}y_\nu$, выражающихся линейно через данные наблюдения $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_{3n+1}$, пользуется производными $y_\nu^{(2s)}$. Метод Лагранжа в этом изложении получает совсем классический вид, но приходится вычислять производные $y_\nu^{(2s)}$, пользуясь бесконечными рядами, составленными через конечные разности, причем ряды эти оказываются не всегда сходящимися. Брунс установил, что ряды эти могут сходиться лишь при условии $\lambda \leqslant \frac{p_{\min}}{2}$, а Хопфнер доказал еще более ограничительное условие: $\lambda \leqslant \frac{1}{9\pi}p_{\min}$; здесь $p_{\min}$ есть минимальный искомый период, а λ — промежуток наблюдения.

Другие, например Хирайама, предлагали заменить конечные разности $\Delta^{(2s)}y_\nu$ через интегралы по конечным разностям $\Sigma^{(2s)}y_\nu$.

Наиболее интересно видоизменение метода Лагранжа, предложенное Дэлом (Dale).

Дэл отправляется еще от равенств (25), которые он пишет в виде:

$$y_\nu = c_0 + \sum_{\mu=1}^{n} c_\mu \sin\left(\frac{2\pi}{p_\mu}\nu\lambda + q_\mu\right) = c_0 + \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \cos\nu\Theta_\mu + b_\mu \sin\nu\Theta_\mu. \tag{25*}$$

Положив $e^{i\Theta_\mu} = \xi_\mu$, мы имеем:

$$y_\nu = c_0 + \sum_{\mu=1}^{n} u_\mu \xi_\mu^\nu + v_\mu \xi_\mu^{-\nu}. \tag{33}$$

Взятие первой разности заставляет исчезнуть c_0:

$$\Delta y_\nu = y_{\nu+1} - y_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} u_\mu(\xi_\mu - 1)\xi_\mu^\nu + v_\mu(\xi_\mu^{-1} - 1)\xi_\mu^{-\nu},$$

где $\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots, 3n$.

Исключая из $2n+1$ следующих друг за другом уравнений $2n$ постоянных $u_\mu(\xi_\mu - 1)$ и $v_\mu(\xi_\mu^{-1} - 1)$, имеем:

$$\begin{vmatrix} \Delta_0 & 1 & 1 & \ldots 1 & 1 \\ \Delta_1 & \xi_1 & \xi_1^{-1} & \ldots \xi_n & \xi_n^{-1} \\ \Delta_2 & \xi_1^2 & \xi_1^{-2} & \ldots \xi_n^2 & \xi_n^{-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta_{2n} & \xi_1^{2n} & \xi_1^{-2n} & \ldots \xi_n^{2n} & \xi_n^{-2n} \end{vmatrix} = 0, \tag{34}$$

что можно написать в виде:

$$\Delta_{0+\rho} + \Delta_{1+\rho}\gamma_1 + \Delta_{2+\rho}\gamma_2 + \ldots + \Delta_{2n-2+\rho}\gamma_2 + \Delta_{2n-1+\rho}\gamma_1 + \Delta_{2n+\rho} = 0, \tag{35}$$

где $\rho = 0, 1, \ldots, n-1$ и где коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ идут симметрично от концов формулы к средине ее. В этих условиях неизвестные ξ_μ и ξ_μ^{-1} суть корни характеристического уравнения $2n$-й степени:

$$\xi^{2n} + \gamma_1\xi^{2n-1} + \gamma_2\xi^{2n-2} + \ldots + \gamma_2\xi^2 + \gamma_1\xi + 1 = 0. \tag{36}$$

Для наибольшего удобства вычислений Дэл предпринимает следующий путь: исключая из $n+1$ уравнений (35) и (36) количества $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, он получает:

$$\begin{vmatrix} \xi^n + \xi^{-n} & \xi^{n-1} + \xi^{-(n-1} & \ldots \xi + \xi^{-1} & 1 \\ \Delta_0 + \Delta_{2n} & \Delta_1 + \Delta_{2n-1} \ldots & \Delta_{n-1} + \Delta_{n+1} & \Delta_n \\ \Delta_1 + \Delta_{2n+1} & \Delta_2 + \Delta_{2n} \ldots & \Delta_n + \Delta_{n+2} & \Delta_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta_{n-1} + \Delta_{3n-1} & \Delta_n + \Delta_{3n-2} \ldots & \Delta_{2n-2} + \Delta_{2n} & \Delta_{2n-1} \end{vmatrix} = 0. \tag{37}$$

Затем Дэл вводит удобную реккурентную схему

$$\begin{vmatrix} \Delta_0 & & & \\ \Delta_1 & E_1^{(1)} = \Delta_0 + \Delta_2 & & \\ \Delta_2 & E_2^{(1)} = \Delta_1 + \Delta_3 & E_2^{(2)} = E_1^{(1)} + E_3^{(1)} & \\ \Delta_3 & E_3^{(1)} = \Delta_2 + \Delta_4 & E_3^{(2)} = E_2^{(1)} + E_4^{(1)} & E_3^{(3)} = E_2^{(2)} + E_4^{(2)} \\ \Delta_4 & E_4^{(1)} = \Delta_3 + \Delta_5 & E_4^{(2)} = E_3^{(1)} + E_5^{(1)} & \\ \Delta_5 & E_5^{(1)} = \Delta_4 + \Delta_6 & & \\ \Delta_6 & & & \end{vmatrix},$$

т. е.

$$E_s^{(4)} = (\Delta_{s-r} + \Delta_{s+r}) + C_r^1(\Delta_{s-r+2} + \Delta_{s+r-2}) + C_r^2(\Delta_{s-r+4} + \Delta_{s+r-4}) + \ldots$$

При помощи введенных таким образом новых величин определитель (37) перепишется в виде:

$$\begin{vmatrix} \zeta^n & \zeta^{n-1} & \zeta^{n-2} & \ldots \zeta^2 & \zeta & 1 \\ E_n^{(n)} & E_n^{(n-1)} & E_n^{(n-2)} & \ldots E_n^{(2)} & E_n^{(1)} & \Delta_n \\ E_{n+1}^{(n)} & E_{n+1}^{(n-1)} & E_{n+1}^{(n-2)} & \ldots E_{n+1}^{(2)} & E_{n+1}^{(1)} & \Delta_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E_{2n-1}^{(n)} & E_{2n-1}^{(n-1)} & E_{2n-1}^{(n-2)} & \ldots E_{2n-1}^{(2)} & E_{2n-1}^{(1)} & \Delta_{2n-1} \end{vmatrix} = 0, \tag{38}$$

где $\zeta = \xi + \xi^{-1}$.

Корни $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ уравнения (38) дадут неизвестные периоды $p_1, p_2, \ldots, p_n$ в виде:

$$\zeta_\mu = \xi_\mu + \xi_\mu^{-1} = 2\cos\theta_\mu = 2\cos\frac{2\pi\lambda}{p_\mu}. \tag{39}$$

Мало того, коэффициенты a_μ и b_μ, фазы q_μ и амплитуды c_μ получаются непосредственно. Полагая для этого

$$(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)\ldots(\zeta-\zeta_{\mu-1})(\zeta-\zeta_{\mu+1})\ldots(\zeta-\zeta_n) =$$
$$= \zeta^{n-1} + s_1^{(\mu)}\zeta^{n-2} + s_2^{(\mu)}\zeta^{n-3} + \ldots + s_{n-2}^{(\mu)}\zeta + s_{n-1}^{(n)}$$

и вычисляя при помощи симметрических функций $s_\rho^{(\mu)}$ выражения

$$P_\mu = E_n^{(n-1)} + s_1^{(\mu)}E_n^{(n-2)} + s_2^{(\mu)}E_n^{(n-3)} + \ldots + s_{n-2}^{(\mu)}E_n^{(1)} + s_{n-1}^{(\mu)}\Delta_n$$

и

$$Q_\mu = E_{n-1}^{(n-1)} + s_1^{(\mu)}E_{n-1}^{(n-2)} + s_2^{(\mu)}E_{n-1}^{(n-3)} + \ldots + s_{n-2}^{(\mu)}E_{n-1}^{(1)} + s_{n-1}^{(\mu)}\Delta_{n-1},$$

мы имеем:

$$a_\mu = \frac{Q_\mu\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_\mu - P_\mu\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta_\mu}{2^n\sin\frac{\theta_\mu}{2}\sin\theta_\mu\prod\limits_{r=1}^{n}{}'(\cos\theta_\mu-\cos\theta_r)},$$

$$b_\mu = \frac{Q_\mu\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_\mu - P_\mu\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta_\mu}{2^n\sin\frac{\theta_\mu}{2}\sin\theta_\mu\prod\limits_{r=1}^{n}{}'(\cos\theta_\mu-\cos\theta_r)},$$

где знак $'$, поставленный над знаком произведения Π, показывает, что предполагается $r \neq \mu$.

Что же касается самого числа неизвестных периодов, то оно определяется последовательностью определителей:

$$\begin{vmatrix} E_1^{(1)} & \Delta_1 \\ E_s^{(1)} & \Delta_s \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} E_2^{(2)} & E_2^{(1)} & \Delta_2 \\ E_3^{(2)} & E_3^{(1)} & \Delta_3 \\ E_s^{(2)} & E_s^{(1)} & \Delta_s \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} E_3^{(3)} & E_3^{(2)} & E_3^{(1)} & \Delta_3 \\ E_4^{(3)} & E_4^{(2)} & E_4^{(1)} & \Delta_4 \\ E_5^{(3)} & E_5^{(2)} & E_5^{(1)} & \Delta_5 \\ E_s^{(3)} & E_s^{(2)} & E_s^{(1)} & \Delta_s \end{vmatrix},$$

где s постоянно выбирается бóльшим, чем индексы предшествующих строк.

Глава III

ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§ 24. О способе, которым природа разрешает задачу отыскания неизвестных периодов. Идеальное разрешение задачи отыскания периодов дается самой природой в явлении разложения света. Направим луч белого света на стеклянную призму. На экране мы имеем спектр; как показывает опыт, суммарная яркость разложенного света в точности равна первоначальной яркости. Кроме того, здесь мы имеем спектральные линии, испещряющие полученный спектр.

Можно рассматривать это явление разложения света как совершенное решение, даваемое природою задаче отыскания периодов, так как, измеряя в различных точках спектра яркость света, мы определяем амплитуды тех простых гармонических колебаний, которые составляют, слагаясь, первоначальный белый луч. Спектральные линии отвечают в точности неизвестным искомым периодам, которые, таким образом, непосредственно нам даются природою. Монохроматический луч, если бы он был реализован со всею точностью, собственно дал бы лишь одну линию, т. е. соответствовал бы лишь одному простому гармоническому колебанию. Таким образом, в спектре мы имеем как бы готовый ряд Фурье, периоды членов которого даются положением спектральных линий и амплитуды — яркостью их.

Строго монохроматический луч давал бы, как было сказано, лишь одну спектральную линию и, следовательно, лишь один «член Фурье». Конечное число спектральных линий соответствовало бы конечному числу «членов Фурье» и указывало бы на квази-периодический характер первоначального луча. Наконец, счетный спектр, состоящий из счетного числа спектральных линий, вообще говоря, обнаруживал бы почти-периодический характер первоначального луча.

Случай абсолютно-непрерывного спектра указывал бы на континуум членов Фурье. Этот случай еще не имеет соответствующей ему математической идеи, так как еще не дано дальнейших обобщений понятия почти-периодической функции с континуумом «членов Фурье» и, следовательно, соединенной уже не с понятием ряда Фурье, но, скорее, с понятием интеграла типа Стильтьеса.

Во всяком случае, этот круг идей сразу открывает перед нами возможность идти в двух различных направлениях.

Во-первых, подражая природе, можно пытаться изобрести тот или иной аппарат, построенный на оптических, электрических, акустических, упругих или кинематических свойствах материи, который непосредственно давал бы нам простые гармонические составляющие, порождающиеся эмпирически данной кривой $y = f(x)$, представленной, например, в виде ленты достаточно большой длины с обрезанным по кривой $y = f(x)$ верхним краем.

Такие приборы действительно и пытались создать, но в настоящее время они еще слишком примитивны и очень грубы, не будучи притом основаны на глубокой и тонкой идее.

Во-вторых, можно пытаться изобрести тот или иной аналитический процесс, который позволял бы по возможности *непосредственным образом* вылавливать периоды, пользуясь значениями аналитически или эмпирически заданной нам непрерывной кривой $y = f(x)$. Слова: «непосредственным образом», набранные курсивом, указывают на существенно иное направление изыскания, чем то, которое имеется в методе Лагранжа — Дэла. Оно проводит нас через длинную серию выкладок, преобразований и вычислений, включая сюда решение систем n линейных уравнений с n неизвестными, составление и развертывание векового уравнения и, наконец, численное решение алгебраического уравнения n-й степени.

Такую попытку мы имеем в приобретшем в последнее время широкую известность методе периодограмм. Мы увидим, что этот метод, принципы которого были сформулированы еще в 1847 г. Бюи-Балло, когда величайшее открытие тригонометрического ряда, сделанное Фурье, еще не успело войти в сознание[1] и быть понятым во всей его полноте, почти не отличается от метода Бора исследования почти-периодических функций и составления для них рядов Фурье и что, таким образом, либо самое открытие почти-периодических функций, либо время его созревания могло бы быть значительно предварено или ускорено, если бы математики не имели тенденции замыкаться только в своих работах и давали бы себе труд быть чуткими к движению мысли в близких им областях.

§ 25. Принципы Бюи-Балло. Вот в чем первоначально заключались эти принципы.

Представим себе, что у нас есть очень большое число N наблюдений, совершенных в равные промежутки времени и давших N значений

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_N$$

наблюдаемой величины. Группируем их в такую двухмерную табличку:

$$\begin{array}{ccccc}
y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_p \\
y_{p+1} & y_{p+2} & y_{p+3} & \cdots & y_{2p} \\
y_{2p+1} & y_{2p+2} & y_{2p+3} & \cdots & y_{3p} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
y_{(r-1)p+1} & y_{(r-1)p+2} & y_{(r-1)p+3} & \cdots & y_{rp} \\
\hline
Y_1 & Y_2 & Y_3 & \cdots & Y_p
\end{array}, \tag{40}$$

где предполагаем $rp \leqslant N < (r+1)p$, нисколько не интересуясь оставшимися наблюдениями $y_{rp+1}, \ldots, y_N$. Здесь $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ означают средние арифметические величин y_ν, находящихся в колоннах.

Вот теперь положения Бюи-Балло:

I. Если наблюденные величины $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_N$ в том порядке, в каком они написаны, допускают период p, тогда строка средних арифметических $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ тождественна с каждой строкой таблицы и, следовательно, максимум и минимум величины Y тождественны с максимумом и минимумом чисел y, содержащихся в периоде.

II. Если наблюденные величины $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_N$, в том порядке,

---

[1] Открытие Фурье было изложено им в его «La Théorie Analytique de la Chaleur» в 1822 г. Но грандиозность сделанного им открытия начала осознаваться лишь около 1840 г. (лорд Кельвин).

в каком они написаны, допускают период τ, отличный от p и от его аликвотных частей $\frac{1}{2}p$, $\frac{1}{3}p, \ldots$, тогда разность между максимумом и минимумом средних арифметических очень мала и делается тем меньше, чем больше число r строк и чем больше отличие τ от p и его аликвотных частей.

III. Если наблюденные величины $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_N$ образованы путем соответственного сложения нескольких (т. е. конечного числа) периодических последовательностей чисел с различными периодами, тогда средние $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ наиболее близки (до аддитивной постоянной) к числам той последовательности, у которой период ближе всего к p.

IV. Если период τ наблюдаемых величин $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_N$ несколько меньше, чем p, и если числа этого периода сначала идут возрастая и затем убывая, тогда максимум средних арифметических $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_p$ сдвигается вправо при увеличении числа r строк и тем сильнее, чем больше отличие τ от p и его аликвотных частей. Если τ несколько больше числа p, сдвиг указанного максимума идет влево.

§ 26. Изложение метода периодограмм. В этом параграфе мы ограничиваемся лишь тем изложением метода периодограмм, которое дается в литературе, посвященной указанным вопросам. Обычно, приведя положения Бюи-Балло, делают следующие замечания.

Так как группировка наблюденного материала $y_1, y_2, \ldots, y_N$ по строчкам «длины p» тогда и только тогда вскрывает истинный период материала, когда p как раз равно этому периоду; так как в этом именно случае особенно велико колебание (т. е. разность между максимумом и минимумом) средних $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ или их амплитуда; и так как в том случае, когда истинные периоды наблюденного материала сильно разнятся от длины строчек p, средние $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ представляют очень малое колебание, мало отклоняясь от численной постоянной,— ничего другого более не остается делать, как группировать наблюденный материал $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_N$ по строкам всевозможных длин p и смотреть, при каких p колебание средних $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ особенно велико и при каких p оно незначительно. При этом «ценными» p являются те, при которых колебание средних особенно велико, потому что такие p можно заподозреть составляющими периодами наблюденного материала, «выловленными» таким образом из него; что же касается p с незначительным колебанием средних $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$, то ими можно пренебречь, потому что среди них не следует искать периодов наблюденного материала.

Иначе говоря, нужно, взяв за аргумент длину строчек p, составить «спектральную функцию» $H(p)$, численно равную колебанию или амплитуде средних $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$, и посмотреть, при каких p спектральная функция $H(p)$ имеет особенно большие значения: такие p и следует считать составляющими периодами наблюденного материала $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_N$.

Совокупность таких p, для которых $H(p)$ особенно велика [т. е. максимумов спектральной функции $H(p)$] называется спектром эмпирически данной функции $y(x)$.

Спектральная функция $H(p)$ и есть периодограмма опытного материала $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_N$.

Раз понятие периодограммы нащупано, остается лишь облечь его в математическую форму. Но здесь в самой передаче имеющегося в литературе изложения встречаются значительные затруднения.

Начать с того, что это изложение не отличается большой ясностью.

Здесь прежде всего предлагается «выравнить» средние

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$$

«по синус-волне периода p» и обозначить через $H'(p)$ амплитуду этой синусоиды. Для этого пишут такие формулы:

$$\left.\begin{aligned} a_p &= \frac{2}{p}\sum_{\nu=1}^{p} Y_\nu \cos\frac{2\pi}{p}\nu, \\ b_p &= \frac{2}{p}\sum_{\nu=1}^{p} Y_\nu \sin\frac{2\pi}{p}\nu \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

и полагают

$$H(p) = \sqrt{a_p^2 + b_p^2}. \tag{42}$$

Если мы теперь обратимся к § 17 «Остановленный ряд Фурье как результат сглаживания эмпирически данной кривой», то увидим, что выравнивание средних $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ по синус-волне периода p есть не что иное, как лишь отыскание таких двух чисел a_p и b, для которых выражение

$$E = \frac{1}{p}\sum_{\nu=1}^{p}\left[Y_\nu - \left(a_p\cos\frac{2\pi}{p}\nu + b_p\sin\frac{2\pi}{p}\nu\right)\right]^2 \tag{43}$$

достигает минимума.

Действительно, количество E есть, очевидно, квадратическая функция двух независимых переменных a_p и b_p. Для того чтобы мы имели

$$E = E_{\min},$$

нужно, чтобы

$$\frac{\partial E}{\partial a_p} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial E}{\partial b_p} = 0.$$

Это нам дает равенства

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{p}\left[Y_\nu - \left(a_p\cos\frac{2\pi}{p}\nu + b_p\sin\frac{2\pi}{p}\nu\right)\right]\cos\frac{2\pi}{p}\nu = 0, \\ \sum_{\nu=1}^{p}\left[Y_\nu - \left(a_p\cos\frac{2\pi}{p}\nu + b_p\sin\frac{2\pi}{p}\nu\right)\right]\sin\frac{2\pi}{p}\nu = 0. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Но, в силу формулы элементарной алгебры, имеем:

$$1 + e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \ldots + e^{in\varphi} = \frac{e^{i(n+1)\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1} = \frac{(e^{i(n+1)\varphi} - 1)(e^{-i\varphi} - 1)}{(e^{i\varphi} - 1)(e^{-i\varphi} - 1)},$$

откуда, отделяя действительные части от чисто мнимых, находим:

$$1+\cos\varphi+2\cos 2\varphi+\ldots+\cos n\varphi=\frac{\cos n\varphi-\cos(n+1)\varphi-\cos\varphi-1}{2-2\cos\varphi},$$

$$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+\sin n\varphi=\frac{\sin n\varphi-\sin(n+1)\varphi+\sin\varphi}{2-2\cos\varphi}.$$

Полагая в этих равенствах $n=p$ и $\varphi=\frac{4\pi}{p}$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} 1+\sum_{\nu=1}^{p}\cos\nu\frac{4\pi}{p}&=\frac{1-\cos\varphi-\cos\varphi+1}{2(1-\cos\varphi)}=1,\\ \sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu\frac{4\pi}{p}&=\frac{0-\sin\varphi+\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Вследствие этого равенства (44) перепишутся в виде:

$$\sum_{\nu=1}^{p}Y_\nu\cos\frac{2\pi}{p}\nu-a_p\frac{p}{2}=0$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{p}Y_\nu\sin\frac{2\pi}{p}\nu-b_p\frac{p}{2}=0.$$

Поэтому числа a_p и b_p, вычисленные по формулам (41), в самом деле обращают в минимум выражение E формулы (43), и, значит, среди тригонометрических двухчленов

$$T_\nu=a\cos\frac{2\pi}{p}\nu+b\sin\frac{2\pi}{p}\nu$$

в самом деле имеется лишь один двучлен, обращающий в минимум выражение

$$E=\frac{1}{p}\sum_{\nu=1}^{p}(Y_\nu-T_\nu)^2.$$

Коэффициенты a и b этого тригонометрического двучлена T_ν должны быть для этого соответственно равны числам a_p и b_p, даваемым формулами (41).

Но из всего, что было здесь сказано, вовсе еще не следует, что колебание средних

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$$

и амплитуда $H(p)$ тригонометрического двучлена

$$a_p\cos\frac{2\pi}{p}\nu+b_p\sin\frac{2\pi}{p}\nu$$

должны быть равными друг другу. Напротив, если бы средние $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ не были числами, получающимися процессом среднего арифметического, но были бы взяты произвольно, например, равными нулю, кроме первого Y_1, весьма большого положительного числа: $Y_1=\sqrt{p}>0$, $Y_2=Y_3=\ldots Y_p=0$, то при очень большом p формулы (41) дали бы a_p и b_p очень маленькими, так как в этом случае мы имеем:

$$a_p = \frac{2}{p} Y_1 \cos\frac{2\pi}{p} \text{ и } b_p = \frac{2}{p} Y_1 \sin\frac{2\pi}{p}.$$

И этот случай легко может представиться a priori, так как материал $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_N$ может оказаться периодическим с периодом, равным p, и дающим все время средние $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ соответственно равными $\sqrt{p}, 0, \ldots, 0$.

Таким образом, указанный способ вычисления колебания или амплитуды средних $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ является произвольным и не могущим быть обоснованным.

Не более проливается света делаемым вслед за этим указанием на то, что,

«если p не есть целое кратное промежутку между двумя соседними наблюдениями, то тогда уже невозможно обращаться к услугам двухмерной таблички (40) Бюи-Балло, но по смыслу вещей (?) следует искать решения a_p, b_p минимальной проблемы

$$S(p) = \frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N}\left[y_\nu - \left(a_p \cos\frac{2\pi}{p}\nu + b_p \sin\frac{2\pi}{p}\nu\right)\right]^2 = \min,$$

решая два уравнения с двумя неизвестными a_p и b_p:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial a_p} &= \frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N}\left[y_\nu - \left(a_p\cos\frac{2\pi}{p}\nu + b_p \sin\frac{2\pi}{p}\nu\right)\right]\cos\frac{2\pi}{p}\nu = 0, \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial b_p} &= \frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N}\left[y_\nu - \left(a_p\cos\frac{2\pi}{p}\nu + b_p \sin\frac{2\pi}{p}\nu\right)\right]\sin\frac{2\pi}{p}\nu = 0. \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Эти уравнения прекрасно решаются, когда имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\sin\frac{2\pi}{p}\nu\cos\frac{2\pi}{p}\nu = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}\sin\frac{4\pi}{p}\nu = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{2\pi}{p}N}{\sin\frac{2\pi}{p}}\sin\frac{2\pi}{p}(N+1) = 0,$$

потому что тогда a_p и b_p остаются в уравнениях по одиночке. А это происходит, когда одно из чисел

$$\frac{2N}{p} \text{ или } \frac{2(N+1)}{p}$$

есть целое. Для промежуточных величин p имеется, правда, отклонение (?), но не существенное, если N велико. А для того случая, когда отношение

$$\frac{N}{p} = k$$

есть целое число, a_p и b_p в точности совпадают с k-ми коэффициентами Фурье разложения в отрезке $[0, N]$».

Этот способ определения спектральной функции $H(p)$ является столь же неясным, как и только что рассмотренный.

Притом, когда p и $N:p=k$ суть целые, оба способа совпадают друг с другом. Действительно, прежде всего, в силу формул (45), мы имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\cos\frac{4\pi}{p}\nu=\sum_{\nu=1}^{N}\sin\frac{4\pi}{p}\nu=0,$$

откуда

$$\sum_{\nu=1}^{N}\cos^2\frac{2\pi}{p}\nu=\sum_{\nu=1}^{N}\sin^2\frac{2\pi}{p}\nu=\frac{N}{2}.$$

Поэтому формулы (46) нам дают:

$$\left.\begin{aligned}a_p&=\frac{2}{N}\sum_{\nu=1}^{N}y_\nu\cos\frac{2\pi}{p}\nu,\\ b_p&=\frac{2}{N}\sum_{\nu=1}^{N}y_\nu\sin\frac{2\pi}{p}\nu.\end{aligned}\right\}\tag{47}$$

С другой стороны, для всяких целых m и n мы имеем:

$$\sin\frac{2\pi}{p}(mp+n)=\sin\frac{2\pi}{p}n$$

и

$$\cos\frac{2\pi}{p}(mp+n)=\cos\frac{2\pi}{p}n.$$

Следовательно,

$$a_p=\frac{2}{kp}\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{n=1}^{p}y_{mp+n}\cos\frac{2\pi}{p}(mp+n)=\frac{2}{p}\sum_{\nu=1}^{p}Y_p\cos\frac{2\pi}{p}\nu$$

и

$$b_p=\frac{2}{kp}\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{n=1}^{p}y_{mp+n}\sin\frac{2\pi}{p}(mp+n)=\frac{2}{p}\sum_{\nu=1}^{p}Y_p\sin\frac{2\pi}{p}\nu.$$

Таким образом, в этом случае мы, действительно, имеем совпадение с формулами (41). А так как мы видели, что даже в случае чисто-периодического материала $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_N$ с периодом p амплитуда тригонометрического двухчлена $a_p\cos\frac{2\pi}{p}\nu+b_p\sin\frac{2\pi}{p}\nu$ вовсе не совпадает с колебанием средних $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$, то новый прием отнюдь не оказывается лучше прежнего.

Правда, в рассмотренном случае целых p и k числа a_p и b_p совпадают, как легко видеть, с величинами a_ν и b_ν, вычисленными по формулам (19) (см. § 16 «Усеченный ряд Фурье») при замене ν через k и p через N. Действительно, проделав в этих формулах указанную замену, мы имеем правые части формул (47):

$$a_k=\frac{2}{N}\sum_{\nu=1}^{N}y_\nu\cos\nu k\frac{2\pi}{N}=\frac{2}{N}\sum_{\nu=1}^{N}y_\nu\cos\frac{2\pi}{p}$$

и

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{\nu=1}^{N} y_\nu \sin \nu k \frac{2\pi}{N} = \frac{2}{N} \sum_{\nu=1}^{N} y_\nu \sin \frac{2\pi}{p}.$$

Однако следует иметь в виду, что в § 16 речь идет не о настоящем бесконечном ряде Фурье, коэффициенты которого даются интегральными формулами, но лишь об усеченном ряде Фурье, т. е. о некоторой конечной имитации ряда Фурье, ценность которой, как мы видели в § 16, есть условная.

§ 27. Продолжение изложения метода периодограмм. Гораздо больше вносят ясности, когда прямо заявляют, что «периодограмма есть функция действительного переменного p, совпадающая, когда p есть целое положительное, с амплитудой s_p для p-го члена разложения Фурье:

$$y(x) = c_0 + c_1 \sin\left(\frac{2\pi}{N} x + q_1\right) + \ldots + c_n \sin\left(\frac{2n\pi}{N} x + q_n\right) + \ldots,$$

и когда пытаются соединить дискретные точки (p, c_p), нанесенные на плоскости и имеющие своими абсциссами целые положительные p и своими ординатами амплитуды c_p, какой-нибудь, по возможности более простою непрерывною линией.

Это определение имеет за собой большое преимущество: его ясность.

Возражать против подобных определений, собственно говоря, не приходится, раз они полагаются a priori. Но можно желать, чтобы определяемое ими понятие все-таки имело хотя бы некоторое отношение к рассматривавшемуся до этого предмету.

Вот теперь каким образом облекают в математическую форму данное определение периодограммы. Для этого поступают двояким образом:

1. Или просто отправляются от формул (47), как основных, полагая таким образом a priori:

$$\left.\begin{aligned} a(p) &= \frac{2}{N} \sum_{\nu=1}^{N} y_\nu \cos \frac{2\pi}{p} \nu, \\ b(p) &= \frac{2}{N} \sum_{\nu=1}^{N} y_\nu \sin \frac{2\pi}{p} \nu \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

для любого действительного значения независимого переменного p.

2. Или придают формулам (47) интегральный вид, полагая a priori:

$$\left.\begin{aligned} a(p) &= \frac{2}{N} \int_0^N y(\alpha) \cos \frac{2\pi}{p} \alpha \, d\alpha, \\ b(p) &= \frac{2}{N} \int_0^N y(\alpha) \sin \frac{2\pi}{p} \alpha \, d\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

При этом в обоих случаях самая периодограмма $H(p)$ определяется также a priori:

$$H(p) = +\sqrt{a^2(p) + b^2(p)}. \tag{49}$$

Заметим, что формулы (47) для целого отношения $N:p=k$ даются решением минимальной проблемы:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left[y_\nu - \left(a\cos\frac{2\pi}{p}\nu + b\sin\frac{2\pi}{p}\nu\right)\right]^2 = \min.$$

§ 28. Периодограмма простого гармонического колебания. Пробным камнем для всяких попыток отыскания периодов всегда служит прежде всего простое гармоническое колебание

$$y(x) = c\sin\left(\frac{2\pi}{\xi}x + q\right).$$

Применяя интегральную форму (48) периодограммы для этой функции, мы получаем:

$$a(p) = \frac{2c}{N}\int_0^N \sin\left(\frac{2\pi}{\xi}\alpha + q\right)\cos\frac{2\pi}{p}\alpha\, d\alpha =$$

$$= c\left\{A\sin\left[(\Xi - P)\frac{N}{2} + q\right] + B\sin\left[(\Xi + P)\frac{N}{2} + q\right]\right\},$$

$$b(p) = \frac{2c}{N}\int_0^N \sin\left(\frac{2\pi}{\xi}\alpha + q\right)\sin\frac{2\pi}{p}\alpha\, d\alpha =$$

$$= c\left\{A\cos\left[(\Xi - P)\frac{N}{2} + q\right] - B\cos\left[(\Xi + P)\frac{N}{2} + q\right]\right\},$$

где

$$\Xi = \frac{2\pi}{\xi}, \quad P = \frac{2\pi}{p}$$

и

$$A = \frac{\sin(\Xi - P)\frac{N}{2}}{(\Xi - P)\frac{N}{2}}; \quad B = \frac{\sin(\Xi + P)\frac{N}{2}}{(\Xi + P)\frac{N}{2}}.$$

Следовательно,

$$H^2(p) = c^2[A^2 + B^2 - 2AB\cos(N\Xi + 2q)].$$

В этом виде периодограмма еще достаточно сложна. Но здесь на помощь приходит малость количества B при N большом[1]. Вместе с тем

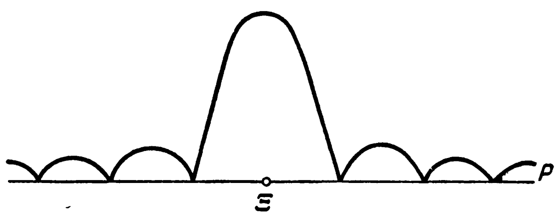
---

[1] Действительно, мы имеем $|B| < \dfrac{1}{\frac{N}{2}(\Xi + P)}$. Если мы требуем неравенства $|B| < \varepsilon$, то, приняв во внимание смысл выражений Ξ и P, мы получим условие $N > \dfrac{p\xi}{\pi\varepsilon(p + \xi)}$. Например, желая иметь $|B| < \frac{1}{20}$, мы должны потребовать, чтобы при $p = \xi$ было $N > \pi\xi$. Это значит, что наблюденный материал должен быть в три раза длиннее искомого периода, что на практике всегда соблюдается.

следует отметить, что $A = 1$ при $p = \xi$, каково бы ни было число N. Поэтому, пренебрегая величиной B сравнительно с величиной A, мы находим:

$$H^2(p) = c^2A^2, \text{ т. е. } H(p) = c\left|\frac{\sin(\Xi - P)\frac{N}{2}}{(\Xi - P)\frac{N}{2}}\right|. \tag{50}$$

Геометрически периодограмма в этом случае, если рассматривать P как абсциссу, представится кривой, показанной на фиг. 11.



Фиг. 11

Читатель видит, что самый большой максимум мы имеем при $p = \xi$; величина этого максимума равна амплитуде, соответствующей искомому периоду ξ. Кривая имеет уничтожающуюся ординату для

$$P = \Xi - \frac{2\pi}{N}k, \text{ т. е. для } p = \frac{\xi}{1 - \frac{k}{N}\xi},$$

где $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Следовательно, между этими точками («корнями» периодограмм) должны находиться еще другие максимумы, которые Шустер называет «поддельными максимумами» и которые он сравнивает со спектрами первого, второго, третьего... порядка диффракционной решетки, причем наибольший максимум соответствует спектру «нулевого порядка». Их интенсивность быстро убывает с удалением от главного максимума, и самое положение их в сильной степени зависит от длины N наблюденного материала, в то время как положение главного максимума совершенно не зависит от N. Поэтому их легко отличить от главного максимума [1].

Точная величина абсцисс этих максимумов дается трансцендентным уравнением

$$\frac{N}{2}(\Xi - P) = \operatorname{tg}\frac{N}{2}(\Xi - P).$$

Взаимное расстояние β двух непосредственно соседних (справа и слева) с главным максимумом корней периодограммы называется максимальной шириной рассматриваемой периодичности. Она определяется формулой

$$\beta = \frac{2\pi}{N}$$

[1] В. К. Аркадьеву я обязан относящимися сюда сведениями, которыми он пожелал поделиться со мною.

и, значит, при N большом, обратно пропорциональна N. Это обстоятельство имеет большую важность, когда хотят отделить друг от друга несколько периодов. Действительно, когда два главных максимума имеют перекрывающимися их максимальные ширины, тогда отделить такие периоды друг от друга почти невозможно, особенно когда величины амплитуд в этих максимумах различного порядка. Говоря языком аналогий, можно сказать, что здесь спектральные линии несколько расплываются и частично входят одна в другую. И чем меньше будут их максимальные ширины, тем большей будет возможность отделения друг от друга этих периодов, тем более тонкими и более четкими и яркими будут спектральные линии и тем большей будет «разрешающая сила» периодографического приема; эта сила может быть принята, следовательно, по определению пропорциональной числу N.

§ 29. **О вмешательстве в определение периодов законов хаоса.** Математически говоря, если бы наблюденный материал со всею точностью отражал в себе почти-периодическое явление, то тогда речь шла бы о конечном или, самое большее, счетном спектре, спектральные линии которого были бы даны во всей их индивидуальности, одинаково четко выделяясь из окружающего их мрака, как бы слабой ни была интенсивность тех или других из них. Именно таким образом математик мыслит вообще какое-нибудь счетное множество точек, не позволяя ни одной из них ускользнуть от его внимания и не допуская вторжения в их среду никакого чуждого элемента.

На деле в наблюденный материал неизбежным образом входят ошибки наблюдения, относительно которых нужно предположить, что они подчинены закону Гаусса и оказывают вообще апериодическое симметрическое влияние (систематические ошибки периодической природы, разумеется, никаким анализом не отделимы от других факторов, обусловливающих периодичность).

Таким образом, фактически мы имеем вовсе не четко выделяющийся счетный спектр, сохраняющий за каждой линией всю ее индивидуальность, но полосатый спектр, состоящий из отдельных несколько размытых спектральных линий, более или менее интенсивно сияющих, в то время, как другие настолько слабы и размыты, что лишь с сомнением приходится их выделять из темного фона.

Поэтому здесь является важный вопрос, насколько большой должна быть амплитуда периодичности, чтобы соответствующий ей максимум периодограммы выделился достаточно четко; т. е. насколько должен максимум превышать среднюю высоту периодограммы, чтобы оцениваться как достаточный критерий для наличия некоторой внешней периодичности, присущей самому явлению.

Здесь прежде всего решающим признаком является поведение ординаты периодограммы при расширении наблюденного материала. Иначе говоря, мы рассматриваем здесь $H(p)$ как функцию длины N наблюденного материала. Если вблизи p нет никакого периода, $H(p)$ убывает с возрастанием N как $1:\sqrt{N}$, т. е. как среднее случайных ошибок. Если p в точности совпадает со спектральной линией, то $H(p)$ остается положительным и постоянным с возрастанием величины N. Если же p соответствует периоду лишь приблизительно, то $H(p)$ убывает (вследствие сужения максимальной ширины периодичностей и, отсюда, постепенного обнажения абсциссы p) до нуля, но не со скоростью $1:\sqrt{N}$, а несколько медленнее.

§ 30. Об анализе затухающих колебаний. До сих пор предполагалось, что исследуемая функция $f(x)$ составлена из чисто-периодических функций, возмущенных, может быть, случайными ошибками, т. е. представляет собой почти периодическую функцию с точностью до ошибок наблюдения или измерения.

Однако весьма ценным является анализ еще и других случаев, среди которых в первую очередь следует указать на «биения» и «затухающие колебания».

I. Биения. Явление «биений» сопровождает обычно наложение колебаний с весьма близкими периодами. Здесь прежде всего представляется случай наложения двух простых гармонических колебаний с близкими друг к другу периодами p_1 и p_2:

$$y(x) = a_1 \cos\frac{2\pi}{p_1}x + b_1 \sin\frac{2\pi}{p_1}x + a_2 \cos\frac{2\pi}{p_2}x + b_2 \sin\frac{2\pi}{p_2}x.$$

Явление биений обнаруживается преобразованием:

$$\begin{aligned} y(x) &= \left[a_1 + a_2 \cos 2\pi\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)x - b_2 \sin 2\pi\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)x\right] \cos\frac{2\pi}{p_1}x + \\ &+ \left[b_1 + a_2 \sin 2\pi\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)x + b_2 \cos 2\pi\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)x\right] \sin\frac{2\pi}{p_1}x = \\ &= A_1 \cos\frac{2\pi}{p_1}x + B_1 \sin\frac{2\pi}{p_1}x. \end{aligned}$$

Следовательно, изучаемая функция $y(x)$ может быть рассматриваема как простая гармоническая функция периода p, но с переменными коэффициентами A_1 и B_1, являющимися в свою очередь также периодическими функциями, но уже с весьма большим периодом:

$$1 : \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) = \frac{p_1 p_2}{|p_1 - p_2|}.$$

Вот этот самый большой период, акустически свободно улавливаемый слухом, и создает явление биений.

Анализ биений поэтому не представляет ничего принципиально нового, нацело сводясь к почти-периодическим функциям. Лишь практически представляется иногда выгодным выделять этот случай особо, производя для него несколько иначе выкладки периодограммы.

II. Затухающие колебания. Совсем иную картину являют затухающие колебания, так как представляющие их функции уже не суть почти периодические.

Простейший случай затухающего колебания дает функция

$$y(x) = ce^{-kx} \sin \left(\frac{2\pi}{p} x + q\right), \tag{51}$$

где $k > 0$.

Общим случаем будет, очевидно, тот, когда данное затухающее явление будет состоять из конечного или счетного числа затухающих колебаний различных периодов, фаз, амплитуд и скоростей затухания. Иначе говоря, общий случай затухающего явления выражается в виде:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k_n x} \sin \left(\frac{2\pi}{p_n} x + q_n\right), \tag{52}$$

где $k_n > 0$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Оставляя в стороне тонкий и глубокий вопрос о необходимости сходимости этого ряда, мы ограничимся здесь простым указанием на то, что для почти-периодических функций вовсе не является обязательной именно сходимость ее ряда Фурье, так как изображение почти-периодической функции $y(x)$ ее рядом Фурье может оказаться целиком лишь символическим:

$$y(x) \backsim \sum_m A_m e^{i\Lambda_m x}, \qquad (\Lambda_m \text{ действительно})$$

т. е. таким, где не спрашивают о сходимости ряда, стоящего в правой части, удовлетворяясь лишь тем, что данная почти-периодическая функция порождает единственный ряд Фурье и что, обратно, данный ряд Фурье может быть порожден только одной почти-периодической функцией; это обстоятельство указывается заменой знака равенства $(=)$ знаком соответствия $(\backsim)$. Тот факт, что почти-периодическая функция $y(x)$ «разложима» в ее ряд Фурье $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$, означает лишь то, что мы имеем некий процесс, позволяющий «выделять» из $y(x)$ члены $A_n e^{i\Lambda_n x}$ ее ряда Фурье, т. е. определять их один за другим, при уверенности, что разные почти-периодические функции $y(x)$ дадут существенно различные и ряды Фурье. Но указанная «разложимость» почти-периодической функции в ряд Фурье $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ еще не означает ее «разрешимость» в простые гармонические члены $A_n e^{i\Lambda_n x}$, т. е. что $y(x)$ «составлена» из этих простых гармонических членов, потому что ряд Фурье $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ может оказаться и везде расходящимся.

Сказанное о почти-периодических функциях имеет тем более естественное отношение к затухающим явлениям, что ряд (52) затухающих колебаний легко может быть написан в виде показательного ряда Фурье $\sum\limits_n A_n e^{\Lambda_n x}$, где A_n и Λ_n суть постоянные числа, не зависящие от x, но, вообще говоря, уже комплексные, тогда как в ряде Фурье для почти-периодических функций числа Λ_n все чисто-мнимые.

Чтобы удостоверить сказанное относительно ряда (52) затухающих колебаний, достаточно, прибегнув к формуле Эйлера:

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

написать общий член ряда (51) в виде суммы двух членов:

$$A_n e^{\Lambda_n x} + \overline{A}_n e^{\overline{\Lambda}_n x},$$

где вообще a и $\overline{a}$ обозначают два сопряженных комплексных числа.

Таким образом, ряд (52) затухающих колебаний может быть переписан в виде:

$$y(x) = \sum_n A_n e^{\Lambda_n x}, \tag{52*}$$

где коэффициенты A_n и показатели Λ_n вообще суть комплексные числа.

Это важное обстоятельство дает возможность искать изображение эмпирически данной затухающей функции $f(x)$, вычисленной для равных промежутков времени наблюдения $x = x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ в виде конечного ряда элементарных затухающих функций

$$y(x) = A_1 e^{\Lambda_1 x} + A_2 e^{\Lambda_2 x} + \ldots + A_n e^{\Lambda_n x}.$$

В принципе для этого достаточно применения метода Лагранжа — Дэла (см. § 23), где только вместо чисто-мнимых неизвестных ξ_μ должны стоять уже комплексные неизвестные.

Возникает вопрос: нельзя ли для представления затухающего периодического явления применить не метод Лагранжа — Дэла, а периодограмму? Здесь иногда делается указание на то, что в случае элементарного затухающего колебания

$$y(x) = ce^{-kx}\sin\left(\frac{2\pi}{p}x + q\right) \tag{51}$$

подстановка функции $y(x)$ в периодограмму

$$a(p) = \frac{2}{N}\int_0^N y(\alpha)\cos\frac{2\pi}{p}\alpha\,d\alpha$$

и

$$b(p) = \frac{2}{N}\int_0^N y(\alpha)\sin\frac{2\pi}{p}\alpha\,d\alpha$$

не поведет ни к каким теоретическим трудностям, так как в силу известных формул:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2}$$

и

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2 + b^2}$$

мы не выходим из круга интегрирующихся до конца выражений. Но при этом добавляют, что финальные формулы столь сложны, что практически этот путь бесцелен.

Лично нам кажется, что и теоретически указанный путь бессмыслен. Действительно, периодограмма, плохо ли или хорошо она была нащупана, во всяком случае была извлечена из законов Бюи-Балло, применимых, по самому замыслу автора, лишь к квази-периодическим функциям. Ниже мы строго докажем, что законы Бюи-Балло применимы и к почти-периодическим функциям. Поэтому-то, как мы увидим ниже, периодограммы и применимы к почти-периодическим функциям и, будучи приложены к ним, в действительности должны давать результаты, близкие к искомым неизвестным периодам.

Но ничто не дает нам права думать, что законы Бюи-Балло применимы к затухающим функциям. Поэтому не сложность финальных формул, на которую жалуются, а самый смысл делаемого, в данном случае совершенно отсутствующий, заставляет оставить этот путь. Можно подставлять что угодно во что угодно и при этом получать нечто; но если при этом выходят за пределы законности подстановки, то уже не следует жаловаться на фантастичность результата.

Гораздо более серьезной является попытка пробовать применить периодограмму к случаю чрезвычайно медленно затухающего явления. В этом случае, разбив время наблюдения на достаточно малые промежутки, можно в каждом из них рассматривать затухание как несуществующее и, следовательно, применением периодограммы отыскать неизвестные периоды, затем, по нахождении их, сличая между собой течение периодограммы в разных промежутках наблюдения вблизи истинных периодов, найти соответствующие им скорости затухания.

Таким образом, математическая задача об отыскании периодов данного затухающего явления еще не может быть рассматриваема как точно поставленная.

Глава IV

КРИТИКА МЕТОДА ПЕРИОДОГРАММ

§ 31. Обоснование принципов Бюи-Балло. Это обоснование проистекает из следующих рассмотрений.

Пусть $f(x)$ есть какая-нибудь почти-периодическая функция, имеющая $\sum\limits_n A_n e^{i\Lambda_n x}$ своим рядом Фурье

$$f(x) \backsim \sum_n A_n e^{i\Lambda_n x},$$

где Λ_n есть величина действительная ($n = 1, 2, 3 \ldots$).

Мы знаем, что действительные части Λ_n называются показателями Фурье, а комплексные числа A_n — коэффициентами Фурье. Назовем теперь действительные числа

$$\frac{2\pi}{\Lambda_1}, \frac{2\pi}{\Lambda_2}, \ldots, \frac{2\pi}{\Lambda_n}, \ldots \tag{III}$$

внутренними периодами, или спектральными числами данной почти-периодической функции $f(x)$, а совокупность всех внутренних периодов для $f(x)$ назовем просто спектром почти-периодической функции $f(x)$.

Понятие о внутреннем периоде $p_n = \frac{2\pi}{\Lambda_n}$ почти-периодической функции $f(x)$ нужно тщательно отличать от понятия почти-периода, соответствующего заранее заданному положительному числу (см. § 6). Этот последний есть просто любое из чисел τ

$$\ldots, \tau_{-3}, \tau_{-2}, \tau_{-1}, 0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots,$$

которые заставляют удовлетворяться на всей области $(-\infty < x < +\infty)$ основное неравенство

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon, \tag{II}$$

служащее к самому определению понятия почти-периодической функции. По определению почти-периодической функции почти-периоды $\ldots, \tau_{-1}, 0, \tau_1, \ldots$ имеются у нее для всякого заранее выбранного положительного ε и притом такие, что расстояние двух соседних почти-периодов ее τ_k и τ_{k+1} не уменьшается ниже некоторой положительной грани m, $m > 0$, и не увеличиваются выше также некоторой положительной грани M, $M > 0$, так что мы всегда имеем неравенства

$$m < \tau_{k+1} - \tau_k < M,$$

верные при всяком целом числе k. Но при всем том почти-периоды $\ldots, \tau_{-1}, 0, \tau_1, \ldots$ являются несколько размытыми, потому что, перемещая слегка какой-нибудь почти-период τ_ν в новое положение τ'_ν, мы всегда имеем опять почти-период, соответствующий этому же числу ε, так как каждая почти-периодическая функция $f(x)$ есть ограниченная и равномерно-непрерывная на всей области $(-\infty < x < +\infty)$ (см. § 7, свойство A). Последнее же как раз и обозначает, что если для какого-нибудь τ_ν удовлетворяется неравенство

$$|f(x+\tau_\nu) - f(x)| < \varepsilon$$

на всей области $(-\infty < x < +\infty)$, то это же самое неравенство

$$|f(x+\tau'_\nu) - f(x)| < \varepsilon$$

будет удовлетворено на всей этой области при всяком τ'_ν, достаточно близком к τ_ν: следовательно, τ'_ν есть опять почти-период для $f(x)$, соответствующий тому же самому ε.

Таким образом, почти-периоды $\ldots, \tau_{-1}, 0, \tau_1, \ldots$ являются несколько неопределенными при одном и том же самом числе и для той же самой почти-периодической $f(x)$. Если данная $f(x)$ есть чисто-периодическая функция с периодом p, то почти-периодами для $f(x)$, соответствующими заданному числу ε, будут всякие числа $\ldots, \tau_{-1}, 0, \tau_1, \ldots$, соответственным образом достаточно близкие к периодам $\ldots, -p, 0, +p, \ldots$

Напротив, внутренние периоды для почти-периодической функции $f(x)$ имеют совершенную определенность и спектр почти-периодической функции

$f(x)$ есть вполне определенное счетное (или конечное) множество точек: каждое действительное число ξ либо есть спектральная точка для $f(x)$, либо не является такой точкой; никакого третьего обстоятельства не может быть. Если данная $f(x)$ есть чисто-периодическая функция с наименьшим периодом p, спектром функции $f(x)$ будет счетное (или конечное) множество чисел

$$\frac{2\pi}{np},$$

где число n есть целое, но не всякое, а лишь такое, соответствующий которому коэффициент Фурье A_n рассматриваемой чисто-периодической функции $f(x)$ отличен от нуля, $A_n \neq 0$.

Переходим теперь к доказательству принципов Бюи-Балло. Предположим для этого, что имеем какую-нибудь почти-периодическую функцию $f(x)$, что P есть некоторое действительное число, неравное нулю и безразлично какое: положительное или отрицательное.

Рассмотрим отрезок $[0, P]$ и разделим его на p равных частей; здесь p есть целое положительное число. Для образования таблицы Бюи-Балло предположим, что мы обладаем «наблюденным материалом»

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_N,$$

являющимся не чем иным, как точными величинами рассматриваемой почти-периодической функции $f(x)$ соответственно в точках:

$$\frac{1}{p}P,\ \frac{2}{p}P,\ \frac{3}{p}P, \ldots, \frac{N}{p}P,$$

так что

$$f\left(\frac{\nu}{p}P\right) = y_\nu,\quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, N.$$

Образуем теперь двухмерную таблицу Бюи-Балло:

$$\begin{array}{llll}
y_1 & y_2 & y_3 & \cdots y_p \\
y_{p+1} & y_{p+2} & y_{p+3} & \cdots y_{2p} \\
y_{2p+1} & y_{2p+2} & y_{2p+3} & \cdots y_{3p} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
y_{(r-1)p+1} & y_{(r-1)p+2} & y_{(r-1)p+3} & \cdots y_{rp} \\
\hline
Y_1 & Y_2 & Y_3 & \ldots Y_p,
\end{array}$$

где мы предполагаем, что $rp \leqslant N < (r+1)p$, и где $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ суть средние арифметические величин y_ν, находящихся в колоннах.

Теорема 1. *Если P есть внутренний период почти-периодической функции $f(x)$ (т. е. точка ее спектра), то средние арифметические $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ двухмерной таблицы Бюи-Балло стремятся к вполне определенным пределам, когда число r горизонтальных строк таблицы Бюи-Балло безгранично возрастает, причем эти пределы в точности равны величинам полной чисто-периодической конституанты $Y(x)$ с периодом P данной почти-периодической функции $f(x)$.*

Доказательство. Для доказательства возьмем новое действительное переменное ξ и рассмотрим отношение

$$Y_r(\xi) = \frac{f(\xi) + f(P+\xi) + f(2P+\xi) + \cdots + f[(r-1)P+\xi]}{r}.$$

Ясно, что это есть почти-периодическая функция переменного ξ, и, следовательно, ограниченная и равномерно-непрерывная на всей области $(-\infty < x < +\infty)$.

Нашей ближайшей целью является доказательство того, что функция $Y(\xi)$ стремится к некоторому вполне определенному пределу $Y(\xi)$, когда число r безгранично возрастает, т. е.

$$\lim_{r \to +\infty} Y_r(\xi) = Y(\xi),$$

каково бы ни было действительное число ξ.

Для доказательства возьмем какое-нибудь положительное число ξ, малое как угодно, и изобразим данную почти-периодическую функцию $f(x)$ с точностью до ε конечной линейной комбинацией $L(x)$ вида (см. § 8):

$$L(x) = \Sigma a e^{i\lambda x}.$$

Следовательно, мы имеем на всей области $(-\infty < x < +\infty)$ неравенство

$$|f(x) - L(x)| < \varepsilon. \tag{53}$$

Разобьем линейную комбинацию $L(x)$ на две: $L'(x)$ и $L''(x)$, причем в первую отнесем только те члены $ae^{i\lambda x}$, которые имеют период P, $\frac{1}{2}P$, $\frac{1}{3}P, \ldots$, а во вторую все остальные члены. Мы имеем, следовательно:

$$L(x) = L'(x) + L''(x),$$

где

$$L'(x) = \Sigma a' e^{i\frac{2\pi}{P}kx}$$

и где

$$L''(x) = \Sigma a'' e^{i\lambda'' x}.$$

Здесь k есть число целое, и число λ'' таково, что мы никогда не будем иметь равенства: $\lambda'' = \frac{2\pi}{P}k^*$, где k^* есть целое число.

Введем обозначения:

$$\widetilde{Y}_r(\xi) = \frac{L(\xi) + L(P+\xi) + L(2P+\xi) + \ldots + L[(r-1)P+\xi]}{r},$$

$$\widetilde{Y}'_r(\xi) = \frac{L'(\xi) + L'(P+\xi) + L'(2P+\xi) + \ldots + L'[(r-1)P+\xi]}{r}$$

и

$$\widetilde{Y}''_r(\xi) = \frac{L''(\xi) + L''(P+\xi) + L''(2P+\xi) + \ldots + L''[(r-1)P+\xi]}{r}.$$

Ясно, что имеем:

$$\widetilde{Y}_r(\xi) = \widetilde{Y}'_r(\xi) + \widetilde{Y}''_r(\xi).$$

Но, с одной стороны, имеем, очевидно:

$$\widetilde{Y}'_r(\xi) = \sum a' \frac{e^{i\frac{2\pi}{P}k\xi} + e^{i\frac{2\pi}{P}k(P+\xi)} + \ldots + e^{i\frac{2\pi}{P}k[(r-1)P+\xi]}}{r} =$$

$$= \sum a' \frac{e^{i\frac{2\pi}{P}k\xi} + e^{i\frac{2\pi}{P}k\xi} + \ldots + e^{i\frac{2\pi}{P}k\xi}}{r} = \Sigma a' e^{i\frac{2\pi}{P}k\xi} = L'(\xi).$$

С другой же стороны, находим:

$$\widetilde{Y}''_r(\xi) = \sum a'' \frac{e^{i\lambda''\xi} + e^{i\lambda''(P+\xi)} + \ldots + e^{i\lambda''[(r-1)P+\xi]}}{r} =$$

$$= \sum a'' \frac{e^{i\lambda''\xi}}{r} \frac{e^{i\lambda'' rP} - 1}{e^{i\lambda''P} - 1}.$$

Существенно отметить следующее: $\widetilde{Y}'_r(\xi)$ не зависит от r, и $\widetilde{Y}''_r(\xi)$ равномерно стремится к нулю, когда число r безгранично возрастает. Последнее явствует из того, что $\lambda''P$ никогда не будет вида $2\pi k^*$, где k^* есть целое, и еще из того, что число членов b линейной комбинации $L''(x)$ есть конечное и постоянное (от r не зависящее).

Таким образом, для достаточно большого числа r мы имеем на всей области $(-\infty < \xi < +\infty)$ неравенство:

$$|\widetilde{Y}''_r(\xi)| < \varepsilon$$

и, следовательно, получаем:

$$|\widetilde{Y}_r(\xi) - L'(\xi)| < \varepsilon \tag{54}$$

на всей области $(-\infty < \xi < +\infty)$ при достаточно большом r.

Но из равенства (53) мы, очевидно, имеем:

$$|Y_r(\xi) - \widetilde{Y}_r(\xi)| < \varepsilon \tag{55}$$

при всяком целом положительном r и на всей области $(-\infty < \xi < +\infty)$.

Сопоставляя неравенства (54) и (55), мы находим:

$$|Y_r(\xi) - L'(\xi)| < 2\varepsilon \tag{56}$$

на всей области $(-\infty < \xi < +\infty)$ при достаточно большом числе r.

Из этого неравенства (56) вытекают важные следствия.

Прежде всего, раз $f(x)$ есть почти-периодическая, она есть функция ограниченная, т. е. имеем на всей области $(-\infty < x < +\infty)$ неравенство:

$$|f(x)| < K,$$

где K есть некоторое положительное постоянное. Так как $Y_r(\xi)$ есть среднее арифметическое r величин функции $f(x)$, то мы имеем:

$$|Y_r(\xi)| < K,$$

каково бы ни было действительное число ξ. Поэтому, если последовательность

$$Y_1(\xi), Y_2(\xi), \ldots, Y_r(\xi), \ldots \tag{57}$$

не стремится к пределу при каком-нибудь частном значении ξ_0 переменного ξ, то она должна колебаться при $\xi = \xi_0$. Это значит, что должны иметься такие два существенно различные постоянные числа Y_0' и Y_0'', $Y_0'' > Y_0'$, не зависящие, следовательно, от числа ε, что при одном способе числа r безгранично возрастать $Y_r(\xi_0)$ имеет пределом число Y_a', а при другом способе $Y_r(\xi_0)$ имеет своим пределом число Y_0''. Но в силу неравенства (56) $Y_r(\xi_0)$ может колебаться лишь около постоянного числа $L'(\xi_0)$, при достаточно большом r никогда не уклоняясь от него дальше, чем на 2ε. Отсюда следует, что и числа Y_0' и Y_0'' не уклоняются от $L'(\xi_0)$ дальше, чем на 2ε, и потому мы имеем:

$$|Y_0'' - Y_0'| < 4\varepsilon,$$

что невозможно, так как разность $Y_0'' - Y_0'$ существенно положительна и не зависит от ε, а ε есть произвольно малое число.

Из сказанного следует, что последовательность (57) не может быть расходящейся и что, поэтому, мы доказали существование ее предела для любого ξ; обозначим его через $Y(\xi)$, т. е. положим:

$$\lim_{r \to +\infty} Y_r(\xi) = Y(\xi). \tag{58}$$

Делая число r безгранично возрастающим, мы выводим из неравенства (56) новое неравенство:

$$|Y(\xi) - L'(\xi)| < 2\varepsilon, \tag{59}$$

справедливое для всей области $(-\infty < \xi < +\infty)$. Здесь опять $Y(\xi)$ нисколько не зависит от ξ.

Мы утверждаем, что $Y(\xi)$ есть непрерывная функция во всякой точке области $(-\infty < \xi < +\infty)$. Чтобы доказать это, допустим обратное, т. е., что существует некоторая точка разрыва ξ_0 функции $Y(\xi)$. В этой точке ξ_0 рассматриваемая функция $Y(\xi)$ должна поэтому иметь колебание (т. е. разность между максимумом и минимумом функции в точке ξ_0). Обозначим его через ω_0, $\omega_0 > 0$. Важно, что ω_0 есть постоянное положительное число, от ε нисколько не зависящее. Но неравенство (59) показывает, что колебание ω_0 функции $Y(\xi)$ во всякой точке ξ области $(-\infty < \xi < +\infty)$ должно быть не больше чем 4ε, потому что и максимум и минимум функции $Y(\xi)$ в точке ξ не могут уклоняться от $L'(x)$ больше, чем на 2ε. Таким образом, мы имеем:

$$0 < \omega_0 < 4\varepsilon,$$

что является невозможным, так как ω_0 есть постоянное число, не зависящее от ε, а ε может быть взято произвольно малым. Таким образом, $Y(\xi)$ есть непрерывная функция во всякой точке ξ области $(-\infty < \xi < +\infty)$.

Мы утверждаем далее, что $Y(\xi)$ есть периодическая функция с периодом P.

Действительно, если бы $Y(\xi)$ не была периодической с периодом P, тогда в области $(-\infty < \xi < +\infty)$ имелась бы такая точка ξ_0, для которой было бы удовлетворено неравенство:

$$|Y(\xi_0 + P) - Y(\xi_0)| > 0.$$

Следовательно, выражение $|Y(\xi_0 + P) - Y(\xi_0)|$ есть число существенно положительное, нисколько не зависящее от ε.

С другой стороны, подставляя в неравенство (59) вместо ξ число $P + \xi$, мы находим:

$$|Y(P + \xi) - L'(P + \xi)| < 2\varepsilon,$$

и так как функция $L'(x)$ есть заведомо периодическая и с периодом P, то $L'(P + \xi) = L'(\xi)$. Поэтому предыдущее неравенство перепишется в виде:

$$|Y(P + \xi) - L'(\xi)| < 2\varepsilon. \tag{60}$$

Сопоставляя теперь неравенства (59) и (60), мы заключаем, что

$$|Y(P + \xi) - Y(\xi)| < 4\varepsilon,$$

что является невозможным, потому что выражение, стоящее в левой части, существенно положительно и не зависит от ε, а ε можно взять произвольно малым.

Нам остается лишь показать, что $Y(x)$ есть действительно полная чисто-периодическая конституанта периода P данной почти-периодической функции $f(x)$ [1].

По самому определению такой конституанты это означает, что разность $f(x) - Y(x)$ есть такая почти-периодическая функция, которая уже не допускает ни одного члена Фурье, имеющего периодом $P, \frac{1}{2}P, \frac{1}{3}P, \ldots$

Для доказательства обозначим разность $f(x) - L(x)$ через $R(x)$, т. е. напишем:

$$f(x) - L(x) = R(x). \tag{61}$$

В силу неравенства (53), мы имеем:

$$|R(x)| < \varepsilon. \tag{62}$$

Так как $L(x) = L'(x) + L''(x)$, равенство (61) перепишется в виде:

$$f(x) - L'(x) = L''(x) + R(x). \tag{63}$$

Обозначив через $R'(x)$ разность $Y(x) - L'(x)$, т. е. написав:

$$Y(x) - L'(x) = R'(x), \tag{64}$$

мы имеем в силу неравенства (59):

$$R'(x)| < 2\varepsilon. \tag{65}$$

---

[1] Доказательством этого важного факта я обязан Н. К. Бари.

Вычитая из (63) равенство (64), находим:

$$f(x) - Y(x) = L''(x) + R(x) - R'(x).$$

Полагая

$$R''(x) = R(x) - R'(x),$$

имеем:

$$f(x) - Y(x) = L''(x) + R''(x), \tag{66}$$

причем в силу неравенств (62) и (65),

$$|R''(x)| < 3\varepsilon \tag{67}$$

для всей области $(-\infty < x < +\infty)$.

Предположим, что разность $f(x) - Y(x)$, которая, очевидно, нисколько не зависит от ε, имеет член Фурье с периодом $\frac{1}{k}P$, где k есть целое число. Это означает, что

$$|C\{[f(x) - Y(x)]\,e^{-i\frac{2\pi}{P}kx}\}| > 0. \tag{68}$$

Но в силу равенства (66) это неравенство перепишется в виде:

$$|C\{[L''(x) + R''(x)]\,e^{-i\frac{2\pi}{P}kx}| > 0. \tag{69}$$

Но

$$C\{L''(x)\,e^{-i\frac{2\pi}{P}kx}\} = 0,$$

так как конечная линейная комбинация $L''(x)$ не имеет ни одного члена Фурье с периодом $P,\ \frac{1}{2}P,\ \frac{1}{3}P, \ldots$

С другой стороны, в силу неравенства (67) мы должны иметь:

$$|C\{R''(x)\,e^{-i\frac{2\pi}{P}kx}\}| < 3\varepsilon$$

на основании самого определения среднего $C\{\ldots\}$. Следовательно, мы должны иметь:

$$|C\{[L''(x) + R''(x)]\,e^{-i\frac{2\pi}{P}kx}\}| < 3\varepsilon, \tag{70}$$

что невозможно, так как в силу (69) левая часть есть существенно положительное число, не зависящее от ε, а ε можно взять сколь угодно малым.

Таким образом, $Y(x)$ есть полная непрерывная чисто-периодическая конституанта периода P данной почти-периодической функции $f(x)$.

Установив это, мы можем теперь получить некоторые дальнейшие сведения относительно сходимости последовательности (57)

$$Y_1(\xi),\ Y_2(\xi), \ldots,\ Y_r(\xi), \ldots \tag{57}$$

к ее пределу $Y(\xi)$.

Действительно, сопоставим вместе два неравенства:

$$|Y(\xi) - L'(\xi)| < 2\varepsilon \tag{59}$$

и

$$|Y_r(\xi) - L'(\xi)| < 2\varepsilon. \tag{56}$$

Оба эти неравенства справедливы для *всей* области $(-\infty < \xi < +\infty)$, а последнее (56) — лишь при достаточно большом целом положительном r.

Из сопоставления их мы выводим немедленно:

$$|Y(\xi) - Y_r(\xi)| < 4\varepsilon, \tag{71}$$

причем это неравенство справедливо во всей области $(-\infty < \xi < +\infty)$ и при достаточно большом r.

Полученное неравенство (71) говорит нам, что сходимость последовательности (57) средних арифметических

$$Y_1(x),\ Y_2(x), \ldots,\ Y_r(x), \ldots$$

к ее пределу $Y(x)$ есть равномерная относительно переменного x на всей области $(-\infty < x < +\infty)$.

Это еще лишний раз подтверждает, что функция $Y(x)$ есть непрерывная.

Но здесь читатель не должен обмануться и не должен приписать только что установленной равномерной сходимости больший смысл, чем тот, который она имеет.

Дело заключается в следующем: выражение

$$Y_r(\xi) = \frac{f(\xi) + f(P+\xi) + f(2P+\xi) + \ldots + f[(r-1)P+\xi]}{r}$$

зависит от трех букв: P, ξ и r, и установленная равномерная сходимость является равномерной сходимостью лишь по отношению к букве ξ и отнюдь не по отношению к букве P.

Иначе говоря, установленная равномерная сходимость по отношению к букве ξ предполагает величину P постоянной, хотя и заранее произвольно выбранной: то обстоятельство, что P есть внутренний период данной почти-периодической функции $f(x)$, фигурирует лишь в формулировке теоремы I, а в доказательстве нигде не встречается ни явно, ни неявно (т. е. молчаливо). Нельзя указывать на то, что разбиение линейной комбинации $L(x)$ на две части: $L'(x)$, периодическую с периодом P, и $L''(x)$ не имеющую P своим периодом, уже предполагает, что P есть внутренний период данной почти-периодической функции $f(x)$. Дело в том, что если бы P не было внутренним периодом функции $f(x)$, то часть $L''(x)$ просто отсутствовала бы, и мы имели бы $L(x) = L''(x)$ и выполнили бы все, до одного, прежние рассуждения и заключения.

Таким образом, величина P является действительно произвольно выбираемой заранее[1]. Следовательно, отсюда вытекает в частности, что

---

[1] Еще одно соображение относится сюда же: почти-периодическая функция $f(x)$ может иметь постоянный член (т. е. член Фурье $Ae^{i\Lambda x}$ при $\Lambda = 0$), который можно рассматривать как периодическую конституанту с любым периодом P.

равномерная сходимость последовательности $Y_1(x)$, $Y_2(x), \ldots, Y_r(x), \ldots$ к ее пределу $Y(x)$ есть равномерная по отношению к x при произвольно выбранном постоянном P. Но указанная сходимость отнюдь не есть равномерная по отношению к переменному P.

Это обстоятельство легко обнаружить, взяв за $f(x)$ периодическую (гармоническую) функцию $e^{i\lambda x}$, т. е. положив

$$f(x) = e^{i\lambda x}.$$

В этом случае мы находим:

$$Y_r(\xi) = \frac{e^{i\lambda\xi} + e^{i\lambda(P+\xi)} + e^{i\lambda(2P+\xi)} + \ldots + e^{i\lambda[(r-1)P+\xi]}}{r},$$

т. е.

$$Y_r(\xi) = \frac{e^{i\lambda\xi}}{r} \frac{e^{i\lambda rP} - 1}{e^{i\lambda P} - 1}.$$

Мы видим, что $\lim\limits_{r\to+\infty} Y_r(\xi) = Y(\xi)$ есть функция, при постоянном ξ равная 0 для всякого P, кроме таких P, для которых $\lambda P = 2\pi k$, где k есть целое. Для этого последнего случая мы, очевидно, имеем:

$$Y_r(\xi) = \frac{e^{i\lambda\xi} + e^{i\lambda\xi} + \ldots + e^{i\lambda\xi}}{r} = e^{i\lambda\xi},$$

т. е. $Y(\xi) = e^{i\lambda\xi}$ и, значит, $|Y(\xi)| = 1$, тогда как для остальных значений P, как только что было показано, мы имеем $|Y(\xi)| = 0$.

Таким образом, $Y(\xi)$ есть разрывная функция относительно переменного P, и поэтому сходимость последовательности $Y_1(\xi), Y_2(\xi), \ldots, Y_r(\xi), \ldots$ к ее пределу $Y(\xi)$ не может быть равномерною относительно переменного P.

Это отсутствие равномерности сходимости по отношению к P молчаливо проскользнуло в неравенство (54), в котором r может безгранично возрастать при изменении постоянного числа P.

Из всего сказанного ясно, что предел $Y(x)$ последовательности средних арифметических $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_r(x), \ldots$ зависит от значения буквы P, т. е. является функцией действительного переменного P. Поэтому иногда будет полезно этот предел писать не в виде функции $Y(x)$ одного переменного x, а в виде $Y(x \mid P)$, т. е. в форме функции двух действительных независимых переменных x и P:

$$Y(x) = Y(x \mid P). \tag{72}$$

Мы видим, что при всяком P функция $Y(x)$ есть полная чисто-периодическая конституанта периода P данной почти-периодической функции $f(x)$.

Это важное предложение есть абсолютно точное, но оно дано в формальном виде. По существу же оно означает следующее.

Данная почти-периодическая функция $f(x)$ может иметь и может не иметь члена Фурье $Ae^{i\Lambda x}$, не зависящего от x (т. е. чтобы $\Lambda = 0$ при $A \neq 0$). Кроме того, за исключением тривиального случая, когда $f(x) \equiv 0$, непременно должны иметься члены Фурье $A_m e^{i\Lambda_m x}$, $A_m \neq 0$, так как, если

$f(x) \not\equiv 0$, то среднее $C\{|f(x)|^2\}$ не может быть нулем, $C\{|f(x)|^2\} > 0$, а это среднее, по теореме Парсеваля (см. § 12), удовлетворяет равенству:

$$C\{|f(x)|^2\} = \sum_m |A_m|^2. \tag{6*}$$

Пренебрегая постоянным членом A ряда Фурье для $f(x)$, которого может и не быть, мы берем все остальные показатели Фурье

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_m, \ldots,$$

где $\Lambda_m \neq 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$, и образуем соответствующие им внутренние периоды для $f(x)$:

$$P_1 = \frac{2\pi}{\Lambda_1}, \quad P_2 = \frac{2\pi}{\Lambda_2}, \ldots, \quad P_m = \frac{2\pi}{\Lambda_m}, \ldots$$

Доказанное предложение гласит: если число P не равно ни одному P_m, то мы необходимо должны иметь

$$Y(x \mid P) \begin{cases} = A, & \text{если постоянный член } A \neq 0 \text{ имеется;} \\ = 0, & \text{если постоянного члена нет.} \end{cases}$$

Если же переменное P сделается равным какому-нибудь из внутренних периодов (например, $P = P_h$) данной почти-периодической функции $f(x)$, то среди остальных внутренних периодов $P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots$ функции $f(x)$ надо отобрать все P_{m^*}, равные аликвотным частям $\frac{1}{2} P_h$, $\frac{1}{3} P_h, \ldots, \frac{1}{\nu} P_h, \ldots$ рассматриваемого периода P_h и написать соответствующий им формальный ряд

$$\sum_{m^*} A_{m^*} e^{i\Lambda_{m^*} x}, \tag{73}$$

включив в него и постоянный член A, если он для функции $f(x)$ имеется. Тогда $Y(x \mid P)$ как раз и будет такой непрерывной чисто-периодической функцией периода P, которая имеет ряд (73) своим рядом Фурье, т. е.

$$Y(x \mid P) \backsim \sum_{m^*} A_{m^*} e^{i\Lambda_{m^*} x}.$$

Для полного доказательства теоремы I нам остается сказать лишь несколько слов.

Действительно, рассматривая двухмерную таблицу (40) Бюи-Балло, написанную в самом начале этого параграфа, мы обращаем внимание на s-ю колонну этой таблицы. В ней стоят количества:

$$y_s, \; y_{p+s}, \; y_{2p+s}, \ldots, y_{(r-1)p+s}, \; Y_s,$$

где s есть одно из чисел $1, 2, 3, \ldots, p$. Так как Y_s есть их среднее арифметическое, мы имеем:

$$Y_s = \frac{y_s + y_{p+s} + y_{2p+s} + \ldots + y_{(r-1)p+s}}{r}.$$

Приняв теперь во внимание, что $f\left(\frac{\nu}{p}P\right) = y_\nu$, мы можем написать:

$$Y_s = \frac{f\left(\frac{s}{p}P\right) + f\left(\frac{p+s}{p}P\right) + f\left(\frac{2p+s}{p}P\right) + \ldots + f\left[\frac{(r-1)p+s}{p}\right]}{r},$$

или иначе:

$$Y_s = \frac{f\left(\frac{s}{p}P\right) + f\left(P + \frac{s}{p}P\right) + f\left(2P + \frac{s}{p}P\right) + \ldots + f\left[(r-1)P + \frac{s}{p}P\right]}{r}.$$

Если мы теперь в написанной в начале доказательства теоремы I формуле:

$$Y_r(\xi) = \frac{f(\xi) + f(P+\xi) + f(2P+\xi) + \ldots + f[(r-1)P+\xi]}{r}$$

положим $\xi = \frac{s}{p}P$, то получим совпадение обоих выражений Y_s и $Y_r(\xi)$.

Отсюда и следует, что средние арифметические

$$Y_1,\ Y_2,\ Y_3, \ldots,\ Y_s, \ldots,\ Y_p$$

двухмерной таблицы Бюи-Балло стремятся к вполне определенным пределам, когда число r горизонтальных строк таблицы Бюи-Балло безгранично возрастает, причем эти пределы соответственно равны:

$$Y\left(\frac{1}{p}P\right),\ Y\left(\frac{2}{p}P\right),\ Y\left(\frac{3}{p}P\right), \ldots,\ Y\left(\frac{s}{p}P\right), \ldots,\ Y(P).$$

И так как $Y(x) = Y(x \mid P)$ есть полная чисто-периодическая конституанта с периодом P данной почти-периодической функции $f(x)$, то теорема I доказана, а вместе с нею и принцип I Бюи-Балло.

Теорема II. *Если число P отлично от всех внутренних периодов почти-периодической функции $f(x)$ (т. е. не есть точка ее спектра), то средние арифметические Y_1, $Y_2, \ldots, Y_p$ двухмерной таблицы Бюи-Балло стремятся к вполне определенной постоянной величине, когда число r горизонтальных строк таблицы Бюи-Балло безгранично возрастает, причем эта постоянная в точности равна постоянному члену ряда Фурье функции $f(x)$, если таковой имеется, и равна нулю, если его нет. Следовательно, разность между максимумом и минимумом средних арифметических безгранично уменьшается, когда число r строк безгранично увеличивается.*

Доказательство. Для того чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, а вместе с нею и принципа II Бюи-Балло, достаточно заметить, что функция $Y(x \mid P)$, служащая, как мы видели, равномерным пределом последовательности средних арифметических $Y_1(x)$, $Y_2(x), \ldots$ $\ldots, Y_r(x), \ldots,$ равна постоянному члену A ряда Фурье для $f(x)$, если он там есть, и равна нулю в противном случае.

Относительно принципа III Бюи-Балло следует заметить, что возможны два различные его понимания.

1. Или мы имеем дело с таким принципом — назовем его принцип III′, в котором средние $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ предполагаются составленными для чрезвычайно большого числа r строк двухмерной таблицы Бюи-Балло В этом случае следует заметить, что принцип III′ уже доказан данной выше теоремой I, потому что в этом случае среднее $Y_r(x)$, составленное для $p = p_0$, равномерно приближено (с точностью до ε) к предельной функции $Y(x \mid P)$, именно как раз и выделяющей полную чисто-периодическую конституанту периода P данной почти-периодической функции $f(x)$. Следовательно, ввиду очевидной равномерной непрерывности функции $Y_r(x)$ относительно переменных x и P во всей области $(-\infty < x < +\infty)$ и $(-\infty < P < +\infty)$, весьма малое отклонение величины переменного P от первоначального его значения P_0 будет иметь результатом лишь весьма малое изменение величины $Y_r(x)$ на всей области $(-\infty < x < +\infty)$. Отсюда и следует, что функция $Y_r(x)$ еще будет продолжать изображать с точностью, весьма близкой к ε, полную чисто-периодическую конституанту периода P_0, несмотря на отклонение величины переменного P от его первоначального значения P_0.

Таким образом, среднее $Y_r(x)$, составленное для P, еще будет близким к полной чисто-периодической конституанте периода P_0. А это, очевидно, и есть принцип III′.

2. Или мы имеем дело с таким принципом — назовем его принцип III″, в котором средние $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ предполагаются составленными для относительно небольшого числа строк двухмерной таблицы Бюи-Балло. В этом случае приходится исследовать изменение собственно уже не предельной функции $Y(x \mid P)$, но до-предельной функции $Y_r(x)$, так как a priori отклонение величины переменного P от его первоначального значения P_0 настолько, в этом случае, может явиться чувствительным для среднего $Y_r(x)$, что хорошее изображение средним $Y_r(x)$, вычисленным для P_0, полной чисто-периодической конституанты периода P_0 функции $f(x)$ может совсем пропасть при уже относительно небольшом отклонении P от P_0.

Но понимаемый таким образом принцип III″ представляет уже значительные трудности, если только он вообще верен.

Что же касается принципа IV Бюи-Балло, то здесь мы не можем сказать ничего определенного, не произведя дальнейших рассмотрений.

§ 32. Обоснование метода периодограмм. Чтобы обосновать метод периодограмм, собственно вовсе нет необходимости обосновывать принципы Бюи-Балло. Легко видеть причину этого.

Исторически принципы Бюи-Балло, вероятно, были найдены скорее путем наблюдения, чем путем дедуктивных рассмотрений. Великая заслуга Бюи-Балло состояла вовсе не в том, что он строго доказал свои принципы вообще, или в таких-то и таких-то частных случаях, но в том, что он нашел в себе силу, подметив на опытном материале действенность некоторых общих норм, извлечь их оттуда, облечь их в более или менее точную форму и возвести их в принципы. Это свидетельствует о большой силе и чуткости Бюи-Балло.

Но, как принципы Бюи-Балло, в сущности, не имели полного теоретического (дедуктивного) обоснования, так и метод периодограмм, выросший на этих принципах, также, по-видимому, не имеет полного обоснования. Уже самое изложение этого метода, даваемое литературой, удивляет своей сбивчивостью; в §§ 26 и 27 настоящей статьи, приводя обычное изложение метода периодограмм, мы не могли скрыть этого. То, что дается и указывается в литературе по поводу метода периодограмм — это, собственно, движение ощупью: ощупью ищут нужных рецептов и формул, руководствуясь смутным чувством аналогий, и ощупью же пишут окончательные формулы периодограммы (см. § 27):

$$\left.\begin{aligned} a(p) &= \frac{2}{N}\int_0^N y(\alpha)\cos\frac{2\pi}{p}\alpha\,d\alpha, \\ b(p) &= \frac{2}{N}\int_0^N y(\alpha)\sin\frac{2\pi}{p}\alpha\,d\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

$$H(p) = \sqrt{a^2(p) + b^2(p)}. \tag{49}$$

Между тем, при современном состоянии математического анализа уже становится возможным подвести точный фундамент под метод периодограмм: для этого достаточно лишь обратиться к уже созревшей в настоящий момент теории почти-периодических функций.

Чтобы увидеть это, рассмотрим только что написанные уравнения (48) периодограммы, и умножив нижнее уравнение на $-i = -\sqrt{-1}$, прибавим к верхнему. Мы получим этим путем равенство:

$$a(p) - ib(p) = \frac{2}{N}\int_0^N y(\alpha)e^{-i\frac{2\pi}{p}\alpha}\,d\alpha. \tag{74}$$

В этом равенстве мы предполагаем заданную нам функцию $y(\alpha)$ почти-периодической.

Число N означает конец того отрезка $[0 \leqslant x \leqslant N]$, на котором нам задана функция $y(x)$.

Уже самые первые рассмотрения по началам периодограмм, ведущиеся ощупью, показывают, что разыскание неизвестного периода p совершается тем точнее, чем «длиннее» наблюденный материал, чем, следовательно, длиннее отрезок $[ON]$, на котором нам задана функция $y(x)$, и, значит, чем больше число N. Это обстоятельство становится особенно ясным, когда прибегают к оптическим аналогиям и когда говорят о большей резкости и тонкости спектральных линий и о «разрешающей силе» периодического приема: эта сила принимается прямо пропорциональной числу N (см. конец § 28).

Все сказанное естественно приводит к мысли сделать в уравнениях (48) периодограммы число N безгранично возрастающим и посмотреть, какие же в самом деле теоретические (математические) основания заставляют нас писать уравнения (48) периодограмм именно так, а не иначе.

Но если мы действительно заставим число N в уравнениях (48) периодограмм или, что все то же самое, в уравнении (74) безгранично возрастать, то немедленно заметим, что написанный интеграл становится просто «средним» (см. § 9) от произведения $f(x)e^{-i\frac{2\pi}{p}x}$, которое есть почти-периодическая функция. Таким образом, мы можем написать, заставив N безгранично увеличиваться:

$$a(p) - ib(p) = 2C\left\{y(x)e^{-i\frac{2\pi}{p}x}\right\}. \tag{74*}$$

Теперь, если мы обратимся к выражению (12) (см. § 11), то немедленно заметим, что правая часть равенства (74), в предположении, что она отлична от нуля, есть не что иное, как удвоенный коэффициент Фурье почти-периодической функции $y(x)$.

Самая же периодограмма $H(p)$, определяемая по формуле (49), есть не что иное, как удвоенный модуль коэффициента Фурье почти-периодической функции $y(x)$[1].

А так как при отыскании неизвестных периодов p наблюдаемого явления $y(x)$ рекомендуется отыскивать именно такие p, для которых периодограмма $H(p)$ становится максимумом, то метод периодограмм становится до конца ясным:

метод периодограмм заключается именно в том, что для заданной почти-периодической функции $y(x)$ образуют среднее

$$C\left\{y(x)e^{-i\frac{2\pi}{p}x}\right\}, \tag{74**}$$

где p есть любое действительное число, и обозначают это среднее через $\frac{1}{2}[a(p) - ib(p)]$, а абсолютную величину его через $H(p)$:

$$H(p) = \sqrt{a^2(p) + b^2(p)} = 2\left|C\left\{y(x)e^{-i\frac{2\pi}{p}x}\right\}\right|. \tag{IV}$$

[1] Читатель не должен досадовать на в самом деле не совсем приятное появление прилагательного «удвоенный». Вина появления множителя 2 лежит вовсе не в дефектах метода периодограмм или его теоретического обоснования, но просто в том, что ряд Фурье для всякой чисто-периодической функции $f(x)$ пишется в двух разных формах: в действительной форме и в комплексной форме, причем коэффициенты a_n, b_n ряда Фурье функции f_x, написанного в действительной форме, вдвое больше коэффициентов $\widetilde{a}_n$, $\widetilde{b}_n$ ряда Фурье функции $f(x)$, написанного в комплексной (мнимой) форме:

$$a_n = 2\widetilde{a}_n \text{ и } b_n = 2\widetilde{b}_n.$$

Для этого читателя можно отнести к § 3 настоящей статьи («Преобразования ряда Фурье»). Появление слова «удвоенный» обязано тому, что метод периодограмм употребляет еще старую (действительную) запись рядов Фурье, тогда как теория почти периодических функций пользуется всюду уже новой (комплексной, т. е. мнимой) записью рядов.

Тогда, в силу основного свойства почти-периодических функций, среднее (74*) равно нулю для всякого действительного p, кроме счетного (или конечного) числа особенных конечных [1] величин

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_m, \ldots, \tag{V}$$

называемых внутренними периодами почти-периодической функции $y(x)$; для них среднее (74*) уже отлично от нуля, и величина этого среднего есть коэффициент Фурье A_m почти-периодической функции $y(x)$. В этом случае выражение $H(p)$ также отлично от нуля и равно удвоенному модулю соответствующего члена Фурье:

$$H(P_m) = 2\left|A_m e^{i\frac{2\pi}{P_m}x}\right| = 2\,|A_m| \neq 0,$$

т. е. его амплитуде. Следовательно, $H(p)$ есть неотрицательная разрывная функция действительного переменного p, уничтожающаяся всюду, кроме совокупности величин (V), называемой спектром почти-периодической функции $y(x)$. В каждой точке P_m спектра разрывная функция $H(p)$ имеет положительный максимум, величина которого $H(P_m)$ равна амплитуде соответствующего члена Фурье $A_m e^{i\frac{2\pi}{P_m}x}$, имеющего периодом как раз число P_m.

Таким образом, метод периодограмм есть не что иное, как последовательное выделение из данной почти-периодической функции $y(x)$ ее членов Фурье, т. е. выделение из нее ряда Фурье

$$y(x) \backsim \sum A_m e^{i\frac{2\pi}{P_m}x}. \tag{VI}$$

Поэтому метод периодограмм вполне оправдывает данное ему выше название почти-периодического анализа.

Практически же вместо вычисления истинного среднего (74*) для заданной (эмпирически или теоретически) почти-периодической функции $y(x)$ довольствуются тем, что приближенно полагают

---

[1] Постоянная часть A ряда Фурье для почти периодической функции $y(x)$, т. е. его свободный член, не содержащий буквы x, выделяется из почти-периодической функции $y(x)$ простой формулой:

$$A = C\{f(x)\},$$

т. е. если формально положить $p = \infty$ в выражении (74). Но последнее представляет то принципиальное неудобство, что бесконечность ∞ вводится как число. Поэтому выделение постоянного члена A, $A \neq 0$ из $y(x)$ следует производить или при помощи показателей Фурье Λ_m, т. е. пользуясь формулой (см. § 11)

$$a(\lambda) = C\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\},$$

дающей для показателей Фурье $\lambda = \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_m, \ldots$ соответствующие коэффициенты Фурье $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$:

$$A_m = a(\Lambda_m) = C\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\}, \tag{12}$$

в которой полагают $\lambda = \Lambda_1 = 0$, или, как только что указано, при помощи среднего $C\{f(x)\}$.

$$a(p) - ib(p) = \frac{2}{N}\int_0^N y(\alpha)\, e^{-i\frac{2\pi}{p}\alpha}\, d\alpha, \tag{74}$$

стараясь выбрать число N по возможности больше, насколько это позволяет опытный материал или самая сложность нужных для этого выкладок. Получающиеся вследствие этого формулы:

$$\left.\begin{aligned} a(p) &= \frac{2}{N}\int_0^N y(\alpha)\cos\frac{2\pi}{p}\alpha\, d\alpha, \\ b(p) &= \frac{2}{N}\int_0^N y(\alpha)\sin\frac{2\pi}{p}\alpha\, d\alpha \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

и

$$H(p) = \sqrt{a^2(p) + b^2(p)} \tag{49}$$

и являются как раз теми самыми формулами, на которых практически основан метод периодограмм.

Указанные в настоящем параграфе соображения мы рассматриваем как теоретическое обоснование метода периодограмм.

§ 33. Границы метода периодограмм. Теоретическое обоснование метода периодограмм немедленно указывает нам вместе с тем и границы его применимости, по-видимому, трудно определяемые при другом ходе идей. В пределах этих границ метод периодограмм дает надежные результаты, прекрасно согласующиеся с теоретической сущностью вещей; за пределами же этих границ метод периодограмм может давать, и фактически дает, как показывают примеры, совершенно фантастические результаты, ничего общего не имеющие с действительностью.

Метод периодограмм дает совершенно надежные результаты для всех почти-периодических функций.

Справедливость этого мы видели в предыдущем параграфе. Следовательно, совокупность всех почти-периодических (в смысле Бора) функций и есть область совершенно надежной применимости метода периодограмм.

За границами этой области метод периодограмм совершенно не обоснован и, как показывают простые примеры, приводит к бессмысленным результатам, не дающим ни указаний, ни даже простых намеков на свойства исследуемого явления. Выделяемые в этом случае методом периодограмм «периоды» представляют полный произвол и не имеют ничего общего с течением функций и представляемых ими явлений.

Еще Стильтьесом и Бором первыми в связи с теорией моментов были указаны две ограниченные и непрерывные на всей области $(-\infty < x < +\infty)$ функции $F(x)$:

$$F(x) = e^{-ix^2} \quad \text{и} \quad F(x) = e^{i\sqrt[3]{x}},$$

для которых среднее

$$C\{F(x)\, e^{i\lambda x}\} = 0$$

равно нулю, каково бы ни было действительное число λ.

Отсюда следует, что четыре действительные функции $f(x)$

$$f(x)=\cos(x^2),\ f(x)=\sin(x^2),\ f(x)=\cos\sqrt[3]{x};\ f(x)=\sin\sqrt[3]{x}$$

дают периодограммы

$$\left.\begin{aligned} a(p)=\frac{1}{N}\int_0^N f(\alpha)\cos\frac{2\pi}{p}\alpha\,d\alpha\to 0,\ b(p)=\frac{1}{N}\int_0^N f(\alpha)\sin\frac{2\pi}{p}\alpha\,d\alpha\to 0,\\ H(p)=\sqrt{a^2(p)+b^2(p)}\to 0,\end{aligned}\right\}\tag{75}$$

когда N безгранично увеличивается [1].

Таким образом, у функций $\cos(x^2)$, $\sin(x^2)$, $\cos\sqrt[3]{x}$, $\sin\sqrt[3]{x}$, если говорить языком почти-периодических функций, спектра никакого нет, или, что то же самое, все коэффициенты Фурье равны нулю.

И тем не менее, функции $\cos(x^2)$ и $\sin(x^2)$ суть целые и ограниченные (для действительных значений x), только колеблются «несколько скоро», что же касается функций $\cos\sqrt[3]{x}$ и $\sin\sqrt[3]{x}$, то они также непрерывные и ограниченные во всей области $(-\infty<x<+\infty)$ и колеблются «несколько медленно».

Существенно отметить, что функции (75), дающие, как мы видим, периодограмму $H(p)$, равную нулю для всякого p, нетривиальны, так

---

[1] Легко в самом деле произвести нужные выкладки, чтобы убедиться в этом; ограничимся для них лишь первой функцией e^{ix^2}. Мы отправляемся от $\frac{1}{N}\int_0^N f(\alpha)e^{i\lambda\alpha}d\alpha\to 0$. Изменяя λ на $-\lambda$, имеем $\frac{1}{N}\int_0^N f(\alpha)e^{-i\lambda\alpha}d\alpha\to 0$. Складывая и вычитая, находим: $\frac{1}{N}\int_0^N f(\alpha)\cos\lambda\alpha\,d\alpha\to 0$ и $\frac{1}{N}\int_0^N f(\alpha)\sin\lambda\alpha\,d\alpha\to 0$. Но $f(\alpha)=e^{i\alpha^2}=\cos(\alpha^2)+i\sin(\alpha^2)$. Поэтому, подставляя, имеем $\frac{1}{N}\int_0^N \cos(\alpha^2)\cos\lambda\alpha\,d\alpha\to 0$, $\frac{1}{N}\int_0^N \sin(\alpha^2)\cos\lambda\alpha\,d\alpha\to 0$, $\frac{1}{N}\int_0^N \cos(\alpha^2)\sin\lambda\alpha\,d\alpha\to 0$, $\frac{1}{N}\int_0^N \sin(\alpha^2)\sin\lambda\alpha\,d\alpha\to 0$. Во всех этих формулах предполагается, что N безгранично увеличивается, т. е. $N\to+\infty$. Аналогичное имеем для второй функции $e^{i\sqrt[3]{x}}$.

Мы не станем утруждать читателя дальнейшими выкладками и рассуждениями, но можно установить, что, при всяком действительном λ, среднее на отрезке δ стремится к нулю,

$$C_\delta\{f(x)e^{i\lambda x}\}\to 0,$$

как бы ни двигался по области $(-\infty<x<+\infty)$ отрезок δ, лишь бы его длина безгранично увеличивалась; здесь $f(x)$ означает e^{ix^2} или $e^{i\sqrt[3]{x}}$. Собственно, только в этом смысле и было раньше указано, что $C\{f(x)e^{i\lambda x}\}=0$ при всяком действительном λ.

как их величины не стремятся к нулю с безграничным возрастанием абсолютной величины переменного x, $|x| \to +\infty$. Этот последний случай является, очевидно, тривиальным, так как если $f(x) \to 0$ при $|x| \to +\infty$, то непосредственно ясно, что

$$C\{f(x)\, e^{i\lambda x}\} = 0$$

при всяком действительном x.

Теперь, если мы составим функцию

$$y(x) = \sin x + \sin \sqrt[3]{x}$$

и предположим, что она нам дана не только что написанной формулой, а эмпирически (т. е. бесформульно), то про такую функцию нельзя будет сказать, что она колеблется «очень скоро» или «очень медленно». И тем не менее, метод периодограмм, будучи применен к наблюденному материалу $y(x)$, укажет в нем лишь один период 2π, несколько для этого материала нехарактерный.

Равным образом, если бы нам был откуда-нибудь прислан неизвестный нам заранее эмпирический материал $y(x)$, изображающий, например, численные величины функции

$$2 \sin(x^2) - 3 \cos(x^2) + \sin \sqrt[3]{x} + 4 \cos \sqrt[3]{x},$$

то метод периодограмм оказался бы бессильным разобраться в этом кажущемся хаосе протекания численных величин, так как его периодограмма была бы тождественно равна нулю.

Заканчивая наши рассмотрения по методу периодограмм, я позволю себе привести цитату из превосходной книжки, выпущенной Гидравлико-математическим отделом Гидрологического института: «Установление и исчисление периодов по эмпирическим кривым (анализ периодограмм)» (Ленинград, 1928).

В этой книжке, содержащей ряд ценных статей различных авторов о теории и практике анализа эмпирических кривых периодического типа, после статьи М. В. Ремезовой «Выявление периодичности во времени вскрытия рек по методу Бюи-Балло» следует статья двух авторов: А. А. Бородулиной и Н. Н. Шпилевой: «Изучение периодичности Ладожского озера по методу Бюи-Балло», заканчивающаяся словами:

«Как видно, периоды соответствуют найденным в уровнях Ладожского озера и во вскрытии рек; отсюда вытекает либо тесная связь этих явлений с каким-то из процессов солнца, фаза которого по отношению к земле до сих пор не установлена, либо, на первый взгляд может быть парадоксальное, утверждение, что все периодичности, как в пятнах, так и в гидрологических явлениях, иллюзорного происхождения, вызванные не реальным процессом, а свойствами самих чисел, составляющих массовые наблюдения.

Таким образом, ближайшей целью анализа периодичности в гидрологических явлениях является: либо установление их связи с солнечной деятельностью, либо доказательство того факта, что периоды малой длины, как 3, 4, 5 лет, могут быть найдены в любом ряде массовых случайных явлений».

Этой выдержки из статьи достаточно.

§ 34. **О проблеме затухающих колебаний.** Мы видели (см. § 11), что для семейства всех почти-периодических функций $f(x)$ имеется аналитический аппарат в виде выражения

$$C\{f(x)e^{i\lambda x}\}, \tag{76}$$

позволяющего в точности (говоря теоретически) определить все показатели Фурье, коэффициенты Фурье, а с ними и весь «состав» почти-периодической функции $f(x)$.

Мы видели (см. § 32), что выражение (76) лежит в основе метода периодограмм.

Этого успеха теория почти-периодических функций добилась благодаря счастливому разрешению структурной проблемы: отыскать структурную характеристику семейства всех функций $f(x)$, являющихся равномерными пределами линейных (конечных) комбинаций:

$$L(x) = ae^{i\lambda x} + be^{i\mu x} + \ldots + re^{i\rho x}.$$

Мы знаем, что этой структурной характеристикой является определение почти-периодичности по Бору (см. §§ 8 и 6), служащее, тем самым, полным решением указанной структурной проблемы.

Введение в науку структурных проблем обязано, по-видимому, еще Вейерштрассу, впервые разрешившему структурную проблему:

отыскать структурную характеристику семейства всех функций, являющихся равномерными пределами многочленов.

Мы знаем, что этой структурной характеристикой является определение непрерывности функции по Коши.

Дальнейшие чрезвычайно крупные шаги в решении структурных проблем были сделаны Ренэ Бэром, нашедшим структурную характеристику семейства всех функций, являющихся пределами многочленов. Решением явилось так называемое «Бэрово свойство» функций класса 1.

В теории почти-периодических функций найденное Бором структурное свойство явилось, собственно, решающим шагом, так как из него последовал аналитический аппарат (76), а с ним и изучение «состава» почти-периодических функций, т. е. открытие у них ряда Фурье.

В аналогичном положении мы сейчас находимся по отношению к затухающим колебаниям.

Мы видели в § 30 (Об анализе затухающих колебаний), что всякая линейная (конечная) комбинация элементарных затухающих колебаний может быть написана в виде:

$$ae^{\lambda x} + be^{\mu x} + \ldots + re^{\rho x},$$

где $a, b, \ldots, r$ суть постоянные числа (действительные или комплексные) и где $\lambda, \mu, \ldots, \rho$ — комплексные числа с отрицательной действительной частью.

Мы знаем, что в том случае, когда $\lambda, \mu, \ldots, \rho$ суть комплексные числа с нулевой действительной частью (т. е. чисто-мнимые числа), имеется структурное свойство семейства всех функций, служащих равномерными пределами таких линейных комбинаций: почти-периодичность в в смысле Бора, порождающая аналитический аппарат (76) и за ним весь почти-периодический анализ.

Действительно, научный анализ затухающих явлений начинается в тот момент, когда от нулевых действительных частей показателей $\lambda, \mu, \ldots, \rho$ переходят к отрицательным и когда ставят и счастливо решают ту или иную относящуюся сюда структурную проблему.

§ 35. Идеи академика С. А. Чаплыгина. По поводу всего изложенного выше мною было получено письмо [1] от академика С. А. Чаплыгина, в котором он пожелал сообщить мне свою точку зрения. Письмо содержит несколько пунктов настолько принципиально важных, что необходимо указать их здесь.

С. А. Чаплыгин рассматривает понятие почти-периодической функции как понятие предельное. К этому, по его мнению, приводит то обстоятельство, что выражение

$$a(\lambda) = C\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\}$$

есть функция действительного переменного λ, равная нулю всюду, кроме счетного множества (E) точек

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_m, \ldots, \tag{E}$$

которое может быть произвольным точечным множеством. Следовательно, функция $a(\lambda)$ есть функция характера предельного, так как множество E может оказаться всюду плотным на области $(-\infty < x < +\infty)$ и поэтому функция $a(\lambda)$ может быть разрывной в каждом интервале δ этой области.

Вследствие этого, по мнению С. А. Чаплыгина, вполне целесообразно сначала попытаться определить и изучить некоторый более простой класс функций, который можно было бы назвать классом почти-периодических функций с точностью до ε и для которых функция $a(\lambda)$ уже не имеет предельного характера, допуская высокие максимумы лишь в весьма малых интервалах δ, отстоящих друг от друга на более значительные промежутки, чем они сами, и будучи по модулю $< \varepsilon$ вне этих интервалов δ.

Таким же точно образом новейшая теория функций комплексного переменного рассматривает классическое понятие аналитической (голоморфной) функции как предельное и вводит взамен его приближенное понятие аналитической функции с точностью до ε.

Подобным же образом в настоящее время введены гармонические функции с точностью до ε, свойства которых «более мягки», чем свойства

---

[1] Датированное 28 октября 1933 г.

предельных гармонических функций (т. е. когда $\varepsilon = 0$), вытекающие из «жесткого» уравнения Лапласа.

Спектр таких почти-периодических функций с точностью до ε (С. А. Чаплыгин называет их еще функциями, «мало уклоняющимися от почти-периодических») также следует искать как более «мягкий», следовательно, как менее предельный, чем спектр почти-периодических функций, представляющий собой произвольное счетное множество точек; этот спектр следует искать не составленным из счетного числа точек, но менее острым, менее предельным, например, придав ему характер полосатого или даже непрерывного спектра. Вследствие этого были бы охвачены почти-периодическим анализом с точностью до ε и такие функции, которые в настоящий момент еще не подпадают под почти-периодический анализ.

И, наконец, в связи с этим естественно, по мнению С. А. Чаплыгина, искать разложения в ряды Фурье с точностью до ε, которые для $\varepsilon = 0$ обращались бы в ряды Фурье для почти-периодических функций в смысле Бора.

§ 36. Заключение. Литература. В настоящей статье мы искали теоретические основы метода периодограмм. То, что нам удалось усмотреть, это — то, что теоретические основы метода периодограмм уходят своими корнями в теорию почти-периодических функций Бора. Мы установили, что к почти-периодическим функциям в смысле Бора метод периодограмм, говоря теоретически, идеально приложим и дает точные ответы, давая все члены их рядов Фурье. Но мы видели и то, что малейший выход за класс почти-периодических функций (в смысле Бора) приводит нас к таким простым функциям, для которых самый аналитический аппарат метода периодограмм хотя и приложим, но дает результаты, ничего общего с рассматриваемой функцией не имеющие. И так как, имея в руках эмпирически данную функцию, всегда можно очутиться в положении лица, применяющего аппарат периодограмм и получающего совершенно чуждые делу результаты, то мы приходим к оценке метода периодограмм как метода слабого, представляющего интерес лишь там, где из априорных рассмотрений у нас есть все права ожидать почти-периодического материала.

Нам представляется гораздо более глубоким и сильным метод Лагранжа — Дэла. И нет, говоря a priori, никаких оснований думать, что метод Лагранжа — Дэла также может давать, как и метод периодограмм, фантастические результаты. Например, будучи применен к функции $\sin x + \sin (x^2) + \sin \sqrt[3]{x}$ в определенном участке, метод Лагранжа — Дэла может дать, в качестве входящих в ее состав периодов, какие-нибудь числа, плохо вяжущиеся со свойствами рассматриваемой функции. Но если, например, получаемые методом Лагранжа — Дэла числа начнут сдвигаться при расширении участка, в котором рассматривают функцию, то одно это заставит отбрасывать такие перемешивающиеся результаты, тогда как в методе периодограмм мы видели абсолютную устойчивость результатов и их совершенную чуждость исследуемой функции.

Если искать словесных параллелей, то метод Лагража — Дэла можно уподобить методу Штурма в высшей алгебре, а метод периодограмм — теореме Бюдана.

Литература, которой мы пользовались, была представлена главным образом следующими источниками:

1. K. Stumpf. Analyse periodischer Vorgänge. Ein Abriss der Periodographie mit besonderer Berücksichtigung moderner Methoden. Berlin, 1927, S. 1—188.

2. Установление и исчисление периодов по эмпирическим кривым (анализ периодограмм). Из работ Гидравлико-математического отдела Государственного гидрологического института. Л. 1928, стр. 1—138.

3. E. Whittaker & G. Robinson. The calculus of observations. A. Treatise on Numerical Mathematics, Second edition, London, 1926, p. 260—285, 343—363, и ряд статей в «Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften» и других изданиях справочного характера.

В формальные рамки нашей статьи мы положили в качестве первого источника книгу Штумпфа. Этот выбор был до известной степени естественен, так как достаточно объемистая книга Штумпфа является, по-видимому, первым и до сих пор единственным во всей мировой литературе трактатом по анализу периодических явлений. Следует заметить, что, кроме второго источника—книжки трудов Ленинградского гидрологического института, остальная литература представляет собой ряд отдельных коротких статей и заметок, разбросанных по всевозможным специальным математическим, физическим, астрономическим, метеорологическим и техническим журналам. В этих условиях уже самое собирание столь разъединенной литературы, ее изучение и выборки из нее может сделать лишь лицо, имеющее совершенно исключительный интерес к анализу периодических явлений и имеющее притом совершенно определенную нужду в практическом их использовании по преимуществу в такой точной науке, какова астрофизика, где отнюдь не довольствуются каким-нибудь приближением, но где получаемые числа подвергаются строгой критике, вытекающей из точного характера этой дисциплины. Книга Штумпфа выполняет такое собирание литературы (164 названия различных источников) и до известной степени удовлетворяет первым требованиям, обычно предъявляемым к такого рода трактатам. Но мы вовсе не хотим этим сказать, что изучение литературы по анализу периодических явлений можно ограничить знакомством с книгой Штумпфа. Как всякая вообще первая обзорная книга по известной широкой специальной литературе, трактат Штумпфа, естественно, в первом своем издании содержит промахи и недостатки. Укажем на главнейшие, по нашему мнению, из них.

Прежде всего, автор, по-видимому, не имеет еще достаточного опыта в анализе литературы, так как у него определенно чувствуется наклонность к извлечению из литературы лишь практических правил расположения и течения выкладок, без достаточного их теоретического освещения. Принципиальная сторона у автора отступает на второй план. В этом смысле у читателя нет уверенности в том, что, анализируя литературу, Штумпф не недооценивал и не пропускал у различных авторов ценные теоретические, явно молчаливо ими делаемые. Короче говоря, извлекая из литературы описание приемов периодического анализа, автор имеет тенденцию проходить мимо их теоретического скелета. В связи с этим у автора имеется безусловное смешение двух совершенно различных точек зрения: точки зрения вероятности и точки зрения чистой математики. Подобное смешение совершенно недопустимо и прискорбно, так как читатель, изучая по Штумпфу тот или иной прием анализа периодических явлений, никогда не уверен в том, проистекает ли могущая приключиться неверность финального результата из самих ошибок наблюдения в первоначальном наблюденном материале, или же из чисто аналитических недостатков рассматриваемого приема, так что, если бы все наблюдения были сделаны с абсолютной (математической) точностью, то все-таки финальный результат представил бы грубую ошибку. Это смешение обеих точек зрения является в книге Штумпфа главнейшим недостатком. Конечно, в фактическом применении того или иного приема, особенно в астрофизике, совершенно немыслимо игнорировать ошибки наблюдения, влияние которых здесь может выступить (и действительно выступает) на самый первый план, но тем не менее необходимо проводить, при изложении методов анализа периодических явлений, очень точное разграничение моментов, привносимых случаем, от моментов, привносимых математикой. Это расщепление мы старались выполнить в нашей статье, из которой мы просто удалили все, зависящее от теории вероятностей лишь для иллюстрации, упомянув в § 29 о влиянии законов на четкость спектральных линий. Таким образом, у Штумпфа недостаточно выявлен чисто математический базис рассматриваемых им приемов анализа периодических явлений.

Наконец, следует отметить у Штумпфа более или менее систематическое уклонение от французской литературы, несомненно, сделавшей свой вклад по этому вопросу. В этом случае пострадавшим является в первую очередь Лагранж, пропуск самого имени которого является пунктом, подлежащим в первую очередь исправлению в книге Штумпфа. И это тем более необходимо сделать, что метод Лагранжа упоминается всюду, хотя бы в той же самой немецкой «Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften (Bd. II_1, Heft, 5, S. 675). III. Aufsuchung versteckter Periodizitäten. 21. Die Methode von Lagrange). В этом смысле исправление этого дефекта Ленинградским гидрологическим институтом является совершенно своевременным и правильным. Но указанные недочеты в книге Штумпфа отнюдь не должны препятствовать рассматривать ее как действительно основной источник, с которого следует начинать изучение литературы по анализу периодических явлений. Указанные недочеты его, перестающие, притом, чувствоваться, когда на них обращено внимание, свойственны, собственно, до известной степени каждому автору, излагающему специальные приемы дисциплины, имеющей дело с конкретными явлениями.

Достаточно указать, что даже некоторые работы по небесной механике несвободны от этого.

Мы теперь коснемся вкратце второго важного источника: работ Гидравлико-математического отдела Государственного гидрологического института в Ленинграде. Эти работы, собранные в весьма тщательно изданную книжку, являются, видимо, лишь первым выпуском трудов указанного отдела и представляют большую ценность. Ценной и важной является вводящая статья проф. А. А. Саткевича, прекрасно и очень четко излагающая основные методы анализа периодических явлений. Безусловно значительны статьи М. В. Ремезовой, А. Л. Бородулиной и Е. Е. Шпилевой по реализации метода периодограмм (Бюи-Балло) в вопросах о вскрытии рек и периодичности уровня Ладожского озера. Превосходна статья С. М. Варзар об условиях применимости метода Лагранжа — Дэла, очень ясно трактующая наиболее деликатные пункты этого метода, могущие оказаться источником неприемлемых результатов. И, наконец, ценны и весьма интересны изыскания В. М. Маккавеева по предлагаемому им методу выделения периодических членов гармонического и затухающего типа. Если мы не подвергли теоретическому рассмотрению приемы этого автора и не старались определить их теоретические границы, то это лишь вследствие угрожающих размеров сильно разросшейся настоящей статьи. Мы весьма рекомендуем прекрасную, весьма продуманную и тщательно составленную книжку трудов Ленинградского гидрологического института и для тех, кто имеет возможность изучать Штумпфа, как ценный параллельный источник. Знанием этой книжки я обязан члену-корреспонденту Академии наук СССР проф. В. И. Смирнову, которому считаю своим приятным долгом выразить здесь глубокую благодарность.

Третий источник (E. Whittaker & G. Robinson), изданный в прошлом (1933) году на русском языке (Э. Уиттекер и Г. Робинсон. Математическая обработка результатов наблюдений, стр. 245 — 268 и 323 — 337) в превосходном переводе под редакцией члена-корреспондента Академии наук проф. Н. М. Гюнтера, трактует вопрос о разыскании неизвестных периодов главным образом с точки зрения теории вероятностей (корреляции). Поэтому этот источник не лежал в русле нашего изложения.

Наконец, следует упомянуть еще о работах П. А. Кондратьева «Сложные волны» (1924), «Анализ кривых в метеорологии» (1927) и «Практика разложения периодических кривых», в которых автором предлагается, без доказательств, несколько эмпирических приемов, имеющих, по свидетельству автора (см. Предисловие к его работе «Сложные волны»), быстрый и неизменный успех. Мы оставили в стороне рассмотрение этих эмпирических приемов, так как выявление математического их основания и математическая оценка приближения, достигаемого этими приемами, потребовали бы от нас значительных усилий.

В нашей статье мы посвятили несколько страниц беглому указанию наиболее существенных пунктов самой теории почти-периодических функций (§ 6—12). Мы это сделали ввиду того, что если самая идея почти-периодической функции стала в настоящее время у нас известной в широких кругах, то относительно знания их теории этого пока еще нельзя сказать. Притом до сих пор настоящее знание теории почти-периодических функций можно было получить или из непосредственного преподавания в университетах, или из иностранных журнальных статей, или из трех, четырех иностранных книг. Таким образом, поле действия этих источников, по необходимости, было весьма ограниченным.

Вот почему с большим удовлетворением нужно встретить готовящийся к выходу в свет русский перевод прекрасно написанной книжки самого Бора: «Fastrperiodische Funktionen» (Berlin, 1932, S. 1—95), выполненный под редакцией проф. А. И. Плесснера.

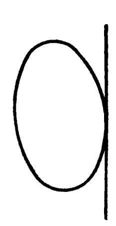
В качестве другого очень интересного и ценного иностранного источника мы укажем на недавно появившуюся книгу: J. Favard «Leçons sur les fonctions presque-périodiques» (Paris, 1933, p. 1—180) из серии «Cahiers scientifiques», выходящей под редакцией члена Парижской Академии наук Г. Жюлиа.

Настоящую нашу статью мы рассматриваем лишь как теоретическое введение в книгу Штумпфа.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ *

Дифференциальное исчисление — математическая дисциплина, посвященная рассмотрению производных и дифференциалов заданных функций. Сущность дифференциального исчисления неотделима от его исторического пути, самое же открытие дифференциального исчисления тесно связано с задачей о проведении касательной. Весь этот цикл проблем теснейшим образом связан с вопросом о бесконечно больших и бесконечно малых.

Историческое развитие дифференциального исчисления. а) *Античный период.* Задачей о проведении касательной занимались еще греческие геометры. После открытия Платоном геометрических мест, т. е. совокупностей точек, характеризуемых некоторым общим свойством, античная мысль направилась на изучение конических сечений (эллипс, в частности — окружность, парабола, гипербола) как определенных геометрических мест. В этом изучении касательные прямые играли весьма важную роль, так как они были тесно связаны с обнаружением чрезвычайно важных и глубоких свойств конических сечений. Но самое понятие касательной прямой было определено статически, т. е. вполне характерным для античной мысли способом: касательной называлась просто прямая, имеющая с кривой только одну общую точку (фиг. 1). С течением времени к указанным кривым греческими геометрами были присоединены и другие кривые (квадратриса Динострата, конхоида Никомеда, циссоида Диоклеса и др.), но при этом прежнее, статическое определение касательной оставалось неприкосновенным. С другой стороны, речь всегда шла не о вычислении положения касательной, а о точном ее построении, т. е. о таком использовании элементов данной фигуры, при котором становилось возможным — после анализа этих элементов — фактическое проведение той прямой, которая должна оказаться касательной. Важно заметить, что у античных геометров отсутствовала общность метода решения различных задач: не было классификации кривых и всякое построение касательной осуществлялось глубоко частным методом, вытекавшим из анализа именно данного случая и вообще уже неприложимым ни к какому другому случаю.



Фиг. 1

* БСЭ, 1-е изд., т. 22, 1934, стр. 622—642.

б) *Эпоха Возрождения.* После разрыва античных традиций вопрос о проведении касательной ставится заново в эпоху Возрождения. Следует прежде всего упомянуть о Кардане (G. Cardano, 1501—1576). Одним из первых он ввел кинематический момент в определение касательной, рассматривая ее как предельное положение вращающейся секущей. Начиная с этого момента, задача о проведении касательной становится в центре внимания европейской математической мысли. Легко указать ближайшую причину этого. Для античных геометров касательные служили скорее ценным инструментом для открытия важных и глубоко лежащих свойств фигур, нежели имели самодовлеющее значение. Для геометров же нового времени оказалось важным не столько статическое построение касательной, сколько вычисление (хотя бы даже приближенное) ее положения. Надо иметь в виду, что, начиная с XVI в., физические и астрономические науки настойчиво требовали создания бесконечно малой геометрии, без которой ходу их развития грозила остановка: теория площадей требовала квадратур, задача отыскания центров тяжести фигур придала квадратурам совершенно реальное значение; астрономии необходимо было определение объемов тел вращения, т. е. кубатуры, которых не оказывалось в известных тогда сочинениях Архимеда. С другой стороны, математическая сторона явлений природы, установленная Галилеем, и попытки анализировать криволинейное движение дали не менее реальный смысл задаче об определении касательной. Именно в связи с этим с указанного времени начинают искать определения касательных для возможно большего числа кривых, как известных еще античным геометрам, так и открытых лишь в новое время. Из ученых, ставших на этот путь, нужно указать прежде всего, кроме Кеплера (I. Kepler, 1571—1630), на самого Галилея (G. Galileo, 1564—1642) и на его учеников — Кавальери (B. Cavalieri, 1598—1647), Торричелли (E. Torricelli, 1608—1647) и Вивиани (V. Viviani, 1622—1703). Все четверо пользовались с этой целью особым методом геометрических бесконечно малых, который ими назывался «методом неделимых».

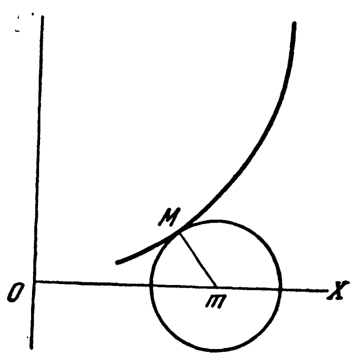
М е т о д н е д е л и м ы х. Согласно современному определению, бесконечно малой называется такая переменная величина a, которая удовлетворяет следующему ряду условий: 1) она конечна в каждый момент времени и имеет строго определенное числовое значение; 2) среди числовых значений, пробегаемых последовательно величиной a, нет самого последнего; 3) каково бы ни было положительное рациональное число ε, наступит такой момент, начиная с которого абсолютная величина $|a|$ сделается и будет впредь оставаться меньше, чем ε, т. е. с этого момента всегда будет справедливо неравенство: $|a| < \varepsilon$. Таким образом, согласно современным взглядам, бесконечно малая величина, будет ли это геометрическая величина или же величина, заимствованная из анализа, есть — по самой своей природе — переменная конечная величина, лишь становящаяся с течением времени и остающаяся сколь угодно близкой к нулю. Что же касается постоянного бесконечно малого количества, отличного от нуля, то современный математический анализ, не отрицая формальной возможности логически определить идею постоянного бесконечно малого (например, как соответствующий отрезок «неархимедовой» геометрии), рассматривает эту идею как совершенно бесплодную, так как ввести такое бесконечно малое в исчисление оказывается невозможным.

Возвращаясь к методу неделимых, следует отметить, что под неделимыми тогда понимали как раз постоянные бесконечно малые. Но одновременно с этим относительно истинной природы неделимых в то время царили весьма смутные взгляды. Неделимые употреблялись практически, причем изредка это приводило к ошибкам в конечных выводах, обусловленным как раз смутностью взглядов на неделимые, потому что предохранительной логической ясности не было, а интуиция иногда подсказывала ложный конечный итог. Наиболее стройный вид учению о неделимых пытался придать Кавальери. Считаясь с возражениями Аристотеля и средневековых схоластов против неделимых «в себе»,— возражениями, устранить которые Кавальери не считал возможным,— он вводит неделимые не абсолютным образом, а относительным, стараясь, чтобы неделимые фигурировали лишь в отношениях. Так как невозможно, чтобы «нечто» было суммой чистых «ничто», то неделимые, собственно говоря, столь же сложны, как и само целое, если рассматривать их «в себе». Но истина, по Кавальери, заключается именно в том, что неделимые имеют не абсолютное, а относительное существование, будучи в состоянии фигурировать в отношениях. Подобно тому, как единица масштаба для геометрии сама по себе (т. е. абсолютным образом) не нужна, будучи необходимой лишь для сравнения размеров фигур, так и неделимые, необходимые для сравнения между собой разнородных фигур, исчезают сами собой в конце вычислений, являясь в их ходе лишь промежуточной ступенью. Сравнение неделимых — вот то новое, что внес Кавальери. Однако, как бы ни было шатко теоретическое обоснование неделимых, практически их теория оказалась очень плодотворной. В частности, удалось провести касательные ко многим кривым, для которых античные математики не имели соответствующих построений. Была, наконец, изучена столь важная новая и неизвестная античным геометрам кривая, как циклоида. Касательная к циклоиде была проведена учениками Галилея.

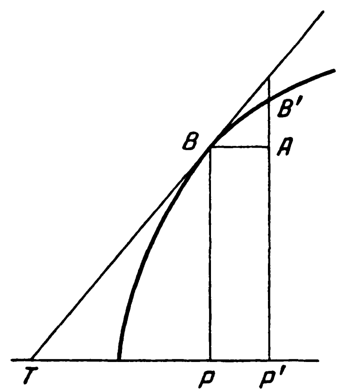
Почти в это же время метод неделимых рассматривался и во Франции Паскалем (B. Pascal, 1623—1662), Робервалем (G. Roberval, 1602—1675) и Гюйгенсом (Ch. Huygens, 1629—1695). Впрочем, Гюйгенс, получая новые результаты методом неделимых, предпочитал публично излагать эти результаты лишь методом античных геометров, т. е. синтетически. Зато оба первых геометра были горячими сторонниками неделимых и внесли много ясности в понимание самой их природы; их точка зрения уже приблизилась к современной: под неделимым они начали понимать уже не геометрический нуль, но «исчезающе-малое» количество той же природы, что и сама данная конечная величина. Так, в отличие от Кавальери, площадь они понимали не как «сумму ординат», а как сумму бесконечно малых прямоугольников. Роберваль, претендовавший на самое открытие метода неделимых, дал оригинальный метод проведения касательных к кривым, по принципу уже близкий к методу флюксий Ньютона. Он описывал данную кривую с помощью движения и затем разлагал это движение на две составляющих, для которых он мог определить скорости по величине и направлению. В этих условиях скорость первопачального движения была просто диагональю параллелограмма, построенного на скоростях обеих составляющих движений, т. е. касательная к кривой оказывалась построенной. Этим способом Роберваль очень просто провел касательные ко многим кривым, дав построения, неизвестные древним. Однако несмотря на обогащение новыми идеями, выходящими из рамок античных рассуждений, одна крайне существенная черта сближает путь античных геометров и метод неделимых, а именно, все то же отсутствие общности. Каждое построение касательной, хотя бы и очень простое, дается методом глубоко частным, пригодным только для данной кривой и ни для какой другой. Общности и общего алгорифма здесь так же нельзя искать, как и у античных геометров.

Появление алгорифма в геометрии. Новое в этом смысле начинается с Декарта (Descartes, 1596—1650). Создание им аналитической геометрии, т. е. метода характеристики кривых линий посредством уравнений, впервые ввело общность в геометрические вопросы. Отныне исчезает уже та зависимость геометрических выводов от частного расположения деталей в данном чертеже, которая столь характерна для геометрии древних. Одновременно с этим сделалась возможной классификация кривых по виду их уравнений. Сам Декарт также занимался задачей о проведении касательной, и ему принадлежит глубокий, но на практике тягостный метод проведения касательных. Декарт ищет не касательную, а нормаль к данной кривой. С этой целью он ищет среди окружностей, проходящих через данную точку M кривой и имеющих центр на оси OX, такую, которая пересекает данную кривую в двух слившихся точках (фиг. 2). Следовательно, положение центра m искомой окружности и, значит, нормали Mm к кривой ищется чисто алгебраическим путем, посредством разыскания кратных корней системы двух уравнений с двумя неизвестными. Ясно, что этот метод по самой сути применим лишь к алгебраическим кривым.

Предшественники Ньютона и Лейбница. Вплотную подошел к созданию дифференциального исчисления знаменитый современник Декарта — Ферма (P. Fermat, 1601—1665), который независимо от Декарта употреблял метод координат, почему его и считают предшественником Декарта по изобретению аналитической геометрии. В 1629 г. Ферма, пораженный идеями Кеплера по отысканию экстремумов, дал следующее правило, которое Лагранж, Лаплас и Фурье считали уже самим открытием дифференциального исчисления: «Чтобы отыскать максимум или минимум количества $f(x)$, надо составить выражение $f(x+e)-f(x)$, где e есть неопределенное число. Затем, освободив это уравнение от дробей и радикалов и сделав приведение подобных членов, нужно разделить упрощенное таким образом уравнение на это неопределенное e. Полагая затем в оставшихся членах $e = 0$, мы имеем некоторое уравнение, содержащее букву x, корни которого и суть максимумы и минимумы. Без сомнения, легко в этом правиле Ферма узнать правило составления производной (по крайней мере для алгебраических функций) и приравнивания ее нулю. На этом основании указанные геометры были склонны приписать честь открытия дифференциального исчисления Ферма. Однако Пуассон справедливо отмечает, что дифференциальное исчисление



Фиг. 2



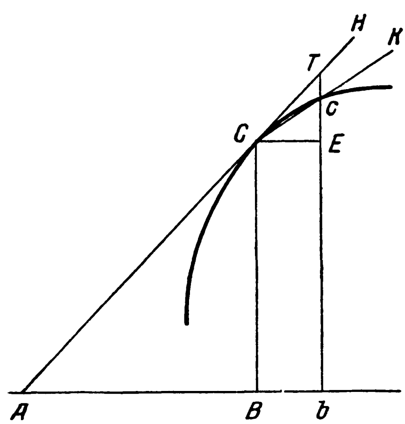
Фиг. 3

«состоит в системе точных правил для отыскания дифференциалов всех функций, и это существеннее, чем то употребление, которое можно сделать из рассмотрения бесконечно-малых изменений, стремясь решить одну или две частных проблемы». Во всяком случае Ферма из своего метода отыскания экстремумов вывел способ проведения касательных. Другие историки называют изобретателем дифференциального исчисления учителя Ньютона — Барроу (Barrow, 1630—1677), который был сперва профессором в Лондоне, потом в Кембридже и в 1669 г. передал свою кафедру Ньютону. Метод Барроу возник из упрощения метода Ферма путем введения двух бесконечно малых вместо одного. На прилагаемом чертеже (фиг. 3), воспроизводящем чертеж Барроу, мы имеем бесконечно малый треугольник ABB', составленный из приращения абсциссы BA, приращения ординаты AB' и кривой стороны BB'. Этот треугольник подобен треугольнику TPB, составленному из ординаты, касательной и субкасательной. Отсюда, если известно отношение AB к AB', то известно и отношение ординаты к субкасательной, и, значит, касательная строится сразу. Самое вычисление отношения AB' к AB Барроу производит, пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, т. е. почти современными методами. Для того чтобы совершилось открытие дифференциального исчисления, не хватало лишь обозначения и алгорифма. То и другое было дано почти одновременно, независимо друг от друга и с разною целью, Ньютоном и Лейбницем.

Ньютон (J. Newton, 1643—1727) был учеником Барроу, глубоко чтившего его гений. До открытия дифференциального исчисления он изучал, кроме античных геометров, «Géométrie» Декарта, «Optik» Кеплера, труды Вьета, «Lectures» Барроу и «Arithmetica infinitorum» Валлиса. В этой последней книге Валлис рассматривает кривые с ординатами $(1-x^2)^0$, $(1-x^2)$ $(1-x^2)^2, \ldots$ и вычисляет площади этих кривых для отрезка $[0 \leqslant x \leqslant 1]$. Получив таким образом числа 1, 2/3, 8/15, 4/105,..., Валлис, бывший одним из величайших разгадывателей криптограмм, ставит себе вопрос: как наряду с этими числами должно было бы выглядеть число, выражающее площадь кривой $(1-x^2)^{1/2}$? После в высшей степени сложного и трудного анализа Валлис приходит к своему известному изображению числа π в виде бесконечного произведения $\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\ldots}$. Изучение этого места у Валлиса привело Ньютона сперва к открытию его знаменитого бинома, а затем к размышлениям о том, каким образом вообще находить фактически квадратуру кривой. Эти размышления привели Ньютона около 1665—1666 гг. к замыслу некоторого общего метода, названного им методом флюксий и изложенного сначала очень бегло в рукописи «De analysi per aequationes numero terminorum infinitas», написанной в 1669 г. и опубликованной в 1711 г., и затем более подробно в рукописи «Method of Fluxions», написанной в 1671 г. и опубликованной в 1736 г. Нежелание публиковаться и стремление отложить печатание было вообще одной из черт характера Ньютона, ценившего более всего на свете внутренний покой и возможность невозмущаемого ничем течения размышлений. Впервые метод флюксий увидел свет, когда появилось первое издание знаменитых «Principia» Ньютона, где в примечании, как бы мимоходом, едва намечены основы этого метода, хотя он насквозь проникает «Principia» и фактически подчиняет себе содержание этого труда.

Это произошло в 1687 г. В этом методе флюксий основной идеей Ньютона было рассмотрение переменных количеств $v, x, y, z, \ldots$ как текущих (fluents) и тех скоростей, с которыми они текут. Ньютон эти скорости называет флюксиями (fluxions) и обозначает их соответственно через $\dot{u}, \dot{x}, \dot{z}, \dot{y} \ldots$ Чтобы избавиться от упрека, что в геометрию и анализ вводится чуждое им понятие времени, Ньютон замечает, что он лишь формально рассматривает независимое переменное (абсциссу) как время. В этих условиях, согласно Ньютону, «площадь кривой есть непрестанно рождающееся количество, увеличивающееся непрерывной флюксией, пропорциональной ординате кривой». Из этих слов ясно, что флюксия пропорциональна производной или дифференциалу. Но затруднительно сказать, рассматривает ли Ньютон флюксию как конечное количество (т. е. как производную), или как бесконечно малое (т. е. как дифференциал). В этом отношении у Ньютона нет полной ясности, и даже можно установить, что его доктрина не оставалась неизменной, но менялась с течением времени в зависимости от выдвигавшихся против нее возражений. Чтобы отметить разницу точек зрения своей и Лейбница, Ньютон пишет (Quadrature of Curves», 1704): «Я рассматриваю математические количества не как состоящие из очень маленьких частиц, а как описанные непрерывным движением. Это образование в природе вещей и ежедневно наблюдается в движении тел. Флюксии суть как бы наращения количеств, образованные во времени, малые, как угодно; строго говоря, они находятся в первом отношении к рождающимся наращениям; несмотря на это они могут быть изображены всякими линиями, им пропорциональными».

Эти утверждения Ньютон иллюстрирует на проблеме проведения касательной. Приводимый чертеж Ньютона (фиг. 4) отличается от чертежа Барроу (фиг. 3) лишь проведенной хордой CK. Согласно Ньютону: «Когда ордината bc, двигаясь к BC, совпадает с ней, тогда Ec абсолютно будет равно ET; тогда же кривой треугольник CEc станет подобен треугольнику CET и, значит, уничтожающиеся стороны этого криволинейного треугольника станут пропорциональными сторонами треугольника CET. Отсюда следует, что флюксии линий AB, BC и AC, будучи в последнем отношении с их уничтожающимися наращениями, суть пропорциональны сторонам треугольника CET или треугольника ABC. Пока b не совпадаетс B, линия CK мало отклоняется от CH, но все-таки отклоняется. Но когда CK совпадает с CH и линии CE, Ec, cC достигнут их последнего отношения, тогда точки C и c в точности совпадут».



Фиг. 4

Приведенное место показывает, сколь необходима была для этих вещей теория пределов и как трудно было быть понятым без нее: уже современники Ньютона много спорили об его «первых» и «последних» отношениях, в введении которых Ньютоном можно видеть намек на современную теорию пределов. Но хотя у Ньютона не было идущих с самого начала ясных формальных определений, хотя он и не дал ни таблиц производных и интегралов, ни ряда основных теорем, составляющих обычный скелет дифференциального и интегрального исчисления, однако оба эти исчисления полностью раскрывают свое содержание и свою мощь в работах Ньютона; по мере надобности Ньютон с величайшей легкостью проводит касательные к любым встретившимся в его исследованиях кривым, вычисляет кривизну, находит площади, длины дуг, центры тяжести, экстремумы и т. д. Ньютон без труда, благодаря изобретенному им общему приему, отыскивает производные неявных функций, и ему удается интегрировать не только обыкновенные дифференциальные уравнения, но и уравнения с частными производными. Эта общность и гибкость в применениях была достигнута Ньютоном благодаря концепции флюксии (производной) и благодаря специальному для нее обозначению, вследствие чего стал возможным общий алгорифм, хотя он на деле и оказался громоздким.

Лейбниц (G. Leibnitz, 1646—1717) исходил при открытии дифференциального исчисления из совсем других соображений. Насколько Ньютон был натуралистом, для которого скорость тел была чем-то самодовлеющим, настолько Лейбниц был чистым логиком, для которого количества не возникали путем движения, но были даны как суммы бесконечно малых разностей, «элементов»; здесь отголосок его философской доктрины монад. В 1666 г., в бытность свою в Германии, Лейбниц публикует сочинение «De arte combinatoria», в котором он дает план теории математической логики, т. е. некоторого символического метода, вроде алгебры мышления, где процесс непосредственной ищущей живой мысли сделался бы ненужным, так как искусство думать было бы сведено к алгебраическим выкладкам. Эта идея, существовавшая еще в средние века, внушена была Лейбницу изучением «Геометрии» Декарта, в которой в самом деле непосредственные размышления над чертежом заменяются часто простыми алгебраическими выкладками. Следует отметить, что эта идея почти полностью воскрешена в настоящее время в символической логике Шредера, Пеано и Ресселя и в работах Гильберта. Часть этого сочинения Лейбница осталась неопубликованной; она была разыскана и напечатана недавно и оказалась содержащей исчисление классов, включая индуктивность и ноль-класс. Это исчисление практикуется в современной теории множеств. В 1672 г. Лейбниц едет с политической миссией в Париж, где знакомится с Гюйгенсом, принявшим горячее участие в молодом ученом и познакомившим его со всеми тогдашними математическими знаменитостями Парижа. Он лично руководит пополнением недостаточного математического образования Лейбница.

В 1673 г. Лейбниц едет в Лондон, где живет несколько месяцев. Здесь он представляет Королевскому обществу изобретенную им счетную машину. Вернувшись в Париж, Лейбниц с неутомимой энергией пополняет свои сведения по математике. Занимаясь задачей о квадратуре круга, Лейбниц приходит к ряду:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots,$$

правда, найденному раньше Грегори (Gregory). Но по-прежнему в центре его внимания находится «реальная характеристика», т. е. изобретение системы знаков, долженствующей упразднить не только латынь, но и вообще всякий язык, заменив его системой «знаков мысли», т. е. замена работы мышления механизмом. Он упрекает английских логиков Дальгарно («Ars signorum», 1661) и Уилкинса («Real character», 1668) в том, что они оперируют с синтаксисом, а не с алгеброй. Он замечает, что, прежде чем атаковать всю область мысли, следует осуществить свои намерения в частной науке, например в теории чисел, пополненной в целях изучения природы «непрерывными числами», придав такой обобщенной теории чисел вид арифметики. По словам Лейбница, «наши идеи все время дают ряды непрерывных разностей, и эти бесконечно малые разности не войдут в наше исчисление, если не будут обозначены новыми символами и подвергнуты специальным операциям». Значит, надо создать алгебру бесконечно малых, если хотят приступить к универсальной логике. Таким образом, «Исчисление понятий» и «Исчисление разностей» ведут Лейбница к созданию дифференциального исчисления и интегрального исчисления.

После своих занятий площадью круга Лейбниц снова берется за «Géométrie» Декарта и атакует то, что он называет «прямой и обратной проблемой касательных». Первая проблема: «дана кривая, найти касательную», ведущая к дифференциальному исчислению, была трактована Декартом в простейших случаях. Но обратная проблема: «зная касательную, восстановить кривую», выходит за пределы метода Декарта. Лейбниц с этой целью строит то, что он называет «характеристическим треугольником»; это — бесконечно малый треугольник, составленный из приращения абсциссы, приращения ординаты и дуги кривой, совпадающей с касательной, так как Лейбниц рассматривает кривую как многоугольник. Чертеж Лейбница совпадает с чертежом Барроу (фиг. 3) и был им заимствован у Паскаля. Из этого чертежа Лейбниц устанавливает, что обратная проблема касательных и проблема квадратур суть тождественные вещи. Этот вывод Лейбница содержится в рукописи 1673 г.

Установив, что обращение задачи дифференцирования есть задача о квадратуре, Лейбниц в ближайшие годы сосредоточивает все свое внимание на выработке удачных значков для создаваемой им алгебры «непрерывных чисел». Сначала он употребляет символику Кавальери, именно значок *omn* (omnia, что значит — все), но находит его громоздким. Наконец 29 октября 1675 г. Лейбниц заменяет значок Кавальери значком интегрирования $\int$ и пишет свои первые уравнения:

$$\int x = \frac{x^2}{2}, \quad \int (x+y) = \int x + \int y.$$

В этот же день он вводит значок d для обозначения разности, т. е. действия, обратного действию $\int$. Таким образом, этот день замечателен тем, что является датой рождения нового исчисления. Но сначала Лейбниц не знает, как употреблять значок d, доставлявший ему много забот. Рассматривая его как значок, обратный значку $\int$, он сперва даже помещает его в знаменатель и пишет: если $\int 1 = ya$, то $1 = ya/d$. Затем он начинает писать вместо d современное dx. Чрезвычайных усилий от него потребовало решение вопроса, каким образом писать $d\,(xy)$ — в виде ли $dx\,dy$, или в виде dx/dy или же в виде $d\frac{x}{y}$. Наконец, 21 ноября 1675 г. он выводит свою знаменитую формулу: $d(xy) = ydx + xdy$ и приступает к составлению таблиц дифференциалов и интегралов. В ноябре 1676 г. он еще делает ошибки в вычислении: он пишет $d\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Но 11 июля 1677 г. обе таблицы были в полном порядке, и Лейбниц переходит к решению всех встречавшихся ему вопросов путем вновь созданного исчисления.

Наконец, в 1684 г. Лейбниц публикует в новом немецком журнале «Acta eruditorum» на шести страницах принцип своего исчисления и свои таблицы, на три года раньше появления ньютоновых «Principia», где были первые печатные сведения об исчислении флюксий. Сначала на работу Лейбница никто не обратил внимания, но затем на чрезвычайную мощь нового исчисления обратила внимание семья Бернулли, и оно начало быстро завоевывать известность на континенте. Сначала Ньютон, узнавший о новом исчислении, сочувственно отнесся к нему и обменялся с Лейбницем письмами. Но затем под влиянием окружающих они были вынуждены к долгой и печальной полемике о приоритете.

По этому поводу следует заметить, что открытие дифференциального исчисления было совершенно подготовленным, как и открытие неевклидовой геометрии. Учет влияний в такой напряженной атмосфере крайне затруднителен. Аналогичное мы теперь наблюдаем в теории квант или в ведущейся в настоящее время полемике о законе «исключенного третьего», т. е. собственно опять о сущности бесконечного. В такие исторические моменты каждое слово, мысль, даже жест ведут к образованию того или иного потока идей.

Основания дифференциального исчисления. Ни Ньютон, ни Лейбниц не дали безупречного обоснования дифференциального исчисления. Это дело выпало на долю дальнейших поколений. Через весь XVIII в. тянутся дискуссии об обосновании дифференциального исчисления. В математической литературе того времени содержатся самые разнообразные способы обоснования,— по преимуществу такие, которые непригодны для этой цели. Сюда относятся попытки Ивана Бернулли (I. Bernoulli, 1667—1748) и Эйлера (L. Euler, 1707—1783) рассматривать дифференциал как нуль. Непригодна формальная попытка Лагранжа (J. Lagrange, 1736—1813) рассматривать производные как коэффициенты ряда Тэйлора. Оказались также бесплодными усилия ввести актуально-малые, так как на теории неархимедовых величин нельзя обосновать дифференциальное исчисление. Одновременно с дискуссией об обосновании дифференциального исчисления шли дискуссии относительно бесконечных рядов, так как употребление расходящихся рядов в XVIII в. было совершенно некритическим (Эйлер). Таким было положение вещей даже в начале XIX в. Так, в 1826 г. Абель (N. Abel, 1802—1829) жалуется на то, что «математический анализ окутан туманом, хотя и имеется много верных предложений, недоказанных, однако, прочным образом». Приближалось время критики, и дискуссии вызывались также введением мнимых чисел и даже вещественных отрицательных чисел.

Согласно современным взглядам, начало действительно строгому обоснованию дифференциального исчисления положил Коши (A. Cauchy, 1789—1857). Его точка зрения принимается и в настоящее время преобладающим числом математиков, работы которых протекают в классических областях математики, и на эту же самую точку зрения нередко становится современная педагогика.

Точка зрения теории пределов. По взглядам Коши, для полного обоснования математического анализа прежде всего должна быть построена так называемая теория пределов. С этой целью сперва вводится понятие переменной величины, проходящей последовательно через различные числовые значения, среди которых нет самого последнего; в каждый момент времени переменная x имеет одно строго определенное числовое значение. Мы говорим, что переменная величина x стремится к пределу a, если, каково бы ни было положительное число ε, начиная с некоторого момента времени осуществится и будет сохраняться неравенство $|x - a| < \varepsilon$, т. е. если разность $(x - a)$ по абсолютной величине в некоторый момент времени сделается и останется меньше, чем ε. Отсюда и следует, что переменная величина x может иметь только один предел a или же может не иметь совсем никакого предела. Когда число a есть предел переменной величины x, то пишут символическое равенство $\lim x = a$. Наконец, переменная величина x называется бесконечно малой, если ее предел равен нулю, т. е. если $\lim x = 0$. Как выше было объяснено, всякая бесконечно малая есть переменная величина, и постоянных бесконечно малых, отличных от нуля, с этой точки зрения не существует для современного анализа.

Теория пределов вся состоит собственно из одного только предложения: предел суммы, разности, произведения и частного двух переменных величин равен сумме, разности, произведению и частному соответствующих пределов, т. е.:

$$\lim (x + y) = \lim x + \lim y,$$
$$\lim (x - y) = \lim x - \lim y,$$
$$\lim (xy) = \lim x \lim y,$$
$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y},$$

причем предполагается, что предел знаменателя $\lim y$ не равен нулю, так как деление на нуль принципиально невозможно.

Теперь, чтобы обосновать дифференциальное исчисление, берут чертеж Ньютона (фиг. 4), предполагая, что изображенная там кривая имеет своим уравнением $y = f(x)$. Пусть координаты точки C кривой суть x и y и пусть координаты точки c, близкой к C, суть $x + \Delta x$ и $y + \Delta y$, где Δx и Δy называются приращениями переменных x и y. Так как точка c лежит на кривой, имеем: $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$; отсюда $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. На чертеже Ньютона $CE = \Delta x$ и $cE = \Delta y$. Ясно, что имеем $\operatorname{tg}(ECc) = \Delta y / \Delta x$. Пусть теперь точка c безгранично приближается к точке C. Тогда секущая CK поворачивается и стремится к касательной CH как к своему пределу. Значит $\operatorname{tg}(ECc)$ является переменной величиной, имеющей своим пределом тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс, т. е. $\lim \operatorname{tg}(ECc) = \operatorname{tg}(BAC)$. Отсюда следует, что искомый тангенс угла наклона касательной является пределом отношения $\Delta y / \Delta x$, в символах

$$\operatorname{tg} BAC = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

где Δx и Δy суть две бесконечно малые величины. Таким образом, отыскание касательной к заданной кривой производится при помощи алгебраического отыскания предела отношения двух бесконечно малых величин на основе теории пределов.

Указанный предел $\lim \Delta Y / \Delta x$, предполагаемый существующим, в общем случае зависит от x. Поэтому этот предел является некоторой новой функцией независимой переменной x. Эта функция называется производной от данной функции $f(x)$ и, по примеру Лагранжа, обозначается через $f'(x)$. Самый процесс получения производной $f'(x)$ из данной функции $f(x)$ называется дифференцированием функции $f(x)$ по независимой переменной x. Беря производную от $f'(x)$, мы приходим к новой функции, которая называется второй производной от данной функции $f(x)$ и обозначается через $f''(x)$; дифференцируя $f''(x)$, мы получаем третью производную $f'''(x)$ и т. д. Таким образом создается понятие о производных высших порядков.

Гениальным является обозначение производной, принадлежащее Лейбницу. Производная от функции $y = f(x)$ обозначается через символ dy/dx или $df(x)/dx$, или даже как $\frac{d}{dx} f(x)$. Здесь в своем первом значении дробь dy/dx есть только символическая, т. е. является просто стилизованным обозначением производной, вызывающим в нашей памяти самый процесс получения производной, как предела истинной дроби $\Delta y / \Delta x$. Таким образом, числитель dy в своем первом значении есть только символический, не имеющий числового математического смысла. Но затем, по мере развития дифференциального исчисления, было найдено в высшей степени целесообразным последовать примеру Лейбница и придать знаменателю dx и числителю dy конкретный числовой смысл. С этой целью берут произвольное конечное приращение Δx независимой переменной x и полагают $dx = \Delta x$. В этих условиях dx уже утрачивает свой исключительно символический характер и становится новой независимой переменной, будучи совершенно произвольным; это dx называется дифференциалом независимой переменной x. После этого равенство $dy/dx = f'(x)$ даст нам $dy = f'(x)dx$, т. е. и числитель dy, бывший только символическим, теперь уже приобретает конкретный числовой смысл, будучи равен произведению производной $f'(x)$ на дифференциал независимой переменной dx. Этот числитель dy, являющийся теперь функцией двух независимых переменных x и dx, называется дифференциалом данной функции $y = f(x)$.

Если на чертеже Ньютона (фиг. 4) отрезок Bb, равный CE, есть $\Delta x = dx$, то отрезок ET есть, очевидно, dy, в то время как отрезок Ec есть приращение Δy. Таким образом, приращение функции Δy и дифференциал функции dy суть разные вещи. Но если Δx стремится к нулю, то, очевидно, $\lim \Delta y/dy = 1$, если производная $f'(x)$ отлична от нуля.

Понятие о дифференциале функции — в высшей степени важное понятие. Можно подумать, что для того чтобы иметь дифференциал функции dy, надо сначала знать ее производную $f'(x)$. На практике обычно происходит наоборот: сперва непосредственно вычисляют дифференциал функции dy, а затем, деля его на dx, узнают производную $f'(x)$.

Для нахождения же дифференциалов всех функций, которые могут быть написаны с помощью конечного числа знаков элементарных функций, служит следующая таблица основных дифференциалов, впервые составленная Лейбницем:

1) $d(u+v) = du + dv$;

2) $d(u-v) = du - dv$;

3) $d(uv) = vdu + udv$;

4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$;

5) $dx^n = nx^{n-1}\,dx$, в частности $d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$;

6) $da^x = a^x \ln a \cdot dx$;

7) $de^x = e^x dx$;

8) $d \log_a x = \frac{dx}{x \ln a}$;

9) $d \ln x = \frac{dx}{x}$;

10) $d \sin x = \cos x\, dx$;

11) $d \cos x = -\sin x\, dx$;

12) $d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$;

13) $d \operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$;

14) $d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

15) $d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

16) $d \operatorname{arc\,tg} x = \frac{dx}{1+x^2}$;

17) $d \operatorname{arc\,ctg} x = -\frac{dx}{1+x^2}$.

Наиболее важным, однако, является предложение о дифференцировании функции от функции: если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, то предложение это гласит: $dy = f'(u)du$, или в словах: чтобы найти дифференциал функции от функции, поступают так, как если бы внутренняя функция u была независимым переменным. Если, например, $y = \ln z$, а $z = \sin x$ (т. е. нам нужно продифференцировать функцию $y = \ln \sin x$), то мы имеем:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z}\,; \quad \frac{dz}{dx} = \cos x$$

и, следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z} \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x\,.$$

Именно эта теорема и позволяет находить дифференциалы всех функций, которые можно написать конечным образом. Именно она дает чрезвычайную мощь новому исчислению; без нее дифференциальное исчисление как алгорифм не существовало бы.

Чтобы должным образом понять значение дела Коши и оценить обоснование дифференциального исчисления на построенном им фундаменте, нужно обратить внимание на роль, которую играет в его учении понятие переменной величины. Роль эта исключительно важна, и в то время как, например, алгебра и теория чисел имеют дело исключительно с постоянными числами, т. е. с величинами в стационарном состоянии, Коши вводит в математический анализ переменные величины на равных правах с постоянными, подчинив и те и другие одинаковым правилам исчисления. В этой одинаковости правил лежал залог успеха учения Коши. В конечном итоге математический анализ имеет целью получение определенных соотношений между теми или другими постоянными или параметрами, важными для естествознания или самой математики. Согласно идеям Коши, математический анализ, чтобы иметь эти соотношения, может вводить в рассмотрение переменные величины, подчиняющиеся тем же правилам исчисления, как и постоянные величины. Эти переменные величины играют в рассуждениях лишь служебную роль и исчезают сами собой, при правильном ведении рассуждения, в конце доказательств, так что в итоге рассуждения остаются лишь нужные соотношения между постоянными. Согласно Коши, роль переменных величин та же самая, какую играют в алгебре промежуточные неизвестные, которые исключаются в ходе вычислений. Легко заметить, что в этом введении в анализ переменных величин сказывается тесная связь идей Коши именно с идеями Ньютона, а не Лейбница. Именно Ньютон рассматривал производные как скорости. Для него, великого естественника, скорость движения была самым основным, самым естественным, самым обыденным и самым понятным явлением, которое находится у нас каждый день перед глазами. И поэтому не только существование производных, но и самое понимание, определение производных Ньютон тесно связывает с понятием скорости. О существовании производных нет надобности спрашивать, потому что должна существовать скорость движения. Когда Ньютона упрекали за то, что он явным образом ввел в математику время, он отвечал, что за «вводимое» им «время» можно принять любую изменяющуюся величину. Как раз у Коши и вводятся принципиальным образом переменные величины, и таким образом с этих пор анализ становится обогащенным новыми величинами, употребляемыми на равных правах с постоянными, как вводятся мнимые числа наравне с вещественными.

Такая точка зрения совершенно безукоризненна, и Коши по заслугам принадлежит слава первого строгого основателя дифференциального исчисления. Реформа, сделанная им в математическом анализе, находит могучие отзвуки и в наше время. Его обоснование дифференциального исчисления сохраняет силу и сейчас и принимается безоговорочно очень многими математиками, убежденными сторонниками взглядов Коши. Их число следует увеличить еще теми представителями математических наук, которые, соглашаясь по тем или иным причинам с недостаточностью фундамента Коши для математического анализа и признавая, на словах, необходимость положить в основу дифференциального исчисления точку зрения теории множеств, на деле, в их текущей работе, полностью ограничиваются идеями Коши, нигде не выходя за их пределы (что всегда легко установить). Если присоединить таких математиков к открытым сторонникам взглядов Коши, то нужно признать, что большинство современных математиков полностью принимает математический анализ таким, каким он представлялся еще Коши. В педагогике, преподавании и в учебниках обоснование дифференциального исчисления на основе идей Коши является замечательным по силе и совершенно неоценимым средством придавать совершенную ясность математическим понятиям, рассеивая туман, скопляющийся вокруг наиболее темных и трудных понятий, который никогда не рассеивается, если основные понятие дифференциального исчисления объясняют на аналогиях, лишь расширяя смутность представления и на соседние понятия, казавшиеся непосредственно ясными.

Но точка зрения Коши имеет, по современным взглядам, тот основной недостаток, что она бессильна охватить и объяснить многие очень глубокие факты математического анализа, которые были открыты в конце прошлого, XIX в. и в начале настоящего века. Факты эти были открыты теорией множеств и основанной на ней теорией функций и обнаруживают необычайно тонкую и в высшей степени богатую микроструктуру математических предметов, оказывающую могущественное влияние и на соотношение между давно известными классическими свойствами (такова, например, теорема Фишера — Риса). Эти факты, число которых все увеличивается и которые составляют прочное, приобретенное 70-летней работой достояние абсолютной ценности, просто выпадают из поля зрения взглядов Коши. Лицо, признающее только точку зрения Коши, не видит этих фактов и не сможет ни открыть их, ни почувствовать их важность. Точку зрения Коши, важную для преподавания начал математического анализа, нельзя рекомендовать как достаточный научный фундамент дифференциального исчисления, удовлетворяющий законным и обязательным требованиям ко всякому научному фундаменту — быть строгим и глубоким в отношении охвата известных фактов. Короче, точку зрения теории Коши приходится квалифицировать как близорукую, так как она сильно ограничивает поле зрения.

Как конкретный пример факта, не охватываемого точкой зрения Коши, укажем на следующую задачу, теснейшим образом связанную с самой основной проблемой дифференциального исчисления и интегрального исчисления.

Дана функция $f(x)$; отыскать непрерывную функцию $F(x)$, имеющую $f(x)$ своею производною, т. е. чтобы

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) .$$

Проблема эта, поставленная еще при жизни Лейбница и Ньютона (около 1690 г.), не имела общего решения в течение 220 лет, и полное ее решение пришло лишь в наши дни (1910 г., А. Данжуа). Точка зрения Коши позволяет отыскивать функцию $F(x)$ только в тех случаях, когда $f(x)$ непрерывна, и еще для немногих разрывных функций $f(x)$. Но имеется бесчисленно много разрывных функций $f(x)$, положительных и меньших единицы, $0 < f(x) < 1$, заведомо служащих производными в каждой точке непрерывных функций $F(x)$ и, однако, таких, что отыскать эти непрерывные функции $F(x)$ применением интегрирования, по Риману, невозможно (что доказывается абсолютно строго); значит, для отыскания соответствующих непрерывных $F(x)$ необходимо применить высшие приемы интегрирования, что неизбежно связано с существенным выходом за точку зрения Коши.

Точка зрения теории множеств. Эта точка зрения, связанная более с идеями Лейбница, чем Ньютона, прежде всего удаляет из анализа все переменные величины, всякое изменение, движение и все сводит к одним только стационарным состояниям, т. е. к постоянным величинам. Обоснование дифференциального исчисления, столь блестяще выполненное Коши в начале XIX в., продолжало приобретать все большее и большее число сторонников. Сам Коши был математиком могучей творческой силы; дело обоснования дифференциального исчисления он не рассматривал как главную свою задачу, так как чувствовал для анализа еще и другие творческие возможности, и, ясно видя ограниченность всякого критического пути, выполнил дело обоснования как бы мимоходом. Но критическое настроение в среде математиков все более и более усиливалось, особенно после критических этюдов Абеля (1802—1829) и Гаусса (K. Gauss, 1777—1855). Наиболее полное выражение критическое направление умов получило в деятельности Вейерштрасса (K. Weierstrass, 1815—1897). Относительно математической личности Вейерштрасса большинство современных математиков, по-видимому, приходит к согласию в том, что ее центром и смыслом было подведение числовой основы под всю математику, «арифметизация математики», и критический пересмотр различных теорий. Его отличие от Коши состояло в том, что в то время как в высшей степени творческий ум Коши видел всюду еще и многие другие возможности для математического анализа, вполне равноценные характеристике феноменов математического анализа, геометрии, механики или физики посредством числа, в это время критический ум Вейерштрасса, проникнутый лишь одной идеей униформизации математики на почве числа, идеей «арифметизации математики», обнаруживал самый яркий рационализм в своих построениях. Вейерштрасс систематически изгоняет трактование идей анализа применением геометрии и заменяет его арифметическим трактованием. Правда, математика становится как бы ограниченной для взора, но зато такая ее униформизация на почве числа дала возможность доказательства таких предложений, которые расходились с общими ожиданиями или, во всяком случае, далеко выходили за их пределы. Таково, например, существование непрерывных функций, нигде не имеющих производной. Однако дальнейший исторический ход событий показал, что эта униформизация математики, проведенная с такой энергией Вейерштрассом, сама в свою очередь стала источником расхождения взглядов математиков на основы анализа, превратившегося, по мнению некоторых авторов, в его кризис. Ближайшей причиной этого послужила так называемая теория множеств.

Теория множеств как систематическое учение была основана Г. Кантором (G. Cantor, 1845—1918) в 1861 г. и была развита им в ряде статей. Его идеи имели необыкновенный успех и, положенные в основу самых разнообразных исследований, послужили к возникновению ряда новых ветвей математики, из которых важнейшей является современная теория функций действительного переменного. Сам Кантор исходил при открытии теории множеств из теории тригонометрических рядов. Но потом его учение перешло в общую теорию множеств, в классификацию актуальных бесконечностей и в создание так называемых трансфинитных чисел. Благодаря созданию Кантором высших континуумов обычная «старая» математика превратилась в маленькую провинцию общей теории множеств. Вещи оказались впоследствии еще более грандиозными, и труды Пеано (Peano, 1858—1927), Фреге (Frege, 1848—1923) и Дедекинда (J. Dedekind, 1831—1916) показали, что вообще вся математика может быть построена на основе общей идеи множества. Общая теория множеств стала для математиков нежданной областью, в недрах которой рождались математические идеи, формируясь там, и откуда появлялись постановки проблем. Обоснование дифференциального исчисления на почве теории множеств совершается так, что прежде всего должна быть обоснована сама теория пределов и представлена в совершенно новом виде. Теория множеств вся построена на идее так называемой актуальной бесконечности. Еще до Вейерштрасса обычная теория рядов с положительными членами содержала пункты, формулированные в терминах теории множеств и понятные только в свете идеи актуальной бесконечности. Такова знаменитая теорема о том, что «сходящийся ряд с положительными членами не изменяет суммы при перестановке его членов»: здесь бесконечный ряд необходимо мыслится как совокупность всех его членов, уже найденных, вместе собранных и как бы помещенных в сосуд, при переворачивании которого изменяется порядок членов, без изменения, однако, самой суммы. Другой пункт, требующий введения актуальной бесконечности, это сама теория иррациональных чисел; кроме того, всякое иррациональное число, например $\sqrt{2}$, будучи разложено в бесконечную десятичную дробь, определяет сразу всю совокупность всех ее членов.

Для построения дифференциального исчисления на почве теории множеств прежде всего должна быть развита теория иррациональных чисел. Затем вводится понятие точечного множества и понятие предельной точки: точка ε, принадлежащая или нет к данному множеству точек E, лежащему на прямой, называется предельной для множества E, если всякий интервал δ, содержащий ее внутри (в строгом смысле, т. е. не на конце), содержит бесконечно много точек множества E. Конечное множество E (т. е. состоящее из конечного числа точек) не может иметь, по самому определению, никакой предельной точки. Согласно теореме Вейрштрасса всякое бесконечное ограниченное (т. е. лежащее на конечном отрезке) множество точек непременно допускает хотя бы одну предельную точку. Ограниченное множество точек E называется замкнутым, если оно содержит в себе все предельные к нему точки. Всякое ограниченное замкнутое множество точек E необходимо имеет самую первую (если идти по прямой в положительном направлении) и самую последнюю точку. Основной теоремой о замкнутых множествах является та, что общая часть любого множества замкнутых множеств есть всегда замкнутое множество. Множество всех предельных точек для данного множества E называется производным множеством от данного множества E и обозначается символом E'. Производное множество E' есть непременно замкнутое множество, каково бы ни было начальное данное множество E. Соединение $E + E'$ начального данного множества E и его производного множества E' есть всегда замкнутое множество. Следовательно, множество $E + E'$ имеет самую первую (иначе — начальную) и самую последнюю (иначе — конечную) точку при обходе прямой, на которой лежит E, в положительном направлении. Обе эти точки играют исключительно важную роль: самая первая точка множества $E + E'$ называется нижней границей данного множества E, а самая правая точка множества $E + E'$ называется верхней границей данного множества E.

Для того чтобы обосновать теорию пределов на почве теории множеств и дать ей другое понимание, вводится понятие упорядоченного множества: множество E, составленное из каких-либо элементов, называется упорядоченным, если о всяких двух элементах a и b можно сказать, какой из них предшествует и какой является последующим: если a предшествует b, это записывают в виде $a < b$. Чтобы совсем избавиться от идеи пространства или времени, исходят из следующего определения: множество E, составленное из каких-либо элементов, называется упорядоченным, если для его элементов определено соотношение, выражаемое знаком $<$ и обладающее следующими двумя свойствами: 1) если a и b суть два нетождественных элемента множества E, то из двух соотношений $a < b$ и $b < a$ обязательно верно одно и только одно, и 2) если a, b и c суть три нетождественных элемента множества E, то соотношения $a < b$ и $b < c$ делают обязательным соотношение $a < c$. Упорядоченное множество E называется последовательностью, если среди элементов множества E нет самого последнего, т. е. если для всякого элемента a множества E имеется в E такой элемент b, что $a < b$.

Затем вводятся стационарные понятия верхнего и нижнего пределов последовательности чисел E следующим образом. Пусть E есть последовательность каких-нибудь чисел или точек числовой прямой, что одно и то же. Возьмем какой-нибудь элемент a последовательности E. Пусть F_a

есть совокупность всех элементов последовательности E, следующих за элементом a, включая сюда и самый элемент a. Согласно предыдущему, множество F_a, определенное равенством $F_a = E_a + E'_a$, есть замкнутое. Таким образом, оказывается определенной последовательность замкнутых множеств F_a, из которых всякое последующее F_b содержится в предыдущем F_a, где $a < b$. При этих условиях доказывают, что общая часть всех замкнутых множеств F_a есть непустое множество, т. е. множество, действительно содержащее точки. Согласно предыдущему, F есть замкнутое множество. Пусть A есть нижняя граница множества F и B — верхняя граница этого множества. Числа A и B определяются, очевидно, единственно через данную числовую последовательность E и называются соответственно нижним и верхним пределами данной числовой последовательности E. Если числа A и B совпадают, $A = B$, тогда данная числовая последовательность E называется сходящейся, и в этом случае общая величина $A = B$ называется пределом последовательности E.

Как видно из сказанного, актуальная бесконечность и теория множеств позволяют в самом деле формально обойтись без понятия переменной величины, и предел числовой последовательности E определяется словесно вполне стационарно, без всякой идеи изменения, движения и приближения. Всякая переменная величина x, изменяясь во времени, определяет последовательной сменой своих численных значений стационарную числовую последовательность E, и предел a переменной величины x (если она его имеет) в точности равен пределу числовой последовательности E. Таким образом получают свое обоснование на почве теории множеств все основные понятия теории пределов, и сама основная (и единственная) теорема теории пределов становится только одной из многих теорем о числовых стационарных последовательностях E.

Точно таким же образом получают свое теоретико-множественное обоснование все понятия дифференциального исчисления. Пусть x_0 есть какая-нибудь точка, лежащая внутри отрезка (a, b), и E — какое-нибудь множество точек этого отрезка, содержащее точку x_0 и имеющее ее одной из своих предельных точек. Обозначим через E_+ и E_- совокупность всех точек множества E, лежащих соответственно вправо и влево от точек x_0, и предположим, что x_0 (не входящая ни в E_+, ни в E_-) есть предельная точка для каждого из двух этих множеств. В этих условиях всякая функция $f(x)$, заданная на сегменте (a, b), определяет две числовые последовательности E_+ и E_- следующим образом: E_+ происходит от величин $f(x)$ на множестве E_+, причем считается $f(x'') < f(x')$, если $x'' > x'$; E_- имеет такое же происхождение, только считается $f(x') < f(x'')$, если $x'' > x'$. Верхний и нижний пределы числовой последовательности E_+ называются правыми максимумом и минимумом функции $f(x)$ на множестве E в точке x_0; аналогично верхний и нижний пределы числовой последовательности E_- называются левыми максимумом и минимумом функции $f(x)$ на множестве E в точке x_0. Если правые максимум и минимум функции $f(x)$ в точке x_0 на множестве E равны $f(x_0)$, то функция $f(x)$ называется непрерывной справа на множестве E в точке x_0; аналогично, если левые максимум и минимум функции $f(x)$ в точке x_0 на множестве E равны $f(x_0)$, то $f(x)$ называется непрерывной слева на множестве E в точке x_0. Если $f(x)$ непрерывна одновременно и слева и справа на множестве E в точке x_0, она называется просто непрерывною на множестве E в точке x_0. Отношение

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

рассматриваемое на множестве E_+, при условии $\varphi(x'') < \varphi(x')$, если $x'' > x'$, определяет числовую последовательность, верхний и нижний пределы которой называются правыми, верхним и нижним, производными числами функции $f(x)$ на множестве E. Если оба эти производные числа равны между собой, то их общая величина называется правой производной функции $f(x)$ на множестве E в точке x_0. Аналогично определяется левая производная функции $f(x)$ на множестве E в точке x_0. Когда правая и левая производные функции $f(x)$ на множестве E в точке x_0 равны между собой, тогда их общая численная величина называется просто производною функции $f(x)$ на множестве E в точке x_0. Если эта производная конечна, функция $f(x)$ необходимо есть непрерывная на множестве E в точке x_0. Наконец, если множество E, которое было каким-угодно множеством точек на отрезке (a, b), лишь бы оно содержало точку x и имело ее предельной справа и слева, берется совпадающим с отрезком (a, b), то производная функции $f(x)$ на E в точке x_0 просто является обыкновенной производной в смысле Коши. Бесконечно малые и сопровождающие их числа E оказываются упраздненными совершенно. Таким образом, все определение дифференциального исчисления получает стационарность и вместе с нею чрезвычайную общность.

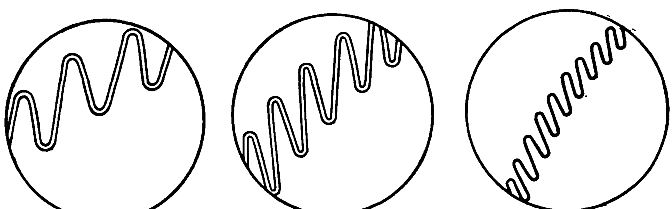
Чтобы оценить обоснование дифференциального исчисления на основе теории множеств, следует прежде всего назвать его очень плодотворным. Благодаря чрезвычайной общности теоретико-множественных определений и понятий дифференциального исчисления было получено очень много тонких фактов, не предполагавшихся и даже невозможных с прежней точки зрения. Так, беря за множество E различные множества точек, мы изучаем производную на различных множествах от непрерывных функций $f(x)$ и, сравнивая численные результаты при разных E, мы проникаем внутрь глубочайших структурных свойств непрерывных функций. Свойства эти являются как бы микроскопическим изучением поведения непрерывной функции в точке x_0 и вскрывают необычайное богатство различных соотношений новых данных, глубоко влияющих в конечном итоге на течение самой функции $f(x)$ на всем отрезке (a,b). Следует сказать, что изучение этих «микроструктур» (Данжуа) далеко еще нельзя считать законченным и по настоящее время, и сейчас еще продолжают появляться по этому предмету важные и интересные работы. Таким образом, рассматривание дифференциального исчисления с точки зрения теории множеств следует назвать очень острым, в отличие от точки зрения Коши, и давшим богатства микроструктуры неоценимой важности.

Но на основной вопрос, дает ли эта точка зрения действительно строгое построение дифференциального исчисления, в настоящий момент приходится отвечать незнанием. Дело в том, что обоснование вообще всей математики теорией множеств хотя и дало интересные и очень творческие результаты, но не привело к уверенности в строгости, так как сама общая теория множеств, развиваемая чисто логически, вошла в столкновение с парадоксами, остановившими ее бурное развитие и делающими невозможным в настоящее время утверждение, что анализ является «правильно» (т. е. логически строго) обоснованным. По современным взглядам намечается четыре течения для устранения из общей теории множеств парадоксов: логистический метод, интуиционизм, аксиоматизм и релятивизм. Но общего убеждения в том, что единственно правильным является такой-то исход, пока еще не наступило.

Как бы то ни было, само дифференциальное исчисление состоит собственно в системе формул и правил, а формулы и правила эти должны быть незыблемы при всяком обосновании дифференциального исчисления. Обоснование дифференциального исчисления собственно сводится к обоснованию математического континуума, а при всяких взглядах на континуум, например формула $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$, как и все другие, остается неизменною. Далее, каково бы в будущем ни было принято решение относительно обоснования дифференциального исчисления, разумеется, что накопленные знания по микроструктурам ни в коем случае не должны быть выброшены.

Существование производных. Вопрос этот, имевший когда-то, после принятия точки зрения Коши, большую остроту, в настоящее время утратил былую жгучесть. Дело в том, что точка зрения Коши, по природе близкая к точке зрения Ньютона, не ушла далеко от рассматривания производной как скорости движения. И так как мы, основываясь на привычном нам простейшем механическом движении материальных тел, склонны приписывать всякому движению определенную скорость, то общим убеждением долгое время после реформы Коши было, что всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет производную, кроме отдельных исключительных точек. Но вместе с тем было замечено, что все дававшиеся доказательства теоремы о существовании производной у всякой непрерывной функции [сводившейся, как стало ясным теперь, к предположению данной функции $f(x)$ функцией с ограниченным изменением, в каковом случае $f(x)$ действительно не имеет производной лишь в исключительном множестве меры нуль] неизменно страдали либо грубым заблуждением, либо тонким предположением некоторых частных гипотез.

Так было дело до 1871 г., когда Вейерштрасс, достаточно глубоко проведший аримфетизацию анализа, оказался в силах установить существование непрерывной функции, не имеющей нигде производной. Пример этот вызвал живейшее недоумение и споры, но пришлось уступить силе непререкаемого факта. К тому же дальнейшие поиски на этом пути привели к построению других примеров непрерывных функций без производных и непрерывных кривых без касательных, много более простых и геометрически более ясных (Хельге фон Кох, Бибербах). Сам Вейерштрасс дал свою функцию в виде абсолютно и равномерно сходящегося тригонометрического ряда $\sum a^n \cos(b^n \pi x)$, где $0 < a < 1$ и b есть целое нечетное число, большее единицы и такое, что ab превосходит $1 + \frac{3}{2}\pi$. Лишь в самое последнее время обнаружено, что пример Вейерштрасса не совсем удачен и что его непрерывная функция имеет производную, правда, равную $+\infty$ или $-\infty$, но на бесконечном всюду плотном (и даже всюду несчетном) множестве точек. Первый пример непрерывной функции, действительно не имеющей производной ни в какой точке, дан Безиковичем.



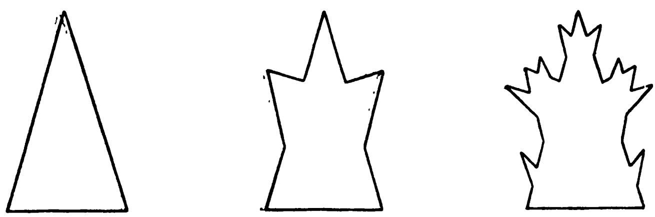
Фиг. 5

Но если ввести обобщение понятия обыкновенной производной, данное почти одновременно А. Я. Хинчиным и Данжуа, которые определяют обобщенную («асимптотическую», по А. Я. Хинчину, и «аппроксимативную», по Данжуа) производную от данной функции $f(x)$ в точке x_0, беря обыкновенную производную от $f(x)$ на множестве E, имеющем в точке x_0 точку плотности (что обеспечивает единственность численного результата, не зависящего, следовательно, от выбора множества E), то оказывается, что всякая, без исключения, непрерывная функция обладает в несчетном множестве точек во всяком интервале асимптотической односторонней производной (правой или левой), конечной или бесконечно большой определенного знака.

Чтобы иметь конкретный пример непрерывной функции без производной или, что то же самое, непрерывной кривой без касательной, проще всего поступить так: возьмем на плоскости XOY очень тонкий и очень извилистый двухмерный шнур, пересекающийся всякой параллелью оси OY только по одному разу, и назовем его «шнуром первого порядка» (фиг. 5).

Впишем в этот шнур 1-го порядка другой шнур, еще более тонкий и еще более извилистый, и назовем его «шнуром второго порядка». В этот последний точно таким же образом впишем новый шнур, еще более тонкий и извилистый, и назовем его «шнуром третьего порядка» и т. д. Повторяя этот прием бесконечное число раз, мы получим бесконечную последовательность шнуров, все более и более тонких и все более и более извилистых, таких, что извилины одного шнура чрезвычайно уплотнены в каждой извилине предыдущего шнура. В этом случае легко показать, что при надлежащем подборе тонкости и извилистости этих шнуров точки плоскости, заключенные во всех этих шнурах, образуют непрерывную кривую, нигде не имеющую касательной, наклонной к оси OX.

Это построение можно интерпретировать следующим образом. Представляют себе, что имеют бесконечное множество микроскопов M_1, M_2,



Фиг. 6

$M_3, \ldots$, из которых каждый в 100 раз сильнее предыдущего. Тогда, взяв первый микроскоп M_1, мы увидим нашу кривую несколько размытой, в виде первого шнура. Чтобы видеть ее отчетливее, мы берем второй микроскоп M_2 и убеждаемся в том, что то, что мы считали за легкую расплывчатость, оказывается на деле очень густыми витками, напоминающими первый шнур и в свою очередь слегка размытыми. Взяв еще более сильный микроскоп M_3, мы усматриваем, что то, что мы считали за кривую, оказывается лишь вторым шнуром, наполненным новыми витками, и так далее. Ясно, что всякая прямая линия, проходящая через точку кривой и не параллельная оси OX, должна непременно пересечь бесчисленное количество раз нашу кривую, потому что эта кривая тянется вдоль витков каждого шнура.

Хельге фон Кох указал иной способ построения непрерывной кривой без касательной. Возьмем равнобедренный треугольник в качестве первого шага процесса. Боковые его стороны разделим на три равные части и построим на средних частях по треугольнику; это составит второй шаг процесса (фиг. 6).

Далее, разделив каждую сторону полученного многоугольника на три равные части, на каждой средней из них опять строим треугольник, что дает третий шаг процесса, и так далее. Когда мы совершим бесконечное множество шагов, мы в пределе получим непрерывную линию, не имеющую нигде наклонной касательной. Этот способ вполне строгий, но может ввести в заблуждение. Дело в том, что кривая выглядит колючей, и действительно на ней имеется бесконечно много вершин. Но множество их только счетно, и вовсе не им обязано отсутствием касательной, а изгибам кривой, как и в предыдущем случае.

Дифференциальное исчисление и естествознание. Роль дифференциального исчисления в развитии геометрии была уже отчасти освещена выше, в историческом обзоре. Не менее важную роль играет дифференциальное исчисление и в математической обработке проблем естествознания в широком смысле слова (т. е. включая сюда и вопросы техники). Причиной этого является главным образом то обстоятельство, что только понятие о производной дает возможность строго определить важнейшее понятие скорости. Если переменная величина y изменяется в зависимости от другой переменной величины x, то встает вопрос об относительной скорости изменения величины y по отношению к величине x. Если зависимость y от x равномерна, т. е. изменение Δy величины y пропорционально изменению Δx величины x, то скорость v изменения величины y по отношению к величине x естественно определяется как отношение соответствующих изменений: $v = \Delta y/\Delta x$. Это — величина постоянная, она не зависит от выбранных значений x и y, а также от приращений Δy и Δx. Так, само собой оказывается ясным понятие скорости прямолинейного равномерного движения (x — время, y — пройденный путь). Другой пример: работа постоянной силы, приложенной к движущемуся телу, растет пропорционально пройденному пути (x — путь, y — работа). Скорость изменения y по отношению к x численно равна работе на единице пути и, очевидно, равна действующей силе. Понятие относительной скорости изменения двух величин существенно осложняется в случае зависимости неравномерной (т. е. в случае, когда приращения величин x и y связаны законом, более сложным, чем прямая пропорциональность). Тогда отношение $\Delta y/\Delta x$ будет различным для различных x, y, Δx и Δy; оно дает среднюю скорость изменения величины y (относительно величины x) на участке от x до $x + \Delta x$. Если Δx мало, то эта средняя скорость на участке от x до $x + \Delta x$ приближенно характеризует собой «мгновенную» скорость «в момент x», хотя, конечно, и несколько отличается от нее, так как на участке от x до $x + \Delta x$ скорость изменения величины y успевает все же измениться. Чем меньше Δx, тем ближе, очевидно, средняя скорость на участке от x до $x + \Delta x$ к «мгновенной» скорости в начале этого участка («в момент x»). Поэтому за скорость изменения величины y относительно величины x (при некотором определенном значении этой последней) принимают предел отношения $\Delta y/\Delta x$ при условии, что Δx стремится к нулю, т. е. производную от функции, выражающей зависимость величины y от x.

Качественная природа скорости или производной (физическая размерность) определяется в зависимости от природы величин y и x; так, если y — длина, x — время, то y' есть скорость движения; если y — работа, x — длина, то y' есть сила, и т. д. Следует иметь в виду, что численное значение производной существенным образом зависит от единиц, которыми измеряются величины x и y.

Производные и дифференциалы высших порядков. Производная $y' = F'(x)$ от функции $y = F(x)$ есть функция от x, которую можно снова дифференцировать; производная от производной будет по отношению к основной функции y ее второй производной (или производной второго порядка);

$$y'' = f''(x) = \frac{dy'}{dx}.$$

Подобным же образом можно определить производные третьего, четвертого порядков и так далее. Точно так же дифференциал dy функции $y = f(x)$ есть функция от x (наряду с этим он зависит от Δx; эта зависимость нас в данный момент не занимает). Поэтому имеет смысл говорить о дифференциале от дифференциала или о втором дифференциале d^2y функции $y = f(x)$. Очевидно,

$$d^2y = d(dy) = d[f'(x)\,dx] = [f'(x)\,dx]'\,dx = f''(x)\,(dx)^2 = y''\,(dx)^2,$$

откуда

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2},$$

т. е. вторая производная равна второму дифференциалу функции, деленному на квадрат первого дифференциала независимой переменной. Подобным же образом устанавливаются формулы

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \quad y^{\mathrm{IV}} = \frac{d^4y}{dx^4},$$

и вообще

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Из производных высших порядков только вторая имеет первостепенное значение в геометрии, механике и технике. Первая производная характеризует собой направление кривой в соседстве с данной точкой (определяющееся направлением касательной). Так как вторая производная дает скорость изменения первой производной, то величина ее, очевидно, связана с тем, насколько быстро в данном месте изменяется направление кривой, т. е. насколько кривая в данном месте искривлена. Поэтому от величины второй производной существенно зависит кривизна кривой; вследствие этого со второй производной приходится иметь дело во всех технических расчетах, связанных с кривизной, например при исследовании изгиба балок.

Механически вторая производная, как скорость изменения скорости, интерпретируется как ускорение движения. Так как, согласно закону Ньютона, сила, вызывающая движение, равна произведению массы движущегося тела на его ускорение, то во всех динамических задачах, где требуется рассчитать движение, которое произойдет под действием данных сил, непременно участвуют вторые производные.

Дифференцирование функций нескольких переменных. Если $u = f(x, y)$ есть функция от двух независимых переменных x и y, то мы можем, зафиксировав для y какое-нибудь постоянное значение (и сделав таким образом u функцией одной переменной x), дифференцировать u по x. Полученная производная называется частной производной от u по x и обозначается так: $\partial u/\partial x$ или $f'_x(x, y)$. Аналогично определяется частная производная u по y: $\partial u/\partial y$ или $f'_y(x, y)$; $\partial u / \partial x$ и $\partial u / \partial y$, очевидно, подобно самой величине u, зависят от обеих переменных x и y. Если, считая y постоянной, дважды продифференцировать u по x, то мы получим вторую производную $\partial^2 u / \partial x^2$ или $f''_{xx}(x, y)$. Аналогично определяется $\partial^2 u/\partial y^2$ или $f''_{yy}(x, y)$. Но мы можем также найти производную по y от $\partial u/\partial x$; эту производную мы обозначим через $\partial^2 u / \partial x \partial y$, или $f''_{xy}(x, y)$; аналогично определится $\partial^2 u / \partial y \partial x$ или $f''_{yx}(x, y)$. Теория показывает, что две последние производные совпадают между собой, так что функция u имеет три различных частных производных второго порядка. При повышении порядка число производных, очевидно, еще возрастает; при этом в качестве общего правила производные, отличающиеся друг от друга только порядком дифференцирований, совпадают между собой.

Предметное значение частной производной $\partial u / \partial x$ очевидно: она представляет собой скорость, с которой изменяется величина u по отношению к величине x, при условии, что величина y сохраняет постоянное значение. В естествознании и технике, где каждая встречающаяся величина, как правило, зависит в своих изменениях от целого ряда других величин, с частными производными постоянно приходится иметь дело. Пример:

$$u = 4xy^3 - 5x^2y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4y^3 - 10\,xy; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 12\,xy^2 - 5x^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -10\,y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = 12\,y^2 - 10\,x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 24\,xy.$$

Полный дифференциал du функции $u = f(x, y)$ определяется формулой:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy,$$

где dx и dy — приращения независимых переменных x и y. Его роль в теории функций нескольких переменных та же, что роль обычного дифференциала для функций одной переменной: полный дифференциал есть виртуальное приращение функции u; при малых dx и dy он почти не отличается от истинного приращения Δu и практически может заменять его. Так как, с другой стороны, вычислить полный дифференциал значительно легче (в большинстве случаев), чем приращение, то понятна его роль в приближенных вычислениях.

П о л н а я п р о и з в о д н а я. Если в функции $u = f(x, y)$ мы станем считать x и y функциями некоторой новой переменной t, т. е. $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то, очевидно, и u станет функцией от t; во многих случаях важно иметь выражение $\frac{du}{dt}$ через производные: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$; формула эта, называемая формулой полной производной, имеет вид:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Это — общая формула, содержащая в виде частных случаев многие из приведенных выше правил.

ЛИТЕРАТУРА

М. Я. Выгодский. Основы исчисления бесконечно-малых, 2-е изд. М.—Л., 1932.

В. Грэнвилль и Н. Лузин. Элементы дифференциального и интегрального исчислений, ч. 1—2, 10-е изд., М.—Л., 1930—1931.

Г. Ковалевский. Основы дифференциального и интегрального исчислений. Одесса, 1910.

Э. Чезаро. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно-малых, ч. 1—2. Одесса, 1913—1914.

Ш. Ж. де-ла Валле Пуссен. Курс анализа бесконечно-малых, т. I, II, 1922—1933.

F. A. Cajori. History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse. London, 1920.

E. Goursat. Cours d'Analyse mathématique, t. I—III, Paris, 1923—1925 (есть русский перевод).

E. Picard. Traité d'Analyse, t. I—III, 2-e ed. Paris, 1901—1908.

ФУНКЦИЯ *

Ф у н к ц и я обозначает в самом общем понимании связь между переменными величинами. Если величина x может принимать произвольные значения и указано какое-либо правило, посредством которого приводятся в соответствие с этими значениями определенные значения другой величины y, то мы говорим, что y является функцией от x, и записываем это символически так: $y=f(x)$, или $y=F(x)$, или $y=\varphi(x)$ и т. д. Величину x называют независимой переменной, или аргументом, y — зависимой переменной. Однако такое определение функции слишком расплывчато и нуждается в следующих уточнениях: 1) относительно изменения независимой переменной x: как того интервала ab, внутри которого она может изменяться ($a < x < b$), так и того, принимает ли она все числовые значения от a до b (непрерывная независимая переменная), или лишь некоторые, например лишь целочисленные; 2) относительно самого характера правила, указывающего, каким образом значению x соответствует значение y; 3) относительно природы аргумента x, являющегося действительным или комплексным переменным, и т. д.

Понятие функции — одно из самых основных понятий современной математики. Оно не сложилось сразу, но, возникнув более двухсот лет назад в знаменитом споре о звучащей струне, подверглось глубоким изменениям уже в начавшейся тогда энергичной полемике. С тех пор идут непрестанное углубление и эволюция этого понятия, которые продолжаются до настоящего времени. Поэтому ни одно отдельное формальное определение не может охватить всего содержания этого понятия, усвоить которое возможно, лишь проследив основные линии его развития, теснейшим образом связанного с развитием естествознания, в частности математической физики.

Главные колебания массивной системы

В о з н и к н о в е н и е з а д а ч и. Представим себе какую-нибудь массивную систему (например, железный мост), находящуюся в положении равновесия. Если эта система будет слегка выведена из него, то, стремясь возвратиться к нему, она будет совершать колебания. Колебание системы называется *главным*, если все точки системы одновременно проходят через

---

* БСЭ, 1-е изд., т. 59, 1935, стр. 314, 334.

положение своего равновесия. Еще в XVII в. рассмотрение движения системы с одной степенью свободы было в существенном закончено, и в XVIII в. началось изучение движений систем со многими степенями свободы. Первые шаги в этом направлении были сделаны знаменитым Иваном Бернулли (1727 г.). Желая изучить движение звучащей струны, он мысленно помещает на горизонтальную невесомую нить, натянутую при помощи гирьки, на равных расстояниях n равных грузиков. Он дает периоды главных колебаний для случаев, когда число грузиков меньше восьми, и указывает тот важный принцип, по которому сила, действующая на материальную частицу при главном колебании, всегда пропорциональна расстоянию этой частицы от ее положения равновесия. Из этого принципа он тотчас же устанавливает, что отношение $\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{y_k}$ должно быть независящим от k; здесь y_k обозначает расстояние k-го грузика от упомянутой невесомой нити, находящейся в положении равновесия; при этом следует тотчас же указать, что амплитуда колеблющихся частиц предполагается всегда бесконечно малой. Этот способ дал ему уравнение в конечных разностях для y_k. Входящие в эти разностные уравнения постоянные определяются из алгебраического уравнения n-й степени, и каждому из его корней отвечает определенное главное колебание всей системы. Но он не мог исследовать действительность этих корней и отсутствие у них кратности.

Несколько позже (1732—1736) сын Ивана Бернулли Даниил Бернулли и его друг Эйлер занялись аналогичной задачей определения главных колебаний вертикальной невесомой нити, прикрепленной вверху, снабженной опять n грузиками и свободно раскачивающейся на ветру. Первый, замечательный экспериментатор, дал сперва опытное решение для $n = 2$ и $n = 3$, а затем доказал верность его и теоретически. Второй, не менее замечательный математик, трактовал общий случай и доказал, что при главном колебании стороны колеблющегося многоугольника пересекают вертикальное положение нити в постоянных точках. Оба они затем начали исследовать и другие системы, например пластинку, погруженную в жидкость и раскачивающуюся там,раскачивание тяжелой палки, подвешенной за один конец, и, наконец, маятник.

Во всех этих задачах Бернулли и Эйлер ограничивались только главными колебаниями. Когда сила зависела лишь от места материальной частицы, главные колебания были гармоническими, т. е. такими, в которых отклонение k-й частицы давалось формулой $y_k = f_k \cos \alpha t$, где f_k для каждой частицы было свое собственное; длительность же колебания для всех частиц оказывалась одной и той же: $T = 2\pi/\alpha$. Совершенно явно Д. Бернулли формулировал в общем виде существование главных колебаний, но он не мог исследовать действительности и различия соответствующих корней вспомогательного уравнения. Крайне важным является то фундаментальное обстоятельство, что начало сложения колебаний, т. е. получение произвольного движения системы из одних только главных колебаний, тогда еще ускользало от них обоих. Одни лишь теоретики музыки (Рамо, 1726 г.) уже давно указывали, что, кроме основного тона музыкального инструмента, имеются еще и обертоны. Важно подчеркнуть, что сосредоточение внимания на основном колебании было основано на следующей ошибке: еще с исследований знаменитого Тэйлора (1713 г.) среди математиков укоренилось заблуждение, от которого не был свободен сначала даже Д. Бернулли, будто бы всякое сложное колебание очень быстро устремляется к status uniformis, именно к основному колебанию. Физически это до известной степени верно, так как трение, сопротивление воздуха и т. п. заставляют энергию рассеиваться, выделяя основное слагающее. Но все дело было в том, что это заключение молчаливо переносили на математический аппарат, т. е. на решение дифференциальных уравнений, в которых отнюдь не содержалось этого побочного явления.

Предельный переход от дискретных систем к непрерывным. От случая конечного числа материальных частиц Д. Бернулли и Эйлер не задумываясь перешли к случаю непрерывных систем тем, что они просто представляли эти системы составленными из очень большого или бесконечно большого числа частиц. Смелость математиков XVIII в. общеизвестна: никто из них, кроме Вариньона, Николая Бернулли и Д'Аламбера, не понимал трудностей перехода к пределу. Для них было самоочевидно, что предложение, имеющее силу для всякого конечного числа n, должно иметь смысл и силу и для n бесконечно возрастающего. Они плохо различали «очень большое» и «бесконечно большое», результаты, имеющие ограниченную точность, и результаты, точность которых можно увеличивать по произволу. Они употребляли разность вместо дифференциала, сумму вместо интеграла, не делая между ними различия. Обычно перенос заключения от конечного на бесконечное делался двояко: или в уже готовых формулах или еще в самом начале. Очень важным примером первого является работа Д. Бернулли о качании тяжелой однородной гибкой нити, подвешенной вверху. Сначала он берет невесомую нить, отягощенную n грузиками, решает эту задачу и в ответе, полагая n бесконечно большим, получает решение о колебаниях тяжелой гибкой нити в виде $y = \cos\left(\frac{t}{T}\right) f(x)$, где x — абсцисса точки нити, y — ее отклонение от положения равновесия и где $f(x) = 1 - \frac{x}{a} + \frac{1}{2!^2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{1}{3!^2}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \ldots$. Здесь a определяется так, чтобы было $f(l) = 0$, где l — длина тяжелой нити.

Из ранее найденного результата для случая грузиков он заключает, что уравнение $f(x) = 0$ имеет бесконечно много корней: a_0, a_1, a_2, a_3... и что корень a_k соответствует такому главному колебанию, при котором тяжелая нить, кроме точки подвеса, имеет еще k неподвижных точек.

Прямое определение главных колебаний дифференциальным уравнением. Важнейшим примером перехода к пределу уже в самом начале исследования является замена системы

n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2y_k}{dt^2} = f(y_{k+1}, y_k, y_{k-1}) \tag{1}$$

одним дифференциальным уравнением с частными производными:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right). \tag{2}$$

Это делают, полагая $Y_k = Y_{k-1} + \Delta Y_{k-1}$ и $Y_{k+1} = Y_{k-1} + 2\Delta Y_{k-1} + \Delta Y_{k-1}$ и заменяя разности дифференциалами. При этом способе на место системы алгебраических уравнений, связывающих начальные значения Y при главном колебании, и соответственно с этим на место одного разностного уравнения, объединяющего все эти уравнения, приходит одно обыкновенное дифференциальное уравнение для начальной фигуры. Притом получают это уравнение, также принимая $y = Y\cos\alpha t$ в уравнении (2) для отыскания главного колебания и требуя, чтобы Y зависело только от x (а не от t). Наконец, нужно принять во внимание те исключительные условия, которые имеются для начальной и конечной точек системы, и выразить их при помощи особых уравнений (граничные условия).

Первым провел исследование звучащей струны этим путем Тэйлор (1713 г.). Он доказал, что фигурой колебания струны будет кривая, радиусы кривизны которой относятся, как ординаты. Иначе говоря, он получил уравнение $y'' = -n^2y$, давшее ему после двух интеграций количество, пропорциональное синусу аргумента, пропорционального абсциссе. Тэйлор не написал своего решения explicite, потому что в ту эпоху не был введен значок sin для синуса. По этой причине он не мог поставить вопроса о том, единственным ли способом подбираются постоянные интегрирования, чтобы удовлетворить всем условиям. Он впадает здесь в свою знаменитую ошибку, думая, что главное колебание только одно и что всякое другое движение звучащей струны стремится перейти в найденное им основное колебание, даже когда начальное движение было произвольным. Вслед за ним Герман и Д. Бернулли повторяют его ошибку; получая своим способом решение Тэйлора, Д. Бернулли говорит о том, что фигура звучащей струны есть socya trochoidis, потому что тогда названия синусоиды еще не было. Оба указанных автора (1716 г. и 1728 г.) не подозревают о возможности иных движений звучащей струны. Первые предчувствия о существовании многих других главных колебаний зародились у Д. Бернулли, когда он начал трактовать проблему о колебаниях свободно висящей тяжелой гибкой нити (1732 г. и 1739 г.), в которой он видит аналог звучащей струны. Он тут же пробует делать физические опыты со звучащей струной, наблюдая, что в узловых точках бумажки, надетые на струну, не сбрасываются ею. Эйлер же в эту эпоху (1734 г.) все еще говорит лишь об основном тоне. Только в 1744 г. Эйлер, трактуя проблему главных колебаний упругой пластинки, закрепленной на одном конце, показывает, что вспомогательное уравнение, корням которого соответствуют главные колебания, имеет бесконечно много корней, которые он тут же старается аппроксимировать.

Спор о звучащей струне

Работа Д'Аламбера. Хотя у Д. Бернулли и Эйлера были намеки на множественность главных колебаний звучащей струны, однако Д'Аламбер первый, в своей знаменитой работе 1747 г., дал почти исчерпывающее решение этого вопроса. Он прямо заявляет, что целью его работы является доказательство того, что проблема формы звучащей струны имеет бесконечно много других решений, кроме «подруги циклоиды». Метод Д'Аламбера состоит в следующем: отправляясь от дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

с помощью тождеств

$$d\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}dt,$$

$$d\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial t}dx + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dt,$$

он получает как следствия:

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right)(dt + dx),$$

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right)(dt - dx),$$

откуда тотчас же заключает, что $\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x}$ зависит только от $t + x$, а $\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial x}$ зависит только от $t - x$, иначе говоря

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} = \Phi(t + x) \text{ и } \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial x} = \Delta(t - x);$$

следовательно,

$$dy = \frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial y}{\partial x}dx = \frac{1}{2}\Phi(t + x)\, d(t + x) + \frac{1}{2}\Delta(t - x)\, d(t - x).$$

Отсюда Д'Аламбер, интегрируя, получает окончательное решение

$$y = \psi(t + x) + \delta(t - x),$$

которое он не колеблясь называет «общим решением». В том случае, когда струна, закрепленная в точках $x = 0$ и $x = l$ оси абсцисс OX, проходит в момент времени $t = 0$ через положение равновесия (ось OX), решение это принимает вид:

$$y = \psi(x + t) - \psi(x - t),$$

где ψ есть периодическая четная функция с периодом $2l$; в том же случае, когда струна в начальный момент времени $t=0$ имеет вид $y = \Sigma(x)$, а скорости ее частиц в этот момент времени даются формулой $\frac{dy}{dt} = \sigma(t)$, решение принимает вид:

$$y = \psi(t+x) - \psi(t-x),$$

где периодическая с периодом $2l$ функция ψ определяется из наложенных дополнительных условий:

$$\psi(x) - \psi(-x) = \sum(x) \text{ и } \psi(+x) + \psi(-x) = \int \sigma(x)\, dx.$$

Это в сущности и заканчивало работу совершенно.

Решение Эйлера. Вслед за Д'Аламбером Эйлер (1748 г.) берется за ту же самую проблему. Он замечает, что его решение несущественно отличается от решения Д'Аламбера, но подчеркивает, что дает действительно общее решение. Эйлер предполагает, что начальная скорость (при $t=0$) частиц струны равна нулю и что начальная фигура струны (при $t=0$) есть $y = f(x)$. В этих условиях решение Эйлера следующее: $y = \frac{1}{2}f(x+t) + \frac{1}{2}f(x-t)$. Эйлер первый отмечает, что продолжительность колебания струны не зависит от начальной фигуры, если только она неделима на тождественные аликвотные части. Может на первый взгляд показаться, что решения Д'Аламбера и Эйлера тождественны, отличаясь лишь во второстепенных пунктах. Однако это было совсем не так: хотя оба и употребляют ту же терминологию, но под одинаковыми словами они разумеют глубоко различные вещи. В одном они сходятся: под уравнением они разумеют равенство между двумя аналитическими выражениями (не вдаваясь, впрочем, в обсуждение того, что такое аналитическое выражение). И оба они считают, что если два аналитических выражения совпадают численно во всех точках какого-нибудь отрезка, то они обязаны совпадать всюду. Но Д'Аламбер и Эйлер глубочайше разнятся между собой в понимании самого смысла слова «функция»: для Д'Аламбера это было произвольное аналитическое выражение, для Эйлера это была произвольно начертанная кривая.

Полемика между Д'Аламбером и Эйлером. Полностью эта противоположность взглядов выявилась в энергичной полемике, заостривщей идеи и облекшей их в точные слова. Д'Аламбер первый начал искать противоречия в понимании Эйлером слова «функция». Он пишет: «нельзя мыслить более общего аналитического выражения для количества y, как только предполагая его функцией от x и t; но при этом предположении проблема звучащей струны имеет решение лишь тогда, когда различные фигуры этой струны содержатся в одном и том же уравнении». Д'Аламбер заключает, что найденное им самим и Эйлером решение только тогда имеет смысл, когда заданная функция $f(x)$ есть периодическая функция. Эйлер возражает на это вопросом: «Если найденное решение в тех исключительных случаях, когда фигура струны не может быть охвачена одним уравнением, негодно, то что тогда называть решением?» Он настаивает на том, что «данная им геометрическая конструкция всегда справедлива, какова бы ни была начальная фигура струны», «что различные части начальной кривой вовсе не связаны уравнением, а просто соединены их описанием» и что «знание геометрической линии совершенно достаточно для знания движения, без того, чтобы нужно было прибегнуть к вычислениям».

Реплика Д'Аламбера не заставила ожидать себя. Настаивая на своем понимании решения, он отмечает тот часто ускользающий факт, что уже самое наличие дифференциального уравнения $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ требует, чтобы отношение $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ имело определенную (конечную) величину и, значит, чтобы кривая обладала определенной кривизной в этой точке. В особенности это относится к концам струны, где в силу $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ радиус кривизны должен быть бесконечно велик. Наличие же всяких точек искусственных соединений разнородных кривых, вроде угловых точек, делает в них силу неопределенной и, значит, движение невозможным: «сама природа здесь останавливает вычисления». Что же касается до того, как на деле будет двигаться такая составная струна,— «оставим физике позаботиться о себе самой».

Эйлер, уклоняясь от продолжения полемики, ограничивается указанием на то, что возможно создать теорию дифференциальных уравнений, содержащих такие «неправильные» или «смешанные» функции. На возражения Д'Аламбера он замечает, что его решение, употребляющее такие «неправильные» функции, подтверждает, например, подмеченный Д. Бернулли факт распространения вдоль струны сотрясений. Д'Аламбер, настаивая на своей точке зрения, повторяет, что наличие на струне угловой точки делает решение невозможным.

Идеи Д. Бернулли. Совершенно иначе подошел к проблеме Д. Бернулли. Он уже имел некоторый опыт в изучении вопросов акустики и начал понимать, что звучащая струна имеет бесчисленное множество главных колебаний. Из исследования систем дискретных точек он вывел заключение, что наиболее общее движение струны можно получить сложением главных колебаний.

Идеи Д. Бернулли созрели в 1753 г., и заключение, к которому он пришел, было то, что уравнение

$$y = \alpha \sin x \cos t + \beta \sin 2x \cos 2t + \gamma \sin 3x \cos 3t + \dots$$

охватывает как решение Д'Аламбера, так и решение Эйлера. Таким образом, Д. Бернулли открыл важнейший принцип математической физики, и ему принадлежит честь не только его формулировки, но и ясного понимания далеко идущих последствий.

Но если Д. Бернулли понимал значение и смысл открытого им принципа сложения колебаний, то математически он не мог его обосновать, чем вызвал живейшие возражения как Д'Аламбера, так и Эйлера. Сначала Эйлер указал, что Д. Бернулли сам не замечает того совершенно неприемлемого следствия, которое содержится в его идеях и согласно которому совершенно произвольная функция переменного x изобразима рядом синусов кратных дуг. По мнению Эйлера, тогда функция была бы нечетной и периодической. Мы видим, что Эйлер снова неявно опирается на тот принцип, в силу которого два аналитических выражения, численно совпадающих в каком-нибудь отрезке, должны совпадать всюду.

Д. Бернулли ответил на это указанием, что его формула содержит бесчисленное множество неопределенных коэффициентов, которыми всегда можно распорядиться таким образом, чтобы заставить его кривую пройти через сколько угодно точек заданной кривой и тем самым получить сколько угодно сильное приближение. Относительно возможности упущения из этого процесса той или иной отдельной точки Д. Бернулли ссылается на возражения, которые Д'Аламбер делал раньше Эйлеру.

Эйлер на это ответил, что подобрать коэффициенты желаемым для Д. Бернулли образом весьма трудно, если не невозможно. С своей стороны Д'Аламбер заявил, что он вполне согласен с Эйлером в его возражениях Д. Бернулли и что он идет дальше, так как думает, что не всякая (аналитическая) периодическая функция может быть изображена рядом синусов, что всякая функция, изобразимая рядом синусов, должна обладать непрерывной кривизной и что совпадение обеих кривых в бесконечно многих точках еще не делает их тождественными. Из характера спора между Д'Аламбером и Д. Бернулли легко усмотреть, что первый был по современной терминологии «арифметизатором» математического анализа, второй же был физиком и смотрел на вещи с этой точки зрения.

В ы с т у п л е н и е Л а г р а н ж а. В то время как знаменитейшие математики спорили о математических принципах, выдвинутых проблемой звучащей струны, на сцене появляется не известный никому молодой человек, Лагранж, сразу обративший на себя внимание своими «ловкими» вычислениями (1759 г.). Лагранж внимательнейшим образом изучил состояние проблемы звучащей струны и занял определенную позицию в этом споре: он всецело присоединился к Эйлеру и стал в оппозицию к Д'Аламберу и Д. Бернулли. Желая доказать правоту Эйлера, Лагранж ставит на первый план проблему интерполирования. Беря одну из «неправильных» функций Эйлера, т. е. беря просто графически данную кривую, вообще состоящую из кусков совершенно различных линий, Лагранж делит ось абсцисс на малые равные отрезки. Затем, проводя в точках деления перпендикуляры и отмечая таким образом последовательность точек на графической кривой, Лагранж ищет интерполяционную кривую, проходящую через отмеченные точки. Интерполяцию Лагранж предпринимает линейную тригонометрическую с ограниченным числом членов, откуда следовало, что его интерполирующие кривые были «законами» и для Д'Аламбера, так как были даны простыми аналитическими выражениями.

Разрешив таким образом интерполяционную задачу, Лагранж ищет решение проблемы звучащей струны для интерполяционной кривой. Совершив, наконец, несколько переходов к пределу, Лагранж получает в окончательном результате формулы Эйлера для фигуры звучащей струны. Интересно, что в руках Лагранжа было величайшее открытие, мимо которого он прошел, его не заметив: делая подготовку к окончательному выводу формул Эйлера, Лагранж по дороге получает тригонометрические ряды Фурье. Следовало лишь сделать перестановку пределов, и открытие закона коэффициентов Фурье было бы сделано, а вместе с ним были бы окончены и все дебаты. Но мысль Лагранжа устремлялась по другому пути, и он, почти касаясь открытия, так мало сознавал это, что бросил по адресу Д. Бернулли фразу: «Досадно, что столь остроумная теория несостоятельна», хотя именно идеи Д. Бернулли, перешедшие к Фурье, собственно и решили спор.

В следующей работе (1760 г.) Лагранж снова берется за проблему струны, идя на этот раз уже методом Д'Аламбера, и приходит к формулам этого последнего, как ему казалось, «не употребив никакой непрерывности» («непрерывности» в смысле Эйлера, т. е. на современном языке «аналитической продолжаемости»). На самом деле это было не совсем верно, ибо, как известно, Лагранж глубоко верил в то, что всякая непрерывная (в современном смысле) функция имеет все производные и даже разложима в ряд Тэйлора, за исключением может быть отдельных точек: поэтому было в высшей степени трудно проследить, где в рассуждения Лагранжа входит и где не входит эйлеровская непрерывность.

Критики Лагранжа, не входя в принципиальные стороны его исследования и признавая его выкладки в целом «исключительно ловкими», возражали лишь против отдельных пунктов. Прежде всего Д'Аламбер обрушился на многочисленные у Лагранжа переходы к пределу: тонкий ум Д'Аламбера вполне прозревал связанные с ними трудности. Затем Д'Аламбер возражает против употребления расходящихся рядов. Лагранж, отвечая ему, просто указывает на то, что «ни один человек, заменив ряд $1+x+x^2+x^3\ldots$ выражением $\frac{1}{1-x}$, еще не совершил ошибки». Далее Лагранж, защищаясь от возражений Д'Аламбера (сделанных этим последним и Эйлеру) о принудительном существовании в точках звучащей струны радиусов кривизны, указывает, что «природа не может остановить выкладок, так как физически угловых точек у струны нет, а всегда есть некая закругленность, вызванная жесткостью струны». В дальнейшей переписке Д'Аламбер принуждает Лагранжа согласиться с тем, что решение последнего неявно предполагает наличие и конечность всех производных. А так как и Д'Аламбер и Лагранж разделяли господствовавшее в то время убеждение в том, что наличие всех производных делает функцию разложимой в ряд Тэйлора, то Лагранж был вынужден согласиться с тем, что он молчаливо ввел эйлерову непрерывность, иначе говоря — изображение функции уравнениями, на чем всегда и настаивал Д'Аламбер.

Лагранж, впрочем, сделал еще одну попытку подкрепить свои соображения, истинность которых он весьма определенно чувствовал. В новом изложении он проводит кривую, являющуюся решением задачи о струне и составленную из m синусоид, через определенное число точек. Существенно, что точки эти теперь уже не лежат на самой заданной кривой, но расположены вблизи нее. Эту проведенную кривую Лагранж назвал «женератриссой». Он замечает, что когда m очень велико, отклонения женератриссы от начальной формы струны очень малы, и тогда можно эту начальную фигуру рассматривать как кусок женератриссы. Он ставит вопрос: не предполагает ли это уже, что начальная фигура струны составлена из синусоид? И отвечает: если дело идет о «геометрическом» тождестве, такое предположение неизбежно; но во всех остальных случаях начальная кривая является как бы родом асимптоты, к которой женератрисса неограниченно приближается, никогда однако не делаясь тождественной с ней. А из коэффициентов своей интерполяционной формулы Лагранж тут же выводит заключение, что пренебрегать отклонением женератриссы можно лишь тогда, когда начальная фигура имеет непрерывные производимые всех порядков; это свойство должно сохраняться во все время движения струны. Только в этих условиях движение струны возможно.

Но Лагранж не показывает читателю, что это утверждение есть полный отказ от защиты точки зрения Эйлера (что было его первоначальной целью) и составляет возврат к Д'Аламберу. Этот же последний упорно держался своих взглядов, настаивая на незаконности употребления расходящихся рядов. Достойно внимания, что он цитирует функцию $\sqrt[3]{\sin x}$ как пример того, что всюду конечная функция не разложима в ряд Тэйлора. От его острого взора не ускользает, что именно этот пример направляется против него же самого: с одной стороны, здесь налицо «уравнение» и, значит, такая форма струны допускает решение; с другой,— здесь конечности всех производных уже не имеется. Чтобы помочь делу, Д'Аламбер говорит, что бесконечно большие значения производных допустимы, лишь бы только не было скачков. Дебаты эти длились еще 20 лет, не получив окончательного решения.

Открытие Фурье

Понятие функции вовсе не является в настоящий момент окончательно выкристаллизовавшимся и беспрекословно установленным, как это казалось одно время в конце XIX в.: без преувеличения можно сказать, что в настоящий момент понятие функции подверглось дальнейшей эволюции и что спор о звучащей струне все еще длится, только, разумеется, уже совсем в другой научной обстановке, другими лицами и в другой терминологии.

Возвращаясь к спору XVIII в. и рассматривая его уже с современной точки зрения, следует прежде всего отметить чрезвычайную проницательность и интуитивную мощь споривших мыслителей и необыкновенное богатство глубоких аналитических идей, связанных с этим спором и в значительной степени порожденных им. В этом смысле спор был пестрым клубком, составленным из глубоких и труднейших вопросов, касавшихся: возможности перехода к пределу и перестановки пределов: условий пользования расходящимися рядами; сходимости ряда Тэйлора при наличии всех производных; различия функции от ее аналитического изображения; аналитического продолжения функции; понятия произвола; бесконечных определителей; кривой без кривизны и кривой, составленной из одних угловых точек; интерполирования; разрывов функции и, в особенности, тригонометрических рядов. Последние имели в споре и в последующее время такое значение, что справедливо получили в дальнейшем имя «оси, около которой вращается весь математический анализ».

Разбираться в столкновении всех этих идей не легко даже в свете современного математического анализа; притом у нас нет полной уверенности в правильном понимании точки зрения каждого из споривших мыслителей. Например, Эйлер еще в 1744 г. сообщает Гольбаху формулу:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2},$$

отнюдь не делая отсюда заключения о том, что два аналитических выражения могут совпадать в отрезке без того, чтобы совпасть всюду. Такое заключение казалось в ту эпоху чудовищным, и Эйлер, имея в руках уже точный факт, прямо подтверждающий это заключение, не видел его по каким-то не ясным для нас причинам.В общем, в свете современного математического анализа, дело, по-видимому, происходило следующим образом. Вопрос, поставленный спором, касался отношения между аналитическим определением функции и определением до некоторой степени физическим: если отклонить произвольно струну от ее положения равновесия, то существует ли формула, дающая в точности начальное положение этой струны? Ни тонкий аналитический ум Д'Аламбера, ни творческие усилия Эйлера, Д.Бернулли и Лагранжа не могли решить этого труднейшего вопроса.

Сделать это выпало на долю Фурье, который в 1807 г. к общему изумлению дал правило вычисления коэффициентов a_n и b_n тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

изображающего «произвольно заданную» функцию. Формулы эти:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha,$$

получившие тотчас же имя «формул Фурье», категорически решили спор в пользу Д. Бернулли: главным возражением против Д. Бернулли и было как раз отсутствие правила вычисления коэффициентов тригонометрического ряда, изображающего «произвольно» заданную функцию $f(x)$. Оставалось, правда, еще возражение против Фурье, состоявшее в том, что неизвестно было, сходятся ли его ряды; но, во-первых, уже одно столь простое правило вычисления коэффициентов тригонометрического ряда говорило само за себя; а во-вторых, последовавшие работы Лежен Дирихле (1805—1859) окончательно установили сходимость рядов Фурье для всякой функции $f(x)$, имеющей ограниченное число максимумов и минимумов.

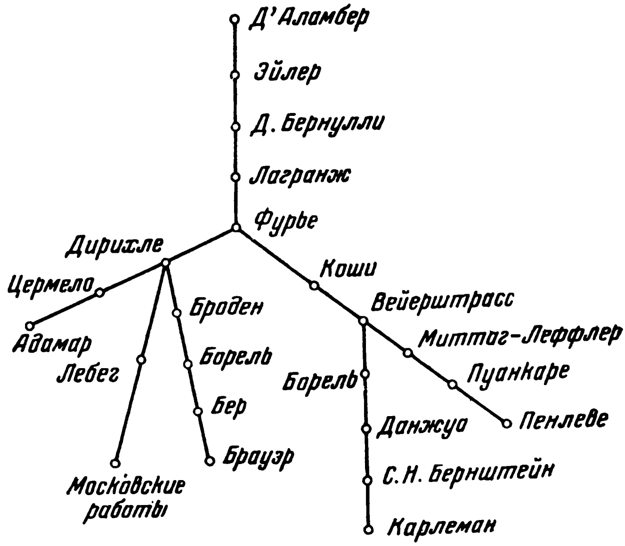
Открытие Фурье вызвало величайшее недоумение и растерянность среди всех математиков. Оно опрокидывало все понятия. До сих пор считали, как это делали Эйлер и Д'Аламбер, что всякое аналитическое выражение изображает только такую кривую, последовательные части которой взаимно зависят друг от друга. Эйлер ввел свой термин «непрерывная функция» для того, чтобы выразить эту взаимную зависимость частей функции; в настоящее время его термин «непрерывность» получил совсем иной смысл. Под влиянием идеи эйлеровской непрерывности Лагранж в своей теории аналитических функций (1797 г.) пытался доказать, что всякая непрерывная функция разложима в ряд Тэйлора: уже в то время чувствовалась связь между различными частями функции, разлагаемой в ряд Тэйлора, так как сознавали, что знание малой дуги позволяет узнать всю кривую. И вот Фурье показал, что подобные претензии тщетны и невозможны, так как физик, чертящий произвольным образом кривую, в каждый момент имеет возможность изменить течение кривой по своему капризу; но раз кривая уже начерчена, то оказывается возможным представить ее единым аналитическим выражением. Таким образом начали приходить к парадоксальному результату, будто нет никакой органической связи между различными участками одной и той же прямой или различными дугами одной и той же окружности, потому что открытие Фурье показывало, что можно охватить единой аналитической формулой, одним уравнением непрерывную линию, составленную из отрезков различных прямых или дуг различных окружностей. Правда, раздавались робкие голоса, указывавшие, что уравнение единой прямой или единой окружности выглядит «проще», чем разложение Фурье. Но скоро увидели, что этот критерий «простоты» никуда не годится, так как он заставляет ограничиваться лишь алгебраическими функциями и запрещает пользоваться скомпрометированными открытием Фурье бесконечными разложениями, важность и польза которых росла со дня на день.

Понятие функции после открытия Фурье

Современное понимание функции и ее определения, кажущиеся нам сейчас точными, могли родиться лишь после открытия Фурье. Открытие это ясно показало, что большинство недоразумений в споре о звучащей струне происходило от смешения двух понятий, казавшихся совпадающими, но на самом деле глубоко различных: понятия самой функции и понятия ее аналитического изображения.

Действительно, оба эти понятия: «функция» и «аналитическое выражение» до Фурье совсем не различались, и лишь открытие Фурье произвело их расщепление. С этого момента усилия математиков направились по двум совершенно различным руслам. С одной стороны, стремление удержать взаимную зависимость частей кривой вылилось в современную теорию функций комплексного переменного. На этом пути предстояло уже совершенно отделить понятие функции от ее аналитического изображения. Это и было сделано Вейерштрассом в понятии «аналитическая» («голоморфная») функция. С другой стороны, открытие Фурье и изучение значений аналитических выражений разрушали всякую связь между различными частями кривой. Казалось, что значения аналитического выражения обладают лишь одним свойством: быть определенными — в остальном же они совершенно произвольны, будучи независимы друг от друга. В этом смысле и было определено понятие функции, данное Дирихле. Это определение явилось основным для современной теории функций действительного переменного.

Определения функции, данные Вейерштрассом и Дирихле, внесли в свое время большую ясность и успокоение в среду математиков. Казалось, что эта ясность уже окончательна и что больше ничего не остается, как развивать следствия добытых, наконец, после стольких трудов и усилий твердых определений. Однако в самое последнее время стало очевидным, что среди математиков отнюдь не установилось полного единодушия относительно ценности и даже смысла полученных определений функции: все чаще и чаще стали появляться подкрепляемые неоспоримыми фактами намеки на то, что определение функции, данное Вейерштрассом, слишком узко; с другой стороны, математики с чувством глубочайшего изумления констатировали, что в их среде нет полного единодушия в понимании смысла определения функции, данного Дирихле: в то время как одни находили его совершенным, другим оно казалось слишком широким, а третьи просто отрицали за ним какой-либо смысл. Таким образом, сделалось ясно, что спор о звучащей струне возобновился в наши дни, но в ином свете и с иным содержанием. В общем схема развития понятия функции представляется следующей:



Функции действительного переменного

Открытие Фурье показало, что можно рассматривать как единую функцию ординату непрерывной кривой, составленной из дуг кривых, не имеющих между собой ничего общего и, следовательно, совершенно различной природы. Органическая (логическая) связь между различными частями кривой, изображенной единым аналитическим выражением, и притом столь простым, каков, например, тригонометрический ряд, была совершенно разрушена. В этих условиях казалось, что ничего другого не оставалось делать, как совершенно забыть об аналитическом выражении и заявить, что понятие функции исчерпывается просто совокупностью численных значений для разных величин x — значений, вообще говоря, совершенно не зависимых одно от другого. Этой идеей и руководился Дирихле, когда он устанавливал свое знаменитое определение функции, сохраняющее силу и по настоящий момент.

Определение функции по Дирихле: y есть функция переменного x, определенная на отрезке $[a \leqslant x \leqslant b]$, если всякому значению переменного x, содержащемуся в этом отрезке, соответствует вполне определенная величина переменного y, причем совершенно неважно, каким именно способом установлено указанное соответствие. Это определение сразу пролило яркий свет на целый ряд явлений математического анализа, понимание которых было смутным. Вначале оно казалось столь совершенным, что было принято почти единогласно. Долгое время это определение рассматривали как настоящее открытие; самую формулировку его считали столь точной, что не допускали и мысли о возможности ее изменения.

И действительно, это определение поставило на ноги целый ряд изысканий. С этого момента начали думать, что дальнейшие работы математического анализа должны быть посвящены лишь разысканию свойств тех или иных частных семейств функций, получающихся из данного Дирихле общего определения функции путем его ограничения. Таким образом возникли отделы анализа, посвященные семействам функций: непрерывных (в смысле Коши); монотонных; имеющих ограниченное число максимумов и минимумов; удовлетворяющих условиям Липшица, Дини; дифференцируемых и т. д.

Лишь тогда, когда указанные частные семейства были выделены и изучены, стали подыматься голоса, требовавшие большей ясности от определения Дирихле, вначале не дававшего никакого повода для сомнений. Атакуемым пунктом в этом определении оказались слова: «причем совершенно неважно, каким именно способом установлено указанное соответствие». Возражения против этого пункта и его защита впоследствии связались с обсуждением одного положения теории множеств, называемого принципом произвольного выбора и высказанного Цермело («аксиома Цермело»).

Одним из первых, кто совершенно ясно высказал свое недовольство этой «прибавкой» к определению функции по Дирихле, был Броден (1897 г.). К сожалению, его соображения носили слишком общий характер, и поэтому не все математики своевременно обратили внимание на его сомнения. Броден указывал на то, что определение функции должно иметь некоторое специальное свойство, чтобы легко передаваться от ума к уму. Чтобы получить представление об этом свойстве, разделим какимнибудь способом основной отрезок $[a, b]$, где нами определяется функция $y(x)$, на бесконечное число отрезков, которые мы обозначим через δ_1, δ_2, δ_3, ..., δ_n,... Пусть определяемая нами функция $y(x)$ совпадает: в первом отрезке δ_1 — с ординатой некоторой прямой линии L_1, во втором отрезке δ_2 — с ординатой некоторой циклоиды L_2, в третьем отрезке δ_3 — с ординатой некоторой лемнискаты L_3, и т. д. Броден спрашивает: когда следует рассматривать в этом случае функцию $y(x)$ как определенную? И отвечает: тогда и только тогда, когда имеется определенный закон выбора кривых L_1, L_2, L_3,..., т. е. когда эти кривые имеют между собой нечто общее и, следовательно, в некотором смысле будут между собой однородными («гомогенными»). Согласно Бродену, функция, составленная из бесконечного множества абсолютно неоднородных («гетерогенных») между собой кривых, не может быть предметом изучения, так как такая функция никогда не может быть нам заданной (или данной); задать или дать абсолютно разнородные кривые можно только тогда, когда они имеются в конечном числе: в этом случае они могут быть заданы абсолютно независимыми между собой. Но бесконечное число абсолютно независимых между собой кривых, согласно Бродену, никогда не может быть предметом изучения.

Независимо от Бродена и немного позже его за требование определенного закона, всегда молчаливо подразумеваемого, когда дело идет о понятии функции, высказались Борель, Бэр и Лебег (1905 г.). Бэр указал на то, что там, где дело идет о бесконечном, аналогия мешка с шарами, который передают из рук в руки, должна быть раз навсегда изгнанной: хотя всякая функция и является, по существу, совокупностью численных значений, соответствующих различным величинам переменного x, однако эту совокупность нельзя просто передать из рук в руки, как упомянутый мешок; здесь совершенно необходимо описание закона соответствия всякому x числа $y(x)$, причем именно этот закон и должен быть сообщаем всякому, кто хочет рассматривать эту функцию $y(x)$. Для нашего ума «все приводится к конечному», замечает Бэр. Борель, желая по возможности точнее выяснить всю разницу его взглядов и взглядов Цермело и Адамара, производит такой «умственный эксперимент». Прежде всего он отмечает, что десятичное разложение числа $\pi = 3{,}1415926535\ldots$ следует рассматривать как вполне определенное, потому что во всех учебниках по элементарной геометрии показывается, каким образом можно вычислить сколько угодно десятичных знаков. В силу этого всякий десятичный знак, например миллионный, можно рассматривать как вполне определенный, даже если он еще никем не был вычислен. Потом Борель берет миллион людей, выстроенных в ряд, и, заставляя каждого назвать наудачу десятичный знак, получает некоторое десятичное разложение, обрывающееся на миллионном десятичном знаке. Это разложение Борель продолжает еще рассматривать как вполне определенное.

Наконец, Борель предлагает расположить в ряд не миллион людей, а бесконечное множество и заставить каждого из них назвать наудачу десятичный знак. Борель спрашивает: можно ли полученное таким образом бесконечное десятичное разложение продолжать еще рассматривать как вполне определенное, как, например, вполне определенным является десятичное разложение числа π? Ответ Бореля гласит: математики с таким складом ума, как у Цермело и Адамара, конечно, будут рассматривать это бесконечное десятичное разложение как «вполне определенное». За самого же себя Борель отвечает отрицательно, ибо полученное таким образом число может оказаться лишенным закона, так что два математика, разговаривающие о нем, никогда не будут уверены в том, что говорят об одном и том же числе; не обладая законом, образующим десятичные знаки такого числа, они не могут быть уверены в его тождестве.

Лебег выразился еще определеннее, утверждая, что математик, не обладающий законом, осуществляющим рассматриваемую им функцию $y(x)$, никогда не может быть уверен, что в разные моменты своего рассуждения он говорит о той же самой функции: здесь дело идет уже не об общем языке двух математиков, а просто о согласии математика с самим собой.

Наоборот, Адамар, полемизируя с Борелем, утверждает, что нисколько не затруднительно рассматривать как вполне определенные десятичные разложения, «лишенные закона», так как, например, в кинетической теории газов говорят о скоростях молекул в данном объеме газа, хотя никто никогда в действительности их не будет знать. Адамар указывает, что требование закона, определяющего рассматриваемую функцию $y(x)$.

сильно напоминает требование аналитического выражения для функции и, значит, отбрасывает нас назад к XVIII веку.

Математические работы Бэра и Лебега пролили много света, хотя вместе с этим и чрезвычайно запутали вопрос. Бэр взялся за систематическое исследование изображения функции аналитическими выражениями. Принимая во внимание, что в силу теоремы Вейерштрасса всякая непрерывная функция $f(x)$ изобразима как сумма равномерно сходящегося ряда многочленов $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$, Бэр называет все непрерывные функции — функциями класса 0. Далее функциями класса 1 Бэр называет такие разрывные функции $f(x)$, которые являются пределами непрерывных функций, т. е. $f(x=) \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. Функции $f(x)$, которые не относятся к классам 0 или 1, но которые являются пределами функций класса 1, Бэр называет функциями класса 2, и т. д. Определение Бэра идет по всем конечным числам и по всем счетным трансфинитным числам, в результате чего Бэр получает свою знаменитую классификацию функций:

$$K_0, K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots, K_\omega, \ldots, K_\alpha, \ldots \mid \Omega.$$

Всякая функция $f(x)$, входящая в классификацию Бэра, имеет определенное аналитическое изображение с помощью многочленов, над которыми простираются знаки переходов к пределу, в конечном или счетном числе. Таков тип аналитических выражений, рассмотренных Бэром. Лебег существенно дополнил изыскания Бэра, доказав, что рассмотрение всех иных аналитических действий, как-то: дифференцирование, разложение в ряды, интегрирование, привлечение каких-либо трансцендентных функций, как, например, $\sin x$, $\ln x$ и т. д. совершенно бесполезно, так как всякая функция $f(x)$, образованная конечным или счетным числом таких операций, необходимо войдет в классификацию Бэра. Лебег притом дал важное доказательство существования функции $f(x)$ в каждом классе K_a классификации Бэра и в заключение нашел глубокомысленным, но чрезвычайно сложным приемом индивидуальную функцию $f(x)$, уже не входящую в классификацию Бэра. Открытие Лебега произвело столь же ошеломляющее впечатление, как в свое время открытие Фурье: результат Лебега показал, что логическое определение индивидуальной функции является более широким, чем чисто математическое определение, так как путем логического определения была получена частная функция $f(x)$, которую нельзя получить никакими переходами к пределу в конечном или счетном числе, отправляясь от многочленов.

Функция, определенная Лебегом и не входящая в классы Бэра, очень сложна, и природа ее еще не изучена. Но московские работы показали, что самый деликатный пункт рассуждений Лебега вызывает возражения: когда Лебег доказывал, что всякое аналитическое выражение, составленное из математических знаков в конечном или счетном числе, преобразуется в выражение Бэра, составленное из простых (счетных) переходов к пределу, то он, не имея действительно исчерпывающего каталога всех возможных аналитических выражений, подвергал свое дело большой опасности, так как всегда могло оказаться аналитическое выражение, не преобразующееся в выражение Бэра. И действительно, московские работы показали, что уже аналитическое выражение

$$f(x) = \overline{\lim_{y\to+\infty}}\ \overline{\lim_{m\to+\infty}}\ \overline{\lim_{n\to+\infty}}\ P_{m,n}(x, y),$$

где $P_{m,n}(x, y)$ есть многочлен от букв x и y и где переходы к пределу буквами m и n простые (счетные), а переход к верхнему пределу буквой y есть непрерывный (несчетный), уже не сводимо к выражению Бэра при надлежащем подборе многочлена $P_{m,n}(x, y)$. Вместе с тем выяснилось, что очень часто аналитические выражения, как предвидел это Борель, не служат ни к чему, так как даже функции класса 1 классификации Бэра, по-видимому, ставят нас лицом к лицу с принципиально неразрешимыми проблемами.

Указанные вопросы о природе аналитических выражений далеко еще не разрешены. Но следует указать на то, что среди мнений математиков, возражающих против определения функции, данного Дирихле, имеются заметные и важные нюансы: так, в то время как Лебег мирится с любым законом (логическим или математическим), лишь бы он давал функцию, индивид Борель вносит дальнейшее ограничение, требуя, чтобы закон был счетным (т. е. имеющим дело с натуральными числами, а не с континуумом). Брауэр, по-видимому, идет еще дальше, отказываясь рассматривать даже бесконечность натуральных чисел.

Функции комплексного переменного

Совсем иные судьбы претерпело определение функции, имевшее целью дать понятию функции такое содержание, при котором «знание малой дуги рассматриваемой кривой приводит к знанию всей кривой». Правда, подобно тому, как Дирихле на пути действительного переменного удалось дать такое определение функции, которое рассматривалось как уже окончательное, так и на пути комплексного переменного Вейерштрассу удалось прийти к определению функции, которое столь совершенно, что большинство математиков и до сих пор рассматривает его как единственное и во всяком случае как исчерпывающее все нужды практики. Однако в то время как критика определения Дирихле явным образом домогается его сужения, критика определения Вейерштрасса, наоборот, ищет его расширения. Работам Вейерштрасса предшествовали работы Коши (1789—1857). Коши первый понял, что упомянутое свойство кривой определяться малой дугой нужно объяснять привлечением комплексного переменного: это переменное должно играть хотя и вспомогательную, но неизбежную роль.

Мысли Коши и его основные теоремы были приведены в порядок и систематизированы Вейерштрассом (1815—1897). Основная идея Вейерштрасса состояла во введении так называемого аналитического продолжения. Из изысканий Коши следовало, что всякий ряд $P(x-a)$, расположенный по положительным степеням разности $x-a$, сходится внутри круга c определенного радиуса с центром в точке a, вне которого он заведомо расходится. Сумма же ряда внутри круга c имеет производные всех порядков. Вейерштрасс рассматривает эту сумму ряда $P(x-a)$ как «аналитическую функцию», определенную внутри круга c и ищет расширения области существования этой функции путем особого процесса. Основная теорема, на которую этот процесс опирается, следующая: если круги сходимости двух данных рядов $P(x-a)$ и $P(x-b)$ пересекаются и если в общей части этих кругов имеется точка, в которой значения обеих сумм и всех их производных соответственно равны, тогда обе суммы рассматриваемых рядов тождественны в общей части обоих кругов. Вейерштрасс рассматривает в этом случае каждый из двух указанных рядов как непосредственное продолжение другого и называет каждый из них «элементом» определяемой аналитической функции. Вот определение функции (аналитической) по Вейерштрассу: аналитическая функция $f(x)$ есть совокупность элементов, выводимых из данного с помощью последовательных непосредственных продолжений.

Вольтерра и Пуанкаре внесли окончательную ясность в это определение, доказав, что для полного определения аналитической функции во всем поле ее существования достаточно проделать лишь счетное число непосредственных продолжений. Аналитическая функция $f(x)$ называется однозначной, когда нет точки z, в которой два различных элемента $P(x-a)$ и $P(x-b)$ функции имели бы существенно различные значения. Совокупность точек z, находящихся внутри кругов, принадлежащих элементам рассматриваемой однозначной функции $f(z)$, называется естественной областью ее существования. Всякая точка, принадлежащая границе естественной области существования однозначной функции, называется особой точкой этой функции. Основной теоремой является следующая: на окружности сходимости всякого элемента аналитической функции $f(x)$ лежит особая точка.

Определение функции, данное Вейерштрассом, сразу внесло яркий свет в бесчисленные области математического анализа, казавшиеся до того времени темными. Оно сразу объяснило бесчисленное количество парадоксов и вызвало необъятное количество работ (продолжающихся и до сих пор), посвященных свойствам аналитических функций. Казалось, что наконец было найдено определение функции столь совершенное, что дальше предстоит лишь изучать свойства, из него вытекающие. Самое главное, что казалось наконец разгаданным то свойство функции, в силу которого «знание малого участка кривой определяет ее всю»: это свойство явилось просто следствием самого определения функции. Вдобавок ко всему разъяснились многие неразгаданные раньше свойства аналитических выражений, преимущественно рядов и бесконечных произведений: равномерно-сходящийся ряд в какой-нибудь области D, составленный из аналитических функций в этой области, оказывался имеющим своей суммой аналитическую функцию в D. Загадка аналитического выражения, сходящегося к разным функциям в разных областях, объяснялась тем, что между этими областями была нарушена равномерная сходимость, как, например, у ряда

$$\frac{1+z}{1-z}+\frac{2z}{z^2-1}+\frac{2z^2}{z^4-1}+\frac{2z^4}{z^8-1}+\ldots,$$

сходящегося к $+1$ внутри круга $(z)=1$ и к -1 вне его. Таким образом, понятия аналитической функции и аналитического выражения были расщеплены.

Первые совершенно определенные указания на недостаточность определения функции по Вейерштрассу были сделаны Борелем (1895 г.), который несколько раз делал попытки построения более общей теории, чем теория Вейерштрасса. Из этих попыток две первые встретили решающие возражения Пуанкаре и Пенлеве. И лишь третья (1917 г.) должна быть признана удовлетворительной. Поискам нового, более широкого класса функций, чем аналитические функции Вейерштрасса, была посвящена значительная часть научного творчества Бореля, и в этой области им были высказаны многие чрезвычайно глубокие идеи, легшие в основу почти всех дальнейших работ его последователей в этом направлении. Основным пунктом возражений Бореля против определения Вейерштрасса было указание на совершенную искусственность границы «естественной области существования аналитической однозначной функции». Граница эта в самом деле естественна, если ее образуют конечное или счетное число точек. Но если эта граница является замкнутой линией, то «очень часто — замечает Борель — граница эта является совершенно искусственной, так как аналитическое выражение, дающее нам функцию с такой границей, оказывается равномерно сходящимся и вне ее и, значит, дающим некоторую наружную функцию. Обе эти функции, внутренняя и наружная, с точки зрения Вейерштрасса, являются существенно различными, так как они непродолжаемы одна в другую. Но по существу это есть единая функция, только разрезанная особой линией на две части, так как можно найти класс таких аналитических выражений, что если одна часть удовлетворяет алгебраическому или дифференциальному соотношению, то и другая — тоже».

Аналитические выражения, которые имеет в виду Борель, суть ряды рациональных дробей

$$\sum\frac{A_n}{z-a_n},$$

где ряд $\Sigma|A_n|$ есть сходящийся, а особые точки a_n («полюсы аналитического выражения») всюду плотны на рассматриваемой замкнутой линии или бесконечно накапливаются вблизи нее.

Возражения против этой попытки Бореля были сделаны Пуанкаре и Вольфом. Первый указал, что всегда можно разрезать рассматриваемую замкнутую линию на такие две части A и B и определить такие две аналитические функции (с точки зрения Вейерштрасса) $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$, что $\Phi_1(z)$ будет аналитической вне A, $\Phi_2(z)$ будет аналитической вне B и что, несмотря на это, $\Phi_1(z) + \Phi_2(z) = F_1(z)$ внутри кривой и $\Phi_1(z) + \Phi_2(z) = F_2(z)$ вне кривой, где $F_1(z)$ и $F_2(z)$ суть две произвольные функции, из которых одна аналитическая внутри кривой, другая аналитическая вне кривой, причем обе непродолжаемы нигде через кривую. Вольф же построил такой ряд $\sum \frac{A_n}{z - a_n}$, который сходился к нулю внутри кривой, причем полюсы a_n скоплялись к кривой снаружи и ряд $\Sigma | A_n$ сходился.

После возражений Пуанкаре Борель изменил свою теорию, прибегнув к звездным разложениям Миттаг-Леффлера. Звездное разложение Миттаг-Леффлера представляет собой обобщение ряда Тэйлора, так как n-й член его есть линейное выражение от первых n коэффициентов a_0, $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ ряда Тэйлора. Борель высказал убеждение в том, что понятие аналитической функции, как его дал Вейерштрасс еще сильно привязано к частному классу аналитических выражений, именно — к рядам Тэйлора, и что если за «элемент функции» взять не ряд Тэйлора $K(x - a)$, а звездное разложение Миттаг-Леффлера, то по лучам звезды Миттаг-Леффлера можно проскользнуть через полюсы аналитического выражения, всюду плотно лежащие на особой линии, во внешнее пространство, если звездное разложение Миттаг-Леффлера было составлено для внутренней точки кривой. Надо иметь в виду, что область сходимости звездного разложения Миттаг-Леффлера для аналитической функции $f(z)$ получается так: зажигают источник света в начальной точке a разложения Миттаг-Леффлера $M(x - a)$, а во все особые точки разлагаемой аналитической функции вбивают в плоскость непрозрачные колышки: тогда освещенные места («звезда») и будут областью сходимости звездного разложения $M(x - a)$ к $f(x)$. Вычисления Бореля, казалось, подтвердили его идею, так как звездное разложение $M(x - a)$ для внутренней точки a оказалось сходящимся на бесконечном множестве лучей звезды и именно к величине наружной функции на этих лучах.

Но Пенлеве сделал в своей блестящей детальной и чрезвычайно тонкой работе возражение Борелю, указав ему, что это может быть и случайностью, так как имеются звездные разложения Миттаг-Леффлера, сходящиеся на отрезке луча к нулю без того, чтобы все разложение изображало нуль. Тогда Борель сделал третью, на этот раз уже удавшуюся попытку, предположив ряд $\Sigma | A_n |$ чрезвычайно сильно сходящимся (не слабее, чем $e^{-e^{n^4}}$). Это предположение он связал с «моногенностью на множестве» [т. е. с существованием $f'(z)$ по множеству].

Новая теория Бореля оказалась выдержавшей испытание, и для известного класса функций $f(z)$ (в смысле Дирихле — для комплексного переменного) звездные разложения непременно должны сходиться к $f(z)$, и следовательно, знание величины функции и ее производных вполне определяло функцию в ее целом. Это и подавно справедливо тогда, когда функция известна на каком-либо отрезке.

Несколько поздно для дела оправдание третьей теории Бореля пришло от московских работ (Привалов, Лузин). Именно было доказано, что аналитическая функция вблизи спрямляемой кривой, уничтожающаяся почти всюду на ней при стремлении к ее точкам по касательным путям, необходимо должна быть тождественной нулю. А так как наружная функция Бореля почти всюду по некасательным путям принимает на особой линии (предположенной спрямляемой) те же самые значения, что и внутренняя функция, то отсюда следует, что такая наружная функция может быть только одна. Эта единственность подтверждает идеи Бореля об органической связи внутренней и внешней непродолжаемых функций.

Совсем на иной путь вступили Данжуа, С. Н. Бернштейн и Карлеман, отыскивая наиболее естественное обобщение понятия аналитической функции. Большая оригинальность их исследований заключается в стремлении оставаться на почве одного только действительного переменного, не привлекая к рассмотрениям комплексных чисел.

Отправной пункт С. Н. Бернштейна — его результаты о наилучшем приближении аналитических функций. Основной теоремой, послужившей исходным пунктом, является следующая: если $f(x)$ голоморфна во всякой точке отрезка $[a \leqslant x \leqslant b]$, тогда наилучшее приближение $E_n f$ функции $f(x)$ с помощью многочлена n-й степени должно удовлетворять неравенству $E_n f < M\rho^n$, где $\rho < 1$. С. Н. Бернштейн называет функцию $f(x)$ квази-аналитической (P), если имеется такая бесконечная последовательность целых положительных $n_1 < n_2 < \ldots < n_k \ldots$, для которых удовлетворяется неравенство $E_{n_k} f < M\rho^{n_k}$. Функции эти оказываются замечательными, так как фундаментальная теорема Бернштейна гласит: всякая квази-аналитическая (P) функция $f(x)$ вполне определяется на всем отрезке $[a \leqslant x \leqslant b]$ знанием ее значений на какой-нибудь его части $[a' \leqslant x \leqslant b']$. Это предложение дало Бернштейну возможность определить квази-аналитическое продолжение (P) как сохранение неравенства $E_{n_k} f < M\rho^{n_k}$ в более широком отрезке $[c \leqslant x \leqslant d]$, содержащем в себе данный отрезок $[a \leqslant x \leqslant b]$. Наблюдающийся факт существенно различного продолжения данной функции $f(x)$ за отрезок $[a, b]$ в зависимости от перемены базы $n_1 < n_2 < n_3 \ldots < n_k < \ldots$ квази-аналитического продолжения (P) С. Н. Бернштейн уподобляет факту многозначности обычных аналитических функций.

Другое определение полагает для квази-аналитичности Карлеман. В то время как квази-аналитические (P) функции С. Н. Бернштейна могут не обладать даже и первой производной, Карлеман ставит непременным условием наличие у рассматриваемой им функции $f(x)$ производных всех порядков. Он обозначает через C_A семейство всех таких функций $f(x)$, для которых в данном отрезке $[a, b]$ справедливо неравенство: $|f^{(n)}(x)| < k^n A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — данная последовательность положительных чисел, а k — любое положительное постоянное, не зависящее от n.

Основной теоремой Карлемана — Данжуа является следующее важное предложение: для того чтобы семейство C_A было квази-аналитическим (т. е. сохраняющим свойство: значение функции на части $[a', b']$ отрезка $[a, b]$ определяет ее на целом отрезке), необходимо и достаточно, чтобы всякая монотонная мажоранта ряда $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{A_n}}$ была расходящимся рядом. Лично Данжуа установил лишь достаточность этого условия. Определение Карлемана уже получило приложение к теории моментов; его отношение к определению С. Н. Бернштейна оказалось неопределенным, так как здесь нет ни тождества, ни отношения общего к частному.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Лузин. Интеграл и тригонометрический ряд. М., 1915; его же: Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications. Paris, 1930.
2. H. Burkhardt. Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen. Leipzig, 1901.
3. E. W. Hobson. The Theory of Function of a Real Variable, vol. I, II. Cambridge, 1921—1926.
4. E. Borel. Leçons sur la théorie des fonctions. Paris, 1905 (См. Cinq lettres sur la théorie des fonctions); E. Borel. Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions. Paris, 1922.
5. H. Lebesgue. Sur les fonctions représentables analytiquement. «Journal de mathématiques pures et appliquées», Paris, 1905.
6. S. Bernstein. Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle. Paris, 1925.
7. T. Carleman. Fonctions quasi-analytiques. Paris, 1926.

IV

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

ПОЛЬ АППЕЛЛЬ *

(1855—1930)

(Некролог)

В конце октября 1930 г. наша Академия наук понесла тяжелую утрату: скончался почетный член ее, один из наиболее славных представителей французской науки — Поль Аппелль (Paul Appell).

Поль Аппелль родился в Страсбурге в 1855 г. Уже с 1870 г., в средней школе Нанси, судьба сводит его с Анри Пуанкаре, бывшим в то время его школьным товарищем. Этим было положено начало той знаменитой триаде: Аппелль — Пуанкаре — Пикар, которая впоследствии долгие годы определяла течение французской математической науки. В 1873 г. он становится учеником Высшей нормальной школы Парижа, и далее его блестящая научная жизнь протекает в стенах Сорбонны, где он последовательно становится профессором, деканом и, наконец, ректором. В 1892 г., 37 лет от роду, он избирается членом Парижской Академии наук, по секции геометрии.

Его первые большие работы, в самом деле, были посвящены геометрии. Докторская диссертация, защищенная им в 1876 г., внушена идеями Шаля и трактует о свойствах пространственных кривых и геликоидальном движении твердых тел. Эта работа, обобщающая понятие инволюции, данное Шалем, и дающая изящные приложения к теории кубических пространственных кривых, привлекает к нему внимание геометров. Еще более внимание геометров было возбуждено его мемуаром 1884 г. «Sur le problème des déblais et remblais», где он рассматривает с чрезвычайным искусством эту знаменитую задачу Монжа и за который получает премию имени Бордена от Парижской Академии наук, после заслушания ею весьма лестного доклада Дарбу.

После геометрических работ последовали работы и по чистому математическому анализу. Они слишком многочисленны, чтобы можно было отважиться говорить о всех них. Целый ряд вопросов чистого анализа, один за другим, становится в центре его внимания, сопровождаясь тонкими размышлениями, приводящими к прекрасным результатам. Гипергеометрические функции, полиномы Эрмита, потенциалы, разложения

* Изв. АН СССР, ОМЕН, 1931, № 3, стр. 319—322.

в ряды полиномов, дифференциальные уравнения разного вида, определенные интегралы, функции с аналитической точки зрения, периодические и двоякопериодические функции, функции многих переменных общие и частные — все это вызывает его на творческие размышления. Достаточно сказать, что «Notice sur les travaux» Поля Аппелля, опубликованная в 1926 г. в «Acta Mathematica», содержит список 257 работ, не считая книг общего характера. Проглядывая эти работы, замечаешь одну и ту же черту его творчества: автор из множества вопросов выбирает постоянно такой частный и точно ставящийся вопрос, который влечет открытие новых областей. Так, например, его изыскания о разложении в полиномы функций, голоморфных внутри области, ограниченной дугами окружностей, предшествовали общим теориям о разложении функций в ряды полиномов вообще.

Среди работ по анализу должен быть поставлен на особое место мемуар «Sur les intégrales des fonctions à multiplicateur», представленный автором на международный математический конкурс, объявленный в Скандинавии. За этот мемуар, о котором Эрмит отозвался как о произведении, совершенном во всех отношениях, Поль Аппелль получил золотую медаль. Первая же награда, как известно, была присуждена Анри Пуанкаре.

Но Поль Аппелль известен за границею преимущественно как автор трудов по теоретической механике. Среди других результатов им была найдена простая интерпретация мнимого времени как связи между движениями, произошедшими от данной системы сил и от системы сил, которую получают, меняя на противоположное направление движущих сил, при сохранении их абсолютных величин. Еще более важна идея Поля Аппелля ввести энергию ускорения, которая позволила ему написать, при помощи расширения принципа Гаусса наименьшего принуждения, общие уравнения динамики, охватывающие движение неголономных систем[1]. Наконец, его знаменитый четырехтомный «Traité de Mécanique rationnelle» представляет научный и педагогический шедевр, на котором воспитывались десятки поколений как во Франции, так и за ее пределами, и который сделал бесконечно много для самой организации преподавания механики во всем мире. Это монументальное создание Поля Аппелля надо поставить на одну линию с четырехтомной «Théorie des surfaces» Гастона Дарбу и со знаменитым трехтомным «Traité d'Analyse» Эмиля Пикара.

Здесь мы прикасаемся еще к одной черте блестящих дарований Поля Аппелля: он явился не только творцом и ученым, но еще и замечательным педагогом. Его изложение, всегда столь изящное и на первый взгляд кажущееся даже излишне простым, представляет собой результат работы его крупного педагогического таланта. Те большие вещи, за которые он брался, один или совместно с другим ученым, отличаются изяществом и несравненной доступностью изложения; на этих вещах воспитывалось

[1] Аналогичные результаты по движению неголономных систем в частных случаях были получены ранее академиком С. А. Чаплыгиным.

много молодых ученых. Достаточно вспомнить книгу Аппелля и Лакура «Fonctions elliptiques» или начало пятого тома его «Traité de Mécanique rationnelle», где дается изложение столь трудной к охватыванию вещи, как исчисление тензоров. Наконец, даже обычный учебник математического анализа, написанный им для «Ecole centrale des Arts et Manufactures», несмотря на десятки имеющихся во Франции превосходных курсов анализа, написанных и знаменитыми учеными и простыми педагогами, на все потребности, вкусы и дарования, в настоящее время можно видеть в Париже в руках большинства начинающих студентов.

Организующая активность Поля Аппелля естественно привела к избранию его (в 1914 г.) президентом Парижской Академии наук.

До самого последнего времени, будучи тяжко больным, Поль Аппелль не оставлял творческой научной работы. Одной из последних явилось сообщение Академии наук, где он делает интересную попытку установить иррациональность эйлеровой постоянной.

Следует сказать еще и о том, что Поль Аппелль был не только замечательным ученым, но и редким по своей личной доброте человеком. Его выдающаяся гуманность, широчайшая терпимость и готовность всем помогать привлекали к нему сердца всех, лично прикасавшихся к нему. В частности, пишущий эти строки, в бытность свою еще начинающим приват-доцентом, по приезде в Париж в 1912 г. оказался в весьма затруднительном положении в отношении столь первых научных нужд, каковы книги и библиотеки. И тотчас же Поль Аппелль, со своей всегдашней добротой и вниманием, пришел на помощь, сообщив исчерпывающие данные об организации научной жизни Парижа и дав рекомендательные письма, устроившие научную работу.

ИВАН АЛЕКСАНДРОВИЧ ЛАППО-ДАНИЛЕВСКИЙ*

(1896—1931)

(Некролог)

15 марта сего года наша Академия наук понесла чрезвычайно тяжелую утрату: скончался в Гиссене член-корреспондент Академии Иван Александрович Лаппо-Данилевский.

Научная жизнь и самый расцвет этого столь сильного научного дарования происходили необыкновенно интенсивно, и уже одно это обстоятельство придает исключительное значение личности И. А.

Биографические данные вкратце сводятся к следующему. И. А. родился 16 октября 1896 г. в Петербурге. Осенью 1914 г. он окончил гимназию и поступил на Математическое отделение физико-математического факультета Петроградского университета, где он занимался всего один год. Далее в его жизни наступает перерыв в научных занятиях и вообще в университетском образовании, вплоть до 1924 г., когда он восстанавливается в качестве студента Ленинградского университета. Уже в следующем, 1925 г. он оканчивает университет и становится аспирантом. В эти самые годы его аспирантуры и происходит необыкновенно быстрое складывание его научной личности. Весной 1929 г. он оканчивает свой аспирантский стаж и сейчас же — с исключительным блеском — защищает свою диссертацию, в которой он излагает совершенно новую точку зрения на теорию линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами.

Одновременно с этим развитием творческой научной силы И. А. складывается и как выдающийся преподаватель. Уже в 1925 г. он состоит преподавателем Ленинградского морского техникума, а затем становится ассистентом и профессором ряда ленинградских втузов, вызывая восторженное отношение учащейся молодежи.

В 1929—1930 гг. И. А. читает как доцент специальный курс в Ленинградском университете, посвященный его новой теории. Осенью 1930 г. Наркомпрос командирует его в Германию для дальнейшего развития его теории линейных дифференциальных уравнений, сроком на один год. Тогда же он, по представлению академика И. М. Виноградова, Биркгофа и Шлезингера, удостаивается Рокфеллеровской премии-стипендии и од-

---

* Изв. АН СССР, ОМЕН, 1931, № 6, стр. 729—732.

новременно с этим, по представлению академика А. Н. Крылова, удостаивается премии Главнауки при Наркомпросе.

Во время своего краткого пребывания за границей И. А. получил ряд предложений от заграничных университетов читать циклы лекций и курсы по его изысканиям в области дифференциальных уравнений. Предложения были сделаны Парижем, Иеной и Гиссеном. За границей И. А. преимущественно был в Гиссене, где формально числился как работающий под руководством профессора Шлезингера. В заграничной же командировке, когда еще не минула и половина ее, И. А. застигла кончина.

Математические дарования И. А. проявились очень рано: еще на гимназической скамье он выделялся своими способностями и запросами. Но его математическая сила необычайно ярко обнаруживает себя в том обстоятельстве, что, несмотря на столь большой разрыв в научных занятиях, начавшийся, собственно говоря, еще в юношеском возрасте, И. А. не только смог вернуться к науке, но и развернул с исключительным блеском свое творчество, в сущности лишь в течение четырех лет, дав этим пример необычайной интенсивности мысли, длившейся до самой его кончины.

Сущность новой точки зрения И. А. на аналитическую теорию систем линейных дифференциальных уравнений состоит в следующем: хотя названная теория уже со второй половины XIX в. привлекла к себе такие выдающиеся научные силы, каковы Риман, Фукс, Фробениус, Миттаг-Леффлер, Пуанкаре, Гильберт, позднее Биркгоф и другие, однако она была до известной степени заведена в тупик вследствие постройки ее на почве теории функций обычного комплексного переменного. Именно благодаря этому, слишком близкому следованию классическому комплексному переменному, почва теории была истощена и хотя далеко не все проблемы получили решение, однако исследователи начали покидать эту область.

Идея И. А. состояла в том, что надо было переменить самую точку зрения и создать другую теорию функций, специально приспособленную к атакуемым им проблемам, именно: теорию функций матричного переменного. Действительность блестяще оправдала эти глубокие предвидения И. А.

Уже одна эта новая теория функций могла создать И. А. большую известность, так как законы функций матричного переменного оказались простыми, гармоническими и во многом аналогичными законами функций обычного комплексного переменного. Так, в самых последних работах И. А. указывает на аналитическое продолжение таких функций и дает его основы. Но важнее всего оказалось то обстоятельство, что благодаря теории функций матричного переменного прямая и обратная проблемы Пуанкаре и Римана — по данной системе уравнений найти ее группу и по данной группе отыскать все соответствующие системы дифференциальных уравнений — впервые получили свое полное до конца решение в руках И. А., в случае регулярных систем.

Решение, данное И. А., отличается своим изяществом и дает в явной форме все нужные зависимости матриц решений и матриц группы от матрицы коэффициентов системы уравнений. Но самое главное — это то, что даваемое им решение имеет совершенно алгорифмический характер и полную эксплицитность, в отличие от обычных доказательств существования.

Для случая иррегулярных систем И. А. успел дать много чрезвычайно глубоких идей и новые постановки вопросов, не могущие встретиться на обычном пути. Начатые им изыскания для иррегулярных систем в случае прямой задачи уже бросили новый свет на известные старые результаты Пуанкаре и Хельге фон Коха. И. А. успел дать решение и обратной задачи иррегулярных систем, правда в некоторых частных гипотезах. В заметке в «Comptes Rendus», опубликованной в январе этого года, он ищет освободиться от этих частных предположений. Здесь, к огромному несчастию для науки, застигает его кончина.

Оставленное им научное наследство в виде двух готовых к печати мемуаров и подготовленных черновых работ для теории как регулярных, так и иррегулярных систем столь важно и столь значительно, что тщательный учет и приведение в порядок к печати этого наследства является долгом Академии. Это тем более естественно, что в течение всей своей краткой жизни Иван Александрович оставался в сущности и автодидактом, и его идеи имеют в прошлом мало корней, по которым можно было бы восстановить его результаты.

ЭЙЛЕР *

(1707—1783)

(По поводу 150-летия со дня смерти)

Кому не знакомо имя Эйлера? Кто еще на школьной скамье не привык смотреть на имя Эйлера в созвездии имен Гюйгенса, Ферма, Лейбница, Ньютона, Бернулли, Д'Аламбера? Но мало кто из ученых знает, насколько значительна была стихийная творческая сила этого человека, сближающая его с такими людьми XVI в., каковы были Леонардо да Винчи и Микельанджело. И мало кто даже из математиков знает, насколько крепкими связями соединены они и теперь с трудами Эйлера и с какой мощью тяготеет над ними даже в настоящий момент мысль Эйлера.

Задача изобразить прекрасную, полную непрекращающегося творческого усилия жизнь Эйлера далеко выступает за пределы того скромного очерка, который мы можем здесь предложить вниманию читателя.

1. Детство. Первое соприкосновение с математикой. Леонард Эйлер (Leonard Euler) — один из величайших математиков XVIII в.— родился в 1707 г. в Швейцарии, в Базеле. Отец его был пастором местечка Рихен, лежащего вблизи Базеля; мать была родом из семьи, давшей стране несколько ученых. Сельская жизнь в Рихене, простые нравы и привязанность к родителям сложили у Эйлера простой характер, обеспечили ему долгую жизнь и легли в основу его крепкого сложения, сломить которое не было дано ни его тяжелым болезням, ни даже его изумительной работоспособности.

Отец Эйлера любил математику, которую в свое время изучал под руководством Якова Бернулли. Намечая для своего сына будущность по духовной линии, он счел полезным преподавать ему математику, так как чувствовал на себе ее влияние на развитие интеллекта и желал, в целях успешности предполагавшейся карьеры, дать мышлению сына надлежащую тонкость. Отец никак не предполагал, что то, что он рассматривал как поучительное развлечение, в свое время станет для сына предметом напряженнейшей работы, близкой к исступлению, и решительно отклонит его от намеченного отцом жизненного пути. К счастью, Эйлер имел слишком уравновешенную натуру и не обнаруживал никаких исключительных талантов в математических науках. Поэтому посеянные семена в уме юного геометра зрели скрыто и пускали там незаметные ни для кого глубокие корни.

* «Социалистическая реконструкция и наука», 1933, 8, стр. 3—24.

Одной из характерных черт природы Эйлера было то, что он не мог творить мимоходом; только отдаваясь с исступленною всепоглощающею страстью какому-нибудь изучению, его гений обнаруживал свою мощь. Таким образом, юный Эйлер имел время и возможность невозмутимо созревать, чтобы в нужный момент с молниеносной быстротой развернуть силы своего гения. Однако, по-видимому, отец уже чувствовал некоторое беспокойство, потому что биографы Эйлера вскользь упоминают о том, что он в эту пору не запрещал серьезным образом Эйлеру математических размышлений.

2. Учение и первые научные шаги. Следуя своему плану духовного образования для сына, отец отправил его в Базель изучать философию. Эйлер, послушный отцу, аккуратно посещал полагающиеся ему лекции. Но, обладая совершенно исключительной памятью, он быстро запоминал все то, что ему полагалось и что не было геометрией, с тем, чтобы весь остаток своего времени целиком отдавать излюбленной им науке. Теперь, имея уже явно выраженную склонность к математическим наукам и воспламененный ум, жадно стремившийся узнавать все больше и больше фактов, по мере того, как подвигалось его математическое образование, Эйлер не замедлил стать известным знаменитому Ивану Бернулли, крупнейшему из живших в ту эпоху геометров. Он тотчас же отметил Эйлера среди всех других своих слушателей, но, не будучи в состоянии ни предоставлять ему свое время в те часы, которые у Эйлера оставались свободными от его основных занятий, ни давать ему частные уроки, Иван Бернулли предложил Эйлеру приходить к нему каждую субботу с тем, чтобы разъяснять ему те трудности, с которыми Эйлер встречался при самостоятельном изучении самых серьезных математических трудов. «Превосходная метода,— замечают биографы Эйлера,— но ею можно было преуспеть, имея дело лишь с подлинным гением, столь же пылким и нетерпеливым в своих устремлениях, как и неутомимым в работе, — каков был Эйлер, предназначенный затмить своего учителя и составить эпоху в истории математических наук».

В 1723 г., в 16 лет, Эйлер, после произнесения им речи на латинском языке о философии Ньютона и Декарта, получает степень Maître des arts, позволяющую преподавать гуманитарные науки и философию. Затем, послушный воле отца, Эйлер приступил к изучению теологии и восточных языков. Обладая изумительной памятью, Эйлер начал это изучение не без успеха, но не смог переломить себя и приноровиться к характеру этих дисциплин, мало гармонировавших со свойствами его гения. Отец, видя, что в сыне говорит то, что сильнее всякого желания быть послушным, сильнее самой его воли и, может быть, его собственного понимания, видя, что от геометрии уже более ничто не может его оторвать, отступился от своих планов, и Эйлер, уже с согласия отца, с удвоенным жаром устремился к математическим наукам. Между Эйлером и сыновьями Ивана Бернулли — Николаем и Даниилом — завязалась искренняя и тесная дружба.

В то время начала создаваться Academia Scienciarum Petropolitana —

наша Академия наук, и в 1725 г. оттуда было прислано приглашение обоим юным Бернулли. Эйлер страстно желал следовать за ними, и Бернулли обещали ему при первой возможности найти ему подходящее место. На следующий год они написали ему, что действительно нашли его, но что для этого он должен уметь применять свои математические знания в физиологии.

Могучий талант не может обмануть, и чтобы стать физиологом, Эйлеру достаточно было захотеть. Нетерпеливо желая почувствовать скорее твердую почву под ногами, Эйлер устремился слушать лекции лучших медицинских сил Базеля. Эти лекции не могли заполнить всего ума Эйлера, столь же широкого, как и активного: остающееся время Эйлер употребил на составление диссертации «Dissertatio physico de sono» («О природе и распространении звука») и на решение вопроса о размещении мачт на судах. Это последнее сочинение: «Meditationes super problemate nautico de complantatione malorum» Парижская Академия наук сочла достойным почетного отзыва в 1727 г.; этому сочинению суждено было стать началом знаменитой серии работ Эйлера по навигации, обогативших эту область столькими открытиями.

К счастью для нашей Академии наук, Базельский магистрат оказался иного мнения об Эйлере, чем Парижская Академия наук, и защищенная Эйлером диссертация для соискания кафедры физики в Базельском университете признана была недостаточным аргументом для получения этой профессуры. Через несколько дней после этого Эйлер уехал в Россию.

Первые же выступления Эйлера в нашей Академии ответили всем ожиданиям его соотечественников, в том числе Даниила Бернулли. Назначенный сразу же адъюнктом Академии по математике и поэтому не имеющий более нужды вспоминать о физиологии, Эйлер со страстью весь ушел в творчество в той науке, от которой не могли его отклонить ни настояния его отца, ни малое жалование. Он сразу же принялся обогащать первые тома «Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae» своими мемуарами, возбуждая на состязание Даниила Бернулли, дружба с которым никогда не омрачалась ревнивым к науке чувством ни с той, ни с другой стороны.

3. Эпоха. Время для математической карьеры тогда было исключительно неблагоприятным. Талант средней силы не имел никакой надежды преуспеть, надо было или совсем не входить в состязание с великими людьми этой эпохи, либо, войдя, сиять полным блеском. Воспоминание о великих людях эпохи было в полной силе. Недавно еще умерли Лейбниц и Ньютон, совершенно изменившие лик геометрии. Не поблекла еще память о великих услугах, оказанных науке Гюйгенсом, Иваном Бернулли, Моавром, Тэйлором, Ферма и другими геометрами, поработавшими над всеми областями математики.

После столь блистательной эпохи что осталось на долю Эйлера? Можно ли было ожидать, что природа, организовав столь незадолго перед этим такое количество математических голов и столь скупая на свои интеллектуальные дары, совершит еще раз чудо? Эйлер чувствовал, однако, что это так, и смело вошел в это блестящее собрание с той твердой уверенностью, на которую ему давала право вся полнота его интеллектуальных даров.

Но помимо глубоких внутренних трудностей эпохи имелись для Эйлера еще и чисто внешние трудности. Перемена лиц в правительстве стала угрожать самому существованию нашей Академии, которая была еще слишком молода, чтобы прочно утвердиться. Холодно и косо глядели на это учреждение, поглощавшее огромные суммы и притом без немедленно ощутимой пользы. Единственно правильная точка зрения на Академию как на ассоциацию наук, долженствующую следить за всеми делающимися научными открытиями, анализировать их, оценивать должным образом, усовершенствовать и распространять, еще не была известна. Академики почувствовали необходимость самим заботиться о своей дальнейшей судьбе. Адмирал Сиверс, предугадывая пользу, которую может принести флоту такая сила, выхлопотал для Эйлера чин лейтенанта флота и обещал дальнейшее незамедлительное повышение по службе. Эйлер был уже готов принять это предложение, когда выход нескольких академиков и отъезд их на родину изменили положение. Эйлеру предложили место профессора физики, которое он и занимал до отъезда своего друга Даниила Бернулли за границу, на место которого он был избран академиком в 1733 г. Эйлеру тогда было всего 26 лет.

4. Работоспособность. Громадное количество мемуаров, представленных Эйлером нашей Академии в эту эпоху, свидетельствует о такой продуктивности Эйлера, в которую просто трудно поверить. Но еще более поразительный факт произошел в 1735 г., когда Академия получила от правительства предложение выполнить спешное крайне трудное вычисление. Академия не могла уклониться от этого поручения, отклонение которого поставило бы под угрозу самое существование Академии. Но академики потребовали несколько месяцев срока для выполнения этого поручения. Тогда Эйлер взялся произвести его в три дня и, действительно, к великому изумлению всей Академии, Эйлер окончил в указанный им самим срок все вычисление.

Но эта работа ему дорого стоила: по свидетельству биографов Эйлера, он заболел «нервной горячкой», чуть было не убившей его; во время ее у Эйлера вытек правый глаз. Такая одержимость и напряжение в работе просто не знакомы ученым нашей эпохи; по-видимому, здесь мы имеем непонятный нам случай доведенного до предела нервного напряжения, более которого человеческая природа не может выдержать и за которым начинается уже фактическое разрушение организма.

Потеря столь ценного органа всякого другого непременно заставила бы беречься, чтобы сохранить оставшийся глаз. Но Эйлеру был нестерпим всякий перерыв в работе. Эйлер легко отказывался от приема пищи, когда работа, к которой он имел вечную привычку, этого требовала.

5. Трактат по механике. До сих пор Эйлер был известен в избранных, но не широких кругах. На мировое место его выдвинул напе-

чатанный в 1736 г. двухтомный «Трактат по механике» («Mechanica, sive motus scientia analytice exposita», Petropolis). Открытие дифференциального и интегрального исчисления внесло сильнейшее потрясение почти во все отделы математики. В частности, оно совершенно изменило и лицо механики. Ньютон, Бернулли и сам Эйлер последовательно обогащали эту науку многочисленными открытиями. Но все это было в разбросанном состоянии и не было полного труда по науке о движении. Эйлер ясно видел, что в основании «Принципов» Ньютона лежит глубоко скрытая дорога, идя по которой, сильнейшие ученые обогащают механику. Поэтому Эйлер приложил всю свою творческую мощь и пустил в ход все ресурсы анализа, которые только были в его распоряжении, чтобы раскопать эту дорогу. На этом пути он получил решение таких вопросов, к которым до него никто не осмелился приближаться, и связал полученные им решения с результатами других геометров.

Ясность в идеях, точность их формулировки, прекрасный порядок их изложения — все это качества всякого автора, который хочет стать классиком. Все эти свойства имеет «Трактат по механике» Эйлера, но они составляют лишь ничтожную часть достоинств этого труда, главной заслугой которого явилась общность и глубина. Сила «Трактата по механике» была такова, чтот этот труд сразу поставил его на первое место среди живущих тогда геометров, и это было очень много, потому что Иван Бернулли тогда еще жил. Этот человек, покрытый славой стольких побед, должен был дать Эйлеру место рядом, и это после того, как он брал верх над всяким геометром Англии и Франции, который только осмеливался меряться с ним. Эйлеру тогда было 29 лет.

6. Другие работы Эйлера в это время. Мы уже указали, что с самого своего вступления в нашу Академию Эйлер обогатил «Commentarii» Академии огромным числом мемуаров, носящих печать его гения. В них Эйлер исчерпал теорию самых замечательных кривых, каковы таутохроны, брахистохроны, траектории и т. д. В этих же мемуарах содержатся самые глубокие изыскания по интегральному исчислению, о природе целого числа, по бесконечным рядам, по движению небесных тел, по притяжению эллипсоида, по столь многим предметам, что буквально одной двадцатой части общего количества сделанных им открытий было бы достаточно для того, чтобы сделать известным их автора.

Но наиболее крупным открытием, сделанным Эйлером в это время, является решение знаменитой проблемы изопериметров. Эта проблема была предметом спора двух братьев: Якова и Ивана Бернулли, из которых каждый претендовал на ее решение, но на самом деле никто из них не имел его. Эйлеру принадлежит полное решение. Самое количество и ценность этих мемуаров поистине изумительны, и не совсем понятным является, каким образом один человек смог выполнить все эти работы, один список которых приводит нас сейчас в смущение.

7. Музыка. Эйлер в ту пору был молод; имея от природы открытый и веселый характер, он был создан для общества. Но такое большое число

работ, столь различных по содержанию, естественно не оставляло ему времени для развлечений. Однако музыка для Эйлера была исключением: он охотно выкраивал для нее кусочек времени среди своих работ. Трудно сказать, какого рода удовлетворение давала Эйлеру музыка. Судя по работам Эйлера о музыке, это не было ни отдыхом, ни растворением до конца его «я» в потоке мелодии, но было лишь новой формой работы. Эйлер, отдаваясь приятным ощущениям гармонии среди аккордов, просто напросто вычислял пропорции. По крайней мере, отсюда возникла его «Теория музыки» («Tentamen novae theoriae musicae, ex cortissimis harmoniae principiis dilucide expositae», Petropolis), опубликованная в 1739 г. Это — глубокий труд, но не имевший успеха, потому что для математиков там было слишком много музыки, а для музыкантов — слишком много математики. Однако там дана теория музыкальных инструментов с ясностью и точностью, присущими Эйлеру; эта часть представляет высокую ценность.

Интересен принцип, положенный Эйлером в основу его труда по музыке: согласно этому принципу, чувство удовольствия возникает в уме от созерцания совершенства; и так как идеальный порядок вещей вызывает в нас сильнейшее чувство совершенства, то удовольствие, даваемое музыкой, состоит в восприятии отношений тонов между собою, порядка их следования и пропорций частоты колебаний.

Часто делались указания на недостаточность этого принципа и на невозможность все наши глубокие чисто внутренние движения подвергнуть счислению. Таким образом, рассматривая «Теорию музыки» Эйлера, приходится удивляться искусству архитектора, выстроившего здание хотя и совершенное во всех частях, но на движущемся фундаменте.

О «Теории музыки» Эйлера можно было бы и не упоминать совсем, если бы исторически именно отсюда не возник знаменитый спор о звучащей струне, которому суждено было стать центром сильнейшего движения идей на протяжении 150 лет, включая сюда и настоящий момент, приковывающих общее внимание.

8. Учебник арифметики. В это же время Эйлер опубликовал учебник по арифметике. Академии наук было предложено заняться составлением элементарных курсов. Эйлер не счел ни ниже своего достоинства, ни ниже своих сил заняться делом, имеющим столь высокую цель, какова народное образование, и с головою ушел в него, терпеливо участвуя во всех чрезвычайных комиссиях, созывавшихся по этому поводу. Учебник появился в 1738 г. В этом же году Парижская Академия наук удостоила премии его «Мемуар о природе и свойствах огня».

9. Приливы и отливы. Та же самая Парижская Академия наук в 1740 г. предложила на премию тему о морских приливах и отливах. Этот важный вопрос представлял исключительную трудность, так как требовал необъятных вычислений, опирающихся на теорию солнечной системы. Труд Эйлера, представленный в этом же, 1740 г. в Парижскую Академию наук и удостоенный ею одной трети премии, является настоящим шедевром анализа и геометрии. Парижская Академия разделила

премию на три части ввиду того, что соперниками Эйлера явились столь сильные люди, каковы были Даниил Бернулли и Маклорен. Никогда еще Парижская Академия не имела столь блестящей конкуренции и столь большой цены представленных ей мемуаров. Мемуар Эйлера «Inquisitio physica in causam fluxus et refluxus maris» дает решение, замечательное своею ясностью, с которой Эйлеру удалось выделить из хаоса разнообразных факторов действия солнца и луны; далее оно замечательно определением фигуры Земли, образованной этими двумя воздействиями; проницательностью, с которой Эйлер учел колебательное движение морей, вызываемое инерцией вод; выполнением труднейших интеграций, связанных с этими колебаниями, и проницательностью объяснения главнейших явлений прилива.

Интересно заметить, что не только результаты изысканий Эйлера согласуются с наблюдениями, но что они находятся в полном согласии с мемуаром Даниила Бернулли, хотя оба автора отправлялись от разных принципов. Один принимал гипотезу вихрей, другой ее отвергал, и тем не менее они пришли к одной и той же цели, получив несколько раз одни и те же численные результаты, например при определении приливов в полярном кругу.

Эйлер не раз встречался в своих результатах с другими геометрами и, в частности, с Даниилом Бернулли. Этот последний иногда имел то преимущество, что давал физическим принципам бо́льшую точность, чем Эйлер: Д. Бернулли имел терпение освобождать себя от вычислений тем, что предварительно, с большими проницательностью и искусством ставил опыты и на основании их делал выбор между гипотезами, которые иначе потребовали бы гигантских вычислений. Наоборот, Эйлер нисколько не тяготился вычислениями, и никакие формулы, как бы они ни были необъятны, никогда не стесняли его: такова была прозорливость Эйлера, что самая громоздкая формула гнулась в его сильных руках как мягкий воск и послушно давала под его усилиями все, что угадывала в ней его проницательность. Д. Бернулли и Эйлер были два ума совершенно различной натуры, организованные природой по-разному. В своем поистине изумительном чувстве формул Эйлер не знает себе соперников и по наши дни. Его инстинкт алгебраиста и геометра непосредственно чувствовать в формулах истину и ложь, его искусство комбинировать формулы, их оценивать численно, преобразовывать, мгновенно разгадывать природу результата были поистине изумительны. Можно без преувеличения сказать, что в глазах Эйлера математические формулы жили своей собственной жизнью и рассказывали глубочайшие вещи о явлениях природы и что ему достаточно было только прикоснуться к формулам, чтобы они из немых превращались в говорящие и дающие ответы, полные глубокого смысла.

10. Отъезд Эйлера в Пруссию. В 1740 г. началось тяжелое для России время регентства Бирона, и положение нашей Академии стало совсем шатким. В это время слава Эйлера гремела по всей Европе и его работы привлекали к себе совершенно исключительное внимание. Эйлер

чрезвычайно дорожил нашей Академией и чувствовал себя в ней очень хорошо. Но когда самое существование нашей Академии стало сомнительным, Эйлер получил предложение от прусского правительства переехать в Берлин. При этом имелось в виду оживить угасавшее вследствие продолжительной войны прежнее Ученое общество, основанное Лейбницем, и превратить его в Прусскую Академию наук. Эйлер оказался вынужденным принять это предложение и в 1741 г. выехал в Берлин. Ему тогда было 34 года.

В Берлине Эйлер нашел прежнее Ученое общество в полном упадке и приступил к организации нового ученого общества, частью из членов старого, частью из новых лиц. Тотчас же по приезде он украсил «Miscellanea Berolinensis» пятью своими мемуарами, из которых один замечателен тем, что в нем Эйлер дает современный способ интегрирования рациональных дробей путем разложения их на простые дроби и излагает обычный теперь способ интегрирования линейных дифференциальных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами («De integratione aequationum differentialium altiorum graduum»).

В 1744 г. учреждается Прусская Академия наук, и с этого времени Эйлер печатает в «Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin» каждый год от трех до девяти мемуаров.

11. Плодотворная деятельность Эйлера. Этот поток мемуаров в Прусскую Академию наук, содержащих всегда новые точки зрения и очень часто глубокие и важные открытия, становится тем более удивительным, что Эйлер, чрезвычайно дорожа нашей Академией наук, направлял в ее «Commentarii» половину своих трудов. Видя его произведения следующими столь быстро друг за другом, невольно начинаешь думать, что самые тонкие или сложные вычисления и самые глубокие размышления ему не стоили ничего. В настоящее время едва можно поверить, что жизни только одного человека было достаточно для выполнения всех этих работ. В дальнейшем, ввиду полной невозможности следовать хронологическому порядку возникновения в высшей степени многочисленных и разнообразных трудов Эйлера, мы будем соединять их в группы и давать группам самую краткую характеристику в несколько строк.

12. Начала вариационного исчисления. Рассматривая важную проблему изопериметров, Эйлер увидел громадную пользу этой проблемы как для самого математического анализа, так и для многих теоретических изысканий по физике. Он заметил, что все кривые линии, требуемые решениями физических проблем, получаются в результате решения одной только проблемы о максимумах и минимумах и что некоторые из них просто являются следствием метода изопериметров. Став на эту точку зрения, Эйлер возвысился до установления a priori того общего принципа механики и физики, в силу которого все действия природы и ее конечные причины имеют в виду лишь переход в состояние максимума или минимума того или иного выражения.

В ту эпоху Даниил Бернулли также инстинктивно чувствовал наличие в природе великого принципа максимумов и минимумов; он написал Эйлеру, что траектории, описываемые около центров сил, могут быть определены этой методой. Но Д. Бернулли не мог преодолеть трудностей связанного с этим делом математического анализа. Эйлер в 1744 г. выпустил в свет полный трактат по теории изопериметров [«Methodus inveniendi lineas curvas maximi minime proprietate gaudentes, sive solutis problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti»], в котором он закладывает основания вариационного исчисления, рассматривая бесконечно малые деформации кривых. После Эйлера изменилось только изложение решения этих вопросов, но сущность его методы осталась та же.

13. Планеты и кометы. В том же 1744 г. Эйлер опубликовал трехтомную теорию движения планет и комет («Theoria motuum Planetarum et Cometarum continens methodum facilem ex aliquot observationibus orbitas cum Planetarum cum Cometarum determinandi»). Здесь Эйлер дает способ определять их орбиты из нескольких наблюдений. К этой теории Эйлер потом возвращается, обогащая ее многими открытиями.

14. Магнетизм. В этом же, 1744 г. Эйлер получил премию Парижской Академии наук за свою теорию магнетизма («Dissertatio de magnete»), основанную на предположении о протекании эфира в промежутки между атомами, и о вихрях, образующихся вследствие этого протекания. Теория эта была в состоянии объяснить все факты магнетизма, известные во время Эйлера.

15. Артиллерия. Состояние войны вызывало особенный интерес к артиллерии. Прусское правительство обратилось к Эйлеру за советом относительно лучшего трактата по этому предмету.

В то время появился в Англии труд Робинса, известного в истории артиллерии изобретателя баллистического маятника, где были приведены различные выводы по внешней и внутренней баллистике. Автор этого труда в свое время резко критиковал «Трактат по механике» Эйлера, не понимая его идей. Эйлер рекомендовал труд Робинса, перевел его с английского на немецкий и снабдил своими «добавлениями». Эти «добавления» были не чем иным, как собственно полной теорией полета снаряда; в них Эйлер выводит теоретически закон сопротивления в виде двучлена, первый член которого, пропорциональный квадрату скорости, обусловливается ударом снаряда о воздух; второй же член, пропорциональный биквадрату скорости, обусловливается перевесом давления сжатых частей струй воздуха на переднюю часть над давлением разреженных частей струй на заднюю. В своем тексте Эйлер полностью отдавал должное Робинсу, скромно указывая на некоторые погрешности его выводов, происходящие от противоречия указываемой им теории.

Ничего подобного раньше не было сделано в баллистике. Французское правительство распорядилось немедленно перевести эту книгу с немецкого на французский и ввести в военные школы; одновременно с этим появился английский перевод этой книги в роскошном издании. Можно без колебания сказать, что Эйлер в сильнейшей степени содействовал своими добавлениями известности книги Робинса. Немецкий текст книги Робинса с добавлениями Эйлера («Neue Grundrisse der Artillerie von Robins») вышел в 1744 г. Впоследствии (в 1753 г.) Эйлер усовершенствовал формулы баллистики и придал им вид, удобный для применения («Recherches sur la véritable courbe que décrivent les corps jetés dans l'air ou dans un autre fluide quelconque». Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin).

В 1746 г. были напечатаны три тома различных статей Эйлера («Varia opuscula»), где он от вопросов баллистики о полете круглых ядер переходит к космическим вопросам и изучает сопротивление эфира, оказываемое таковым движению планет.

16. Свет и звук. Признавая эфир причиной пламени, тяготения, электричества и магнетизма и дойдя даже до вычисления того малого сопротивления, которое эфир оказывает движению планет, Эйлер не мог быть удовлетворенным ньютоновой теорией света, согласно которой причина световых явлений усматривалась в эманации световых частиц. Эйлер рассматривал гипотезу пустоты мирового пространства, принятую Ньютоном, как находящуюся в противоречии с материальной эманацией Солнца и неподвижных звезд. По мнению Эйлера, материальные частицы, образующие по Ньютону лучи Солнца и звезд, скрещивались бы повсюду, наполняли бы все пространство и представляли бы такое сопротивление движению планет, какого не может оказать эфир, отрицаемый Ньютоном как раз именно по этой самой причине. Эйлер стремился показать, что материальные частицы не могут двигаться со скоростью света, потому что они имели бы неустойчивую траекторию; он вычисляет, что масса Солнца оказалась бы истощенной в несколько секунд; наконец, Эйлер стремится доказать, что прозрачные тела, чтобы дать место пронизывающим их «частицам света» Ньютона, должны были бы быть лишены всякой материи, т. е. перестать быть телами.

Эйлер взял за исходную точку зрения аналогию между звуком и светом и рассматривал свет как вибрацию эфира. Он рассматривал качественные различия в окраске света и тонах звука, как происходящие от изменения частоты колебаний. Явления преломления света он уподоблял преломлению звука. Эти принципы, по мнению Эйлера, позволили ему рассматривать и объяснять явления света гораздо более естественно, чем у Ньютона, и выводить явления a priori, если бы они не были известны на опыте.

17. Философия. В ту эпоху философией, направлявшей течение мыслей, было вольфианство. Повсюду только и говорили, что о принципе достаточного основания и о монадах. Эйлер добродушно смеялся над первым принципом, возводимым его поклонниками в прямую нелепость; но он чрезвычайно серьезно относился к идее монад, которую рассматривал как гениальное заблуждение, опровержение которого даст много новых открытий. Здесь Эйлер ищет прежде всего установить, что неделимая частица материи есть чистое ничто; что элементы материи, кроме общего их свойства протяженности и непроницаемости, имеют все без исключения столь же общее им свойство инерции; что, наконец, элементы материи не могут быть наделены силой непрерывно изменять свое состояние, и что

все заключения, которые выводятся из принципа неразличимых о различии этих сил, должны быть решительно отброшены. Разрушая таким образом могущественную философскую систему, из которой вытекали величественные, но совершенно неверные идеи, Эйлер заменил свойства монад Лейбница и Вольфа одной только силой инерции, важность которой понял в свое время сам Лейбниц. Эйлер положил силу инерции как принцип всех возможных изменений, происходящих в мире. В частности, Эйлер выводил из этого принципа законы удара и давления и на основании его же доказывал, что материя вовсе не одарена способностью мыслить.

Возражения Эйлера против монад, разумеется, навлекли на него критику, но она была забыта вместе с самою монадологией, которая потом стала рассматриваться как пример заблуждения человеческого ума, руководящегося одним лишь воображением. Совсем иное являл принцип инерции Эйлера; он вполне соответствовал величию и вместе с тем той простоте, с которой природа проявляет свою активность. Притом этот принцип тесно соприкасался с геометрией: его следствия могли быть точно вычислены и могли служить для описания и предсказания феноменов.

Таким образом, Эйлер понимал философию, как натур-философию, и здесь его любознательность не имела предела, проявляясь в виде глубоких и творческих идей. Здесь мы находим изыскания Эйлера о хвостах комет, о северном сиянии, о зодиакальном свете, о скорости звука и света, о пространстве и времени, о природе силы и т. д. Все это Эйлер рассматривал в своих бесчисленных статьях, анализировать которые нет возможности, раз мы хотим сосредоточиться на больших его трудах.

18. Навигация. До Эйлера навигация не извлекала ничего из тех открытий, которые были сделаны в анализе, геометрии и физике. Была до известной степени разработана лишь гидрографическая часть навигации и еще та ее часть, которая относится к направлению курса судов; это было сделано соединенными усилиями геометров и астрономов. Но о маневрах судов и их скорости не было ничего известно, если не считать несовершенных попыток Гюйгенса и Шевалье де Рено.

Эйлер первый осмелился замыслить и привести в исполнение проект превращения навигации в точную науку. Его ранние этюды по равновесию судов дали ему возможность характеризовать устойчивость числом. Отправляясь от этого, Эйлер оставил большой труд в двух томах, опубликованный нашей Академией наук в 1749 г. («Scientia navalis, seu tractatus de constructione ac dirigendis navibus»).

Сначала Эйлер предполагал ограничиться общей теорией равновесия и движения плавающих тел, а также сопротивления жидкостей. Но он скоро увидел, что этих принципов было недостаточно и что надо было атаковать полную теорию судов, как таковых. Нужно было дать вычисление сопротивления судна и величины движущих им сил. Нужно было дать правила их конструкции и маневрирования и научиться определять наивыгоднейшее взаимоотношение частей с тем, чтобы найти нужную пропорцию таких взаимно противоречивых требований, каковы скорость и устойчивость.

Надо было узнать, ввиду того или иного специального назначения судна, до какой степени можно жертвовать одним качеством, чтобы увеличить нужные другие. Все это составило второй том труда Эйлера, содержавший теорию равновесия и устойчивости судов, вопросы о качке на зыби, о форме судов и кораблестроении, о движении судов силой ветра и об управлении судном.

Эйлер пополнил этот труд серией мемуаров, напечатанных частью у нас, частью в Берлине. Из них «Мемуар о боковой и килевой качке судов» получил в 1759 г. премию Парижской Академии наук.

Благодаря труду Эйлера морское кораблестроение, державшееся раньше, за отсутствием принципов, эмпирических правил и рутины, внезапно обогатилось полной теорией, в то время как общая архитектура продолжала развиваться лишь ощупью и очень медленно. Этот труд Эйлера, написанный на языке высшей математики, был недоступен ни строителям, ни капитанам. Поэтому впоследствии Эйлер, уже по возвращении в Россию, опубликовал в 1773 г. полную теорию кораблестроения и маневрирования судов, откуда было изъято все, не находившееся в тесном соприкосновении с морским делом, и где были даны расчеты, которыми могли пользоваться уже непосредственно и строитель и капитан.

Никогда еще книга, содержавшая теоремы геометрии, не имела такого успеха. Труд Эйлера был издан в Париже; его ввели там в морские училища, и французское правительство ассигновало Эйлеру 6000 франков за его открытия в морском деле. Тотчас же после этого появились итальянское и английское издания этого труда Эйлера.

19. Эйлер как инженер. Прусское правительство, вполне оценившее разносторонний гений Эйлера, давало ему поручения чисто инженерного характера. Так, в 1749 г. Эйлеру было поручено осмотреть канал Фуно между Гавелем и Одером и указать необходимые исправления в недостатках этого водного пути; далее, ему было поручено исправить водоснабжение в Сан-Суси. По поводу этого появилось не мало статей, написанных Эйлером в разное время.

20. Трактат по математическому анализу. Назрело время собрать в один систематический труд то огромное число важных открытий, которые Эйлер сделал в анализе бесконечно малых в течение 30 лет и которые были рассеяны в самых различных академических изданиях. Эйлер задумал план; но нужно было подготовить ученый мир, способный оценить этот фундаментальный труд, выпустив предварительную книгу, где нашли бы место самые основные понятия, требуемые трактатом. И таким образом Эйлер был приведен к мысли составить свое знаменитое двухтомное «Введение в анализ бесконечно малых» («Introductio in analysin infinitorum»), изданное в Лозанне в 1748 г. В первом томе с необыкновенной ясностью и простотой изложены свойства функций рациональных и трансцендентных: тригонометрических, круговых, показательных, логарифмических, разложение последних в ряды, представление их в виде бесконечных произведений; свойства непрерывных дробей; беско-

нечные ряды и их суммирование; рекуррентные ряды. Во втором томе Эйлер указал аналитическое исследование кривых линий вообще, и в частности кривых 2, 3 и 4-го порядка и поверхностей 2-го порядка. В четвертой главе даны формулы преобразования прямоугольных координат в прямоугольные же; здесь впервые вводятся те три знаменитых угла, которые называются до сих пор эйлеровыми углами и которые играют в кинематике твердого тела такую выдающуюся роль. Там же дается теория линий двоякой кривизны и изучается пересечение поверхностей.

Это «Введение», даже в самую эпоху Эйлера, утвердило за ним славу величайшего математика. Нужно иметь в виду, что почти все то, что преподается и теперь в курсах высшей алгебры и высшего анализа, находится в этой книге Эйлера.

За этим «Введением» последовал и самый «Трактат по анализу бесконечно малых» в четырех томах, причем первый том, посвященный дифференциальному исчислению и изданный в Берлине, появился в 1755 г. («Institutiones Calculi differentialis cum eius usu in Analysi Finitorum ac doctrina serierum»), а три остальных тома, посвященные уже интегральному исчислению, были изданы в 1668—1770 гг. нашей Академией («Institutiones Calculi Integralis» Petropolis), которую Эйлер не переставал рассматривать как законную собственницу его больших трудов.

Дифференциальное исчисление было уже усовершенствовано Ньютоном и Лейбницем, а также семьею Бернулли. Но, что сюда было внесено Эйлером, состоит прежде всего в точке зрения, с которой он рассматривал принципы дифференциального исчисления, в единстве метода, в той ясности, с какою он показал пользу этого исчисления для рядов и максимумов — минимумов, наконец в систематическом порядке материала. В этом томе открытия Эйлера скрещиваются с открытиями первых изобретателей дифференциального исчисления; сила Эйлера здесь всюду заметна, как в изложении принципов и сведении их к величайшей очевидности и простоте, так и в получении новых следствий.

Но в то время как дифференциальное исчисление в отношении общих правил дифференцирования было доведено до конца еще Лейбницем, интегральное исчисление и до сих пор не имеет, как известно, никаких общих правил, которые позволили бы отличить неинтегрируемую функцию от интегрируемой и найти фактически интеграл в этом последнем случае. Следует тут же заметить, что вся мощь гения Эйлера как раз и выразилась в том, что доведенные им до конца многочисленные интеграции и найденные им квадратуры еще до сих пор образуют рамки всех современных курсов и трактатов по интегральному исчислению: математика в течение 150 лет после смерти Эйлера не смогла пробить бреши в том кольце интеграций, которое было выковано Эйлером, и, таким образом, добавить новые квадратуры. Без всякого преувеличения можно сказать, что, несмотря на все попытки сильнейших математиков и педагогов, живших после Эйлера до наших дней и желавших или расширить рамки выполненных интеграций или просто сказать новое слово в самом изложении интегрального исчисления, — это последнее все еще остается в том же самом виде, каким его дал Эйлер, и все новейшие усилия вращаются по-прежнему в том же замкнутом круге. В отношении интегрального исчисления современные учебники являются лишь переделками трактата Эйлера, только подновлением этого труда в отношении языка, но самая материя остается неизменной, такой, какой ее дал Эйлер. Слава Эйлера заключается еще в том, что он раздвинул границы интегрального исчисления до пределов, о которых не мечтали его основатели — Ньютон и Лейбниц.

В этом труде Эйлера мы находим решение множества вопросов точного и приближенного интегрирования дифференциальных уравнений разных степеней и порядков и дифференциальных уравнений с частными производными.

Третий том «Интегрального исчисления» Эйлера содержит новое «Вариационное исчисление», которым он обогатил математический анализ. Мы уже видели, что проблема изопериметров побудила Эйлера положить принципы нового исчисления. Лагранж, достойный преемник Эйлера в Берлинской Академии наук, освободил рассмотрения Эйлера от всяких геометрических интуиций и придал им форму независимого исчисления математического анализа. Лагранж сильно усовершенствовал его и назвал «Вариационным исчислением».

21. Цвета и телескопы. Гений Эйлера не мог удерживаться в определенных рамках, как бы широки они ни были. Все, что имело хотя малейший намек на числовое отношение, тем самым уже привлекало его внимание, а что подлежало изменению, он подвергал счислению и алгорифму. Ранние исследования Эйлера по ньютоновой теории света привели его к изысканиям о различной преломляемости лучей света в одной и той же прозрачной среде и к определению дурного влияния этого явления на рефракторы, которые к тому времени стали вытесняться зеркальными телескопами как раз вследствие этого вредного эффекта хроматизма. Изучение устройства животного и человеческого глаза привело Эйлера к мысли о комбинации нескольких прозрачных линз, дающих неокрашенное изображение. В 1747 г. Эйлер предложил сложный объектив, составленный из двух стекол с внутренней полостью, наполненной водой («Sur la perfection des verres objectifs, des lunettes». Mémoires de Berlin).

С Эйлером вступил в спор знаменитый английский художник Доллонд, защищавший теорию Ньютона, но Эйлер без труда доказал ошибочность принципов Доллонда. Кроме того, Эйлер стал проделывать эксперименты со стеклами, внутренние полости которых наполнялись различными жидкостями, и эти эксперименты подвердили верность соображений Эйлера: его модель животного глаза не давала той вредной окраски изображения, из-за которой в самом своем принципе был забракован рефрактор.

В 1757 г. Доллонд, проверяя опыты Эйлера, заменил жидкую среду твердой прозрачной средой — стеклом несколько другого состава и таким образом пришел к изобретению ахроматического объектива, составившего эру в астрономии и диоптрике. Тем не менее, начало этого изображения лежит в принципе ахроматизма, открытом Эйлером, так как Доллонд руководился лишь указаниями Эйлера, вернее — следовал им против своей воли, желая опровергнуть на опытах теорию Эйлера.

Эйлер, обрадованный успехами Доллонда и его изобретением, продолжил свои изыскания по теории оптических инструментов, доказал неблагоприятность сферической формы линз, указал на способы освободиться от ее недостатков и, наконец, дал теорию телескопов и микроскопов, верность которой была такова, что оптические инструменты стали строиться с тех пор сообразно с ней. Таким образом, спор Эйлера с Доллондом относительно теории цветов Ньютона привел к величайшему открытию этого века — ахроматическому рефрактору, оказавшему астрономии трудно оценимые услуги в изучении неба.

22. Спор о звучащей струне. Этот знаменитый спор между Эйлером, Даламбером, Даниилом Бернулли и Лагранжем, начавшийся в 1747 г., но созревавший задолго перед этим, можно рассматривать как продолжающийся и в наши дни, причем новые и новые сильнейшие ученые каждой эпохи в свою очередь втягиваются в этот спор. Трудно даже перечислить те глубокие и тончайшие идеи, которые возникли и продолжают возникать из этого спора. Сущность этого спора должна составить предмет отдельного очерка.

23. Спор о принципе наименьшего действия. Другой спор, короткий, но острый, возник между Кенигом, атаковавшим в 1751 г. принцип наименьшего действия, и Мопертюи, которому он отказывал в приоритете. Прямым образом Эйлер здесь затронут не был, хотя дело шло именно об открытии, сделанном, как помнит читатель, самим Эйлером. Вмешавшись в этот спор, Эйлер с дружеским участием принял сторону Мопертюи, и единственные превосходные мемуары Мопертюи, никогда не написавшего других мемуаров, были обязаны этому спору.

24. Движение Земли. Решение Даламбером важной задачи относительно предварения равноденствий и колебаний земной оси побудило Эйлера опубликовать свои изыскания по этому вопросу в V томе «Mémoires de Berlin», там же, где Эйлер напечатал свое решение спора, происходившего между Лейбницем и Иваном Бернулли относительно логарифмов отрицательных и мнимых чисел. Задача о предварении равноденствий заставила Эйлера выполнить изыскание относительно движения твердого тела при переменной оси вращения. Для изучения такого движения известных тогда основных теорем механики было недостаточно. Следовало поэтому еще раз обратиться к принципам учения о движении и постараться отсюда вывести общие правила для определения движения твердого тела при переменной оси вращения. Эйлер кончил тем, что открыл новый принцип механики, позволивший ему трактовать во всей общности проблему движения твердого тела.

Эти изыскания Эйлера пролили уже совсем новый свет на всю науку о движении. В своем прежнем «Трактате по механике» Эйлер довольствовался изучением движения точки или системы конечного числа точек. Но трактование самой трудной и самой существенной части механики — движения твердого тела — было тогда отложено и было сделано Эйлером лишь в 1765 г. («Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum. Rostock»). Этот труд нужно рассматривать как полный трактат о механике, потому что Эйлер присоединил к нему в форме «Введения» изложение всех принципов движения точек, рассмотренных уже по иному, чем раньше, и с гораздо бо́льшими полнотой и ясностью. Сюда вошли все его открытия по движению твердых тел. Это сообщило новый прогресс теории движения небесных тел, астрономии и навигации.

25. Возвращение в Россию и слепота. Биографы Эйлера утверждают, что он всегда очень желал возвратиться в Россию. Можно установить, что Эйлер действительно никогда не прерывал связи с нашей Академией Наук, оказывая ей ценные услуги либо путем предоставления ей важнейшей части своих трудов, либо занимаясь научным воспитанием присылаемой время от времени русской молодежи. Нужно прибавить, что за Эйлером всегда сохранялось звание действительного члена нашей Академии. По-видимому, Эйлера действительно всегда тянуло возвратиться в страну, где он провел первые годы своей молодости, и в общество, видевшее рождение его славы. В 1766 г. Эйлер покинул Берлин, где он прожил 25 лет в полном блеске своей славы. Прусское правительство едва согласилось его отпустить и сначала задержало его младшего сына, который по истечении некоторого времени был отпущен лишь по особому ходатайству русского правительства.

Едва устроившись в России, Эйлер заболел очень тяжело и выздоровел, лишившись другого глаза: образовавшийся катаракт на левом глазу совершенно лишил Эйлера зрения. Можно легко себе представить, что такая утрата стала бы роковой для всех тех, для кого работа сделалась необходимостью и чей ум непрестанно был возбуждаем новыми открытиями. Но этим нельзя было сломить Эйлера. Его изумительная память и пламенное воображение, еще более усилившееся от концентрации ума, не развлекаемого более никакими внешними впечатлениями, заменили утрату органа, с гибелью которого, казалось, кончалась научная деятельность этого человека.

Мальчик-портной, вывезенный Эйлером из Берлина для личных услуг, не имевший никакого математического образования, сделался писцом, которому Эйлер диктовал свои «Элементы алгебры» («Anleitung zur Algebra», 2 т., 1770), величайшая ясность и стройность которых вызывает удивление, не говоря уже об обстоятельствах, при которых Эйлер составлял этот труд. Дух открытий царит в этом, собственно совсем элементарном курсе, содержавшем, среди прочих новостей, впервые диофантов анализ. Этот труд был тотчас же переведен на русский и французский языки.

26. «Диоптрика». Прибытие в Академию математика Крафта сделало возможным для Эйлера реализовать проект, давно сложившийся у него в голове: собрать в один труд все те многочисленные размышления и открытия по теории оптических инструментов, которые у него были сде-

ланы на протяжении 30 лет. С обычной горячностью Эйлер взялся за это дело и опубликовал в 1769, 1770 и 1771 гг. три больших тома «Диоптрики» («Dioptrica». Petropolis).

Первый том содержал общую теорию этой новой науки, которая до эпохи, созданной Эйлером, просто не существовала. Чрезмерная длина астрономических труб, которой нельзя было избежать до изобретения составных объективов, неясность изображений — заставили астрономов избегать систематическим образом рефракторов и прибегать к отражательным телескопам. Но расчет телескопов того и другого вида был в состоянии хаоса, несмотря на то, что высшего анализа там почти не требовалось. И несмотря на потребность в одной лишь элементарной геометрии, эта часть диоптрики получила прогресс и полноту лишь с работами Эйлера.

Второй и третий тома «Диоптрики» содержат правила наилучшего расчета рефракторов, рефлекторов и микроскопов. Вычисление аберрации, проистекающей от сферичности стекол, есть настоящий шедевр математического анализа. Можно изумляться искусству, с которым математический анализ в руках Эйлера дал ответ на самые жгучие вопросы о наиболее выгодных качествах инструмента: наибольшей яркости изображения, наибольшем поле зрения, наименьшей длине инструмента, наибольшем увеличении и о числе окуляров. Все виды оптических инструментов были поставлены в теорию и в расчет слепым Эйлером, создавшим условия наилучшего видения в оптических инструментах.

27. Интенсивность работы Эйлера. В то время как наша Академия была занята опубликованием «Диоптрики», в ее типографии лежали: «Письма Эйлера к немецкой принцессе», три тома «Интегрального исчисления», два тома «Элементов алгебры», «Вычисления кометы 1769 г.», «Вычисления затмения Солнца и прохождения Венеры в 1769 году», «Новая теория Луны», «Навигация» и большое число мемуаров Эйлера, напечатанных в «Commentarii» нашей Академии в этом же году.

Едва «Письма к немецкой принцессе» («Lettres à une Princesse d'Allemagne sur quelques sujets de Physique et de Philosophie», три тома, Petropolis, 1768—1772) появились, как были переведены на русский язык, затем тотчас же появилось французское издание в Париже и немецкий перевод в Лейпциге. Эти книжки немало способствовали популярности Эйлера среди образованных лиц, которые не были в состоянии судить об Эйлере по его чисто математическим трудам.

28. Солнечный параллакс и Луна. 1769 г. навсегда останется памятным в истории прогресса наук. В этом году могло быть наблюдаемо прохождение Венеры через солнечный диск, сопровождаемое полным затмением Солнца. Для выполнения этих ценнейших наблюдений правительства России, Франции, Англии и Испании отправили астрономов во все части света для наблюдения столь редкого феномена, который был столь важен для определения размеров солнечной системы. Десять астрономов были отправлены в разные концы России, в то время как Эйлер размышлял над новой методой, которая позволила бы ему из этих наблю-

дений получить истинный параллакс солнца и, следовательно, узнать расстояния всех планет. Эйлер нашел очень изящный способ для вычисления не только наблюдений прохождения Венеры, но и следующего за ним затмения Солнца, и показал, как этими данными можно было воспользоваться для определения географического положения места наблюдения. Вычисление по этой новой методе Эйлера было выполнено Лекселлем. Таким образом, астрономия обязана Эйлеру большим прогрессом, вытекающим из точного определения параллакса Солнца.

Проблема Луны занимала значительную часть времени Эйлера. Он уже опубликовал в 1746 г. «Таблицы Луны» («Novae et correctae tabulae ad loca Lunae computanda») и в 1753 г. «Теорию лунных движений» («Theoria motuum Lunae, exhibens omnes corporum inaequalitates, cum additamento». Berlin). На основании этой теории Майер составил таблицы, которые были в постоянном употреблении у всех астрономов и за которые он получил премию Бюро долгот. Английский парламент ассигновал в то же самое время Эйлеру 300 фунтов стерлингов за теоремы, послужившие Майеру в том прогрессе, который он внес в важную проблему определения долготы.

В это самое время Эйлер был «присоединенным членом» Парижской Академии наук («associé»). Число таковых по статутам Парижской Академии наук полагалось восемь. Но ввиду совершенно исключительного влияния Эйлера на науку его эпохи, Парижская Академия наук в обход статута, с согласия французского правительства, определила Эйлера своим девятым «присоединенным членом», постановив, что первое освободившееся место присоединенного члена не будет замещено никем. Этот высокий знак уважения к гению Эйлера был оказан в 1755 г., когда Эйлеру было 48 лет. За это время Парижская Академия наук трижды премировала его мемуары о неравенствах в движении планет. В 1770 и 1772 гг. Парижская Академия наук избрала предметом премии усовершенствование теории Луны, и Эйлер, с помощью своего старшего сына, получил обе эти премии («Théorie de la Lune et spécialement sur l'équation séculaire», 1770; «Nouvelles recherches sur le vrai mouvement de la Lune», 1772).

Эйлер нашел способ учесть некоторые неравенства в движении Луны, которые были ему недоступны в первой его теории вследствие ужасающих сложностей вычисления, которые вызывались его прежней методой. Он имел мужество переобосновать всю теорию Луны с помощью своего старшего сына и профессоров Крафта и Лекселля и довести изыскания вплоть до построения новых таблиц, присоединенных к его большому труду 1772 г. («Theoria motuum Lunae nova methodo pertractata, una cum tablis astonomicis, unde ad quoduis tempus loca Lunae expedite computare licet». Petropolis). Здесь вместо того, чтобы остановиться, как он это делал раньше, на бесплодном интегрировании трех дифференциальных уравнений 2-го порядка, пишущихся на основании принципов механики, Эйлер сначала отнес все вычисления к трем координатам, которые определяют положение Луны. Затем он распределил все неравенства

Луны на классы, смотря по тому, зависели ли они от среднего расстояния Солнца или Луны, или от эксцентриситета, или от параллакса, или от наклона лунной орбиты. Все эти процессы, выполненные с таким искусством и с такой изощренностью в вычислениях, которые были под силу только первому аналисту в мире, удались выше всех ожиданий. Когда рассматривают эти вычисления, то не знают, чему больше удивляться, необъятности ли самих вычислений, неисчерпаемому ли богатству приемов, предназначенных для сокращения вычислений и для того, чтобы облегчить употребление их в практике, или самому замыслу определения истинного движения Луны.

29. Терпеливость и спокойствие. Терпение и спокойствие ума, которые требовались этими гигантскими работами, становятся тем более изумительными, если учесть обстоятельства, в которых они слагались. Слепому, обязанному распоряжаться и следить за всеми этими необъятными вычислениями одной только силой своей памяти и воображения, Эйлеру выпало на долю претерпеть катастрофу, вызванную пожаром его дома. В этом пожаре сгорело почти все достояние Эйлера и его большой семьи. В частности, сгорели все черновики его теории Луны, и Эйлер, вместе с сыном, был вынужден снова восстанавливать всю теорию Луны и проделывать во второй раз все вычисления. Не следует упускать из виду, насколько это было трудно слепому Эйлеру, привыкшему к каждому уголку своего прежнего дома, где он имел твердую привычку к расположению всех своих вещей, заменявшую ему зрение, и теперь вынужденному подвергнуться всем заботам и беспокойствам, связанным с переменою места. И тем не менее Эйлер смог выполнить этот колоссальный труд, которого одного было бы достаточно для сохранения в памяти потомства в течение веков его имени, выполнить с такой четкостью, ясностью и уверенностью, как если бы он работал в самых спокойных и лучших условиях.

К тому же это несчастье не пришло к нему одно. Вскоре после пожара знаменитый венский окулист произвел операцию снятия катаракта с глаза Эйлера и возвратил ему зрение к великой радости самого Эйлера и всей его семьи. Но радость эта длилась недолго. Эйлеру было не под силу выдержать необходимое после операции время отдыха глаза и, пренебрегая предостережениями и слишком торопясь начать пользоваться зрением для работы, Эйлер вторично потерял зрение, и уже навсегда, среди сильнейших страданий.

Эйлеру пришлось опять прибегнуть к необходимости пользоваться чужими глазами, как он это делал до операции. Оба его сына и профессора Крафт и Лекселль продолжали попеременно предоставлять в распоряжение Эйлера свои глаза, либо для выполнения огромных трудов, либо для того громадного числа мемуаров, которые находятся в «Novi Commentarii» нашей Академии наук.

Не анализируя эти мемуары, укажем на две последних больших работы Эйлера.

30. Гидродинамика. Со времени появления в свет «Гидродинамики» Даниила Бернулли чисто аналитические методы в руках Эйлера достигли такой степени совершенства и силы, стали настолько богатыми и гибкими и приложимыми к самым трудным проблемам физико-математических наук, что от Эйлера все ждали применения анализа к гидротехнике. Эйлер удовлетворил этим ожиданиям и выпустил в свет четыре больших мемуара о равновесии и движении непрерывных сред, дав в них общую абстрактную и вместе с тем глубокую теорию гидродинамики.

Эта теория оказалась с самого же начала чрезвычайно плодотворной как в отношении гибкости применения общих принципов, так и в отношении объяснения некоторых явлений природы. Так, Эйлер объяснял общую причину ветров разностью давлений и температур воздушных масс, в частности причину муссонов и периодических ветров в Индии. Под его объяснения подпала фигура Земли и окружающих ее непрерывных сред, а также явления прилива. В своей общей теории Эйлер свел всю теорию движения непрерывных сред к двум дифференциальным уравнениям 2-го порядка и применил общие принципы к движению воды в сосудах и в трубах переменного сечения. Применяя свои общие уравнения к воздуху, Эйлер мог дать объяснение возникновения и распространения звука в духовых инструментах.

31. Теория объективов. В прежних трудах по диоптрике Эйлер для упрощения вычислений пренебрег взаимным расстоянием стекол, из которых состояли объективы, а также и их толщиной. Но это пренебрежение могло вредно отзываться на четкости изображения. Новые мемуары о составных объективах были напечатаны в XVIII томе «Novi Commentarii». В них Эйлер исправил недостатки прежних мемуаров и указал средства сделать инструменты еще более короткими и их поле зрения еще бо́льшим, чем прежде. Только новые вычисления Эйлера позволили осуществить этот прогресс. Соответствующие правила Эйлера для оптиков-конструкторов были опубликованы нашей Академией и тотчас же были переведены за границей.

32. Теория вероятностей. Общие нарекания в Германии на кассы страхования и обвинения в пристрастности то к предпринимателям, то к вкладчикам заставили Эйлера предпринять изыскания о безобидном ведении предприятий этого рода, насколько это позволяло несовершенство таблиц смертности. Эти изыскания Эйлера относительно вдовьих касс были напечатаны в 1776 г. Здесь, как и в своих мемуарах, относящихся к этому вопросу, Эйлер ищет усовершенствовать самую теорию вероятностей.

33. Научная продуктивность Эйлера. Трудно себе составить представление о научной продуктивности Эйлера; практически, по-видимому, она была безграничной. Некоторые указания на ее размеры может дать хотя бы следующий факт: Эйлер, находясь уже в преклонном возрасте, получил несколько странное, на наш взгляд, предложение от

лиц, близко стоявших к правительству, оставить после своей смерти столько мемуаров, чтобы наполнять ими «Actes» нашей Академии наук в течение 20 лет. Эйлер был человек твердого слова. Ни утрата зрения, ни недомогания преклонного возраста, ни огромное число сделанных им открытий не могли ни ослабить его жара работы, ни сокрушить его счастливо устроенный организм, ни истощить его творческого гения. В течение семи лет Эйлер представил Головину 70 мемуаров и оставил после смерти в готовом виде около 250 мемуаров.

Среди этих мемуаров нет ни одного, который не содержал бы нового открытия или важного результата, либо какой-нибудь новой точки зрения или указания на новую методу, которая могла бы повести к новым открытиям. Здесь мы находим новые счастливые интеграции, массу новых глубоких приемов математического анализа; глубочайшие изыскания о природе и свойствах целых чисел; остроумные доказательства некоторых утраченных теорем Ферма; решение множества очень трудных проблем о равновесии и движении твердых тел, тел гибких и упругих; объяснения нескольких кажущихся парадоксов; дальнейшее усовершенствование теории движения небесных тел, их взаимных действий и их иррегулярностей, поскольку вычисления, ведущиеся его сильными руками, позволяли оценить это численно.

Мемуары по теории чисел многочисленны. Эйлер занимается в них диофантовым анализом, доказывая многие свойства чисел, указанные раньше его без доказательства. Так, он доказывает, что всякое простое число вида $4n + 1$ есть сумма двух квадратов. Эйлеру же принадлежит доказательство соотношения между числом вершин, ребер и граней многогранника. Соотношение это такое: сумма числа вершин и граней равна числу ребер плюс два. Такое соотношение подозревал еще Декарт, но только Эйлер доказал его в своих мемуарах.

34. Смерть Эйлера. Эйлер до самого дня своей смерти сохранял полнейшую ясность мышления и всю мощь своей творческой силы. В этом отношении на нем не сказались никакая деградация, ни постепенное угасание умственных сил, обычно сопровождающее преклонный возраст. Несколько головокружений за неделю были единственными предвестниками его смерти, последовавшей 7 сентября 1783 года.

Еще в первых числах сентября Эйлер подверг вычислению полет аэростата, который был в ту эпоху большой новостью, имея в руках лишь те скудные данные, которые были тогда известны. Эйлер почти закончил весьма трудную интеграцию, которую это вычисление требовало.

В самый день смерти Эйлер беседовал с Лекселлем в кругу сотрудников и учеников о новой планете. В этой беседе его и застигла смерть, происшедшая от удара. Эйлер умер 75 лет, 5 месяцев и 2 дней от роду.

Эйлер имел большую семью; он женился в возрасте 25 лет и имел 13 человек детей, из которых 8 умерло в раннем детстве. В момент смерти Эйлер имел 26 внуков, и в настоящее время имеются представители его семьи, носящие ту же фамилию.

35. Общая характеристика Эйлера. Несомненно, Эйлер имел крепкое и устойчивое сложение, которое выдержало столько болезней, притом столь сильных, и, главное, которое не было сломлено таким напряжением в работе.

Эйлер обладал в высшей степени тем, что называется эрудицией. То лучшее, что имелось в его эпоху от античных писателей, Эйлер все прочел. Прежняя математическая литература ему была превосходно известна. Он мог без всякого колебания точно цитировать по памяти малейшие факты. Он знал еще медицину, ботанику, химию в гораздо большем размере, чем это было доступно ученому, не посвятившему себя всего этим дисциплинам.

Это было эффектом его изумительной памяти, вызывавшей общее удивление тем, что Эйлер сохранял в памяти столько фактов, совершенно чуждых ему и бесполезных для него. Эйлер мог читать наизусть всю Энеиду, с одного конца до другого, цитировать первый и последний стих на каждой странице того издания, которое он читал в молодости. Другим примером его памяти служит следующий факт. Эйлер давал своим внукам уроки по алгебре. Извлечение корней принуждало Эйлера предлагать им только такие числа, которые были точными степенями. Однажды, во время бессонницы, Эйлер начал находить их в уме и в одну ночь вычислил шесть первых степеней всех чисел, меньших 20. Через несколько дней, к общему изумлению, Эйлер все их прочел. Эйлер с изумительной легкостью переходил от самых серьезных размышлений к обычным разговорам, по миновании которых он мог мгновенно возобновить оставленную им нить мысли.

Эйлер обладал прямым характером и, видя несправедливость, имел мужество говорить в лицо свое мнение, не считаясь с положением своего противника. Он загорался гневом очень легко, но столь же легко успокаивался и тогда не сохранял ни малейшего следа бывшего раздражения.

Можно было бы думать, что столь большое число сделанных им открытий ослабило в нем то чувство интенсивной радости, которое возникает в уме, когда он начинает понимать новую истину,— радости, которая, по-видимому, геометрам более известна, чем кому-либо другому. Но Эйлер всегда был необыкновенно чувствителен к этому и всегда сильно и очень серьезно раздражался безразличным или просто спокойным видом своего собеседника, когда этот последний сообщал Эйлеру действительно хорошую мысль, пришедшую ему в голову.

Самым изумительным в Эйлере, конечно, остается то неустанное творчество и та работоспособность, которая роднит его с такими деятелями XVI в., каковы были Леонардо да Винчи и Микельанджело: Эйлер дал в течение своей жизни 756 исследований по самым разнообразным и труднейшим вопросам. Издание их потребует более 2000 печатных листов. К Эйлеру приложимо то восклицание, которое вырвалось у одного ученого при взгляде на «Codex Atlanticus» Леонардо да Винчи: «Мне бы не хватило жизни, чтобы просто переписать то, что этот человек здесь написал».

НЬЮТОНОВА ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ *

Каждая большая дисциплина имеет лежащие в ее глубине некоторые основания. При настоящем состоянии науки обычно добиваются обнажения логических оснований. И с этой точки зрения понятны ставящиеся часто вопросы: на каком именно логическом фундаменте стоит творение Ньютона, насколько он осознавался самим автором, какие следы понимания значения этого фундамента оставлены автором в тексте?

Флюксии Ньютона и дифференциалы Лейбница образуют то, что в настоящее время называется анализом бесконечно малых, а по причинам, которые будут разъяснены дальше, малым математическим анализом. Известно, что таковой имеет сейчас твердое логическое обоснование, получившее безупречную окончательную форму благодаря деятельности одного из сильнейших математиков XIX в.— Августина Коши.

Логическое обоснование анализа. бесконечно малых Коши провел при помощи окончательно сформированной им теории пределов, которая своими корнями уходит в смутную даль прошлого, проходя через несколько имен (Д'Аламбер, Маклорен и др.) и восходя, как мы увидим, к Ньютону. Редакция, которую Коши дал теории пределов, была исключительно счастливой и блестящей; она фигурирует без всяких изменений во всех современных учебниках «малого математического анализа». Столь же классическим является впервые данное Коши определение непрерывности функции. Теория пределов в редакции Коши сразу внесла в тогдашний математический анализ полное успокоение, приведя в порядок спутанные идеи и разъяснив массу недоразумений.

Современная теория пределов столь хорошо известна, что излишне касаться ее содержания. Укажем лишь, что Коши построил ее на понятии переменной величины, т. е. такой, которая последовательно проходит через ряд численных значений, из которых заведомо ни одно не является самым последним. Пределом же переменной величины называется такая постоянная величина, разность между которой и рассматриваемой переменной кончит тем, что станет и будет впредь оставаться по абсолютной величине меньше всякого наперед заданного положительного числа. Понятие времени, которым слегка окрашено это определение, не играет ни малейшей роли: такое «время» может быть не только «реальным»

* «Сборник статей к трехсотлетию со дня рождения Исаака Ньютона». М.—Л., 1943, стр. 53—74.

временем, но даже и неархимедовым. Как разъясняется в трактатах «большого математического анализа», эссенцией определения Коши являются какие угодно отвлеченные упорядоченные множества, состоящие из любых элементов, называемых «моментами» (т. е. «мгновениями»), лишь бы эти множества заведомо не имели самого последнего элемента. Исходя из этого, Коши мог, наконец, придать совершенную точность концепции определенного интеграла как предела суммы: эта важнейшая концепция впервые была введена Лейбницем, облекшим ее в глубокий символ, но потом временно была покинута даже его последователями (Эйлер), для которых она не была ясной и которые поэтому не могли справиться с нею.

Теория пределов в редакции Коши окончательно обосновала анализ бесконечно малых, подведя под него безупречный логический фундамент. Понятие бесконечно малого получило, наконец, точный смысл: это — самая обыкновенная переменная величина, конечная в течение процесса своего изменения, но имеющая своим пределом нуль. Ньютон в таком случае говорил об «исчезающе малом», мы же, осторожности ради, дабы не вызвать здесь ложной идеи постоянного, говорим о «бесконечно умаляющемся» (Жегалкин), переходя на традиционный термин бесконечно малого тогда, когда в умах начинающих этот двусмысленный опасный термин уже не может вызвать никакого соблазна.

Перевод ньютоновых «Начал» академиком А. Н. Крыловым

Возвращаясь теперь к нашей теме, естественно спросить: имел ли в виду абсолютный ум Ньютона (1) * осуществить логическое обоснование созидавшегося им анализа бесконечно малых на той или иной модификации современной теории пределов? Вопрос этот не раз дебатировался в литературе различных стран как с полным его пониманием, так и без всякого его понимания.

В нашей стране академик А. Н. Крылов, напечатавший недавно одну из сильнейших работ по «Ньютоновой теории астрономической рефракции», в свое время дал исчерпывающе полный перевод с латинского языка на русский «Начал натуральной философии» «Philosophiae naturalis principia mathematica» Ньютона, исполненный, можно сказать, с подстрочною точностью и так, чтобы при точном сохранении не только смысла подлинника, но и самих слов Ньютона была достигнута правильность и гладкость русского языка и избегнуто употребление латинских слов, которые от написания их русскими буквами не становятся русскими. Желающие могут найти подлинные слова Ньютона, доказательства и рассуждения, относящиеся к интересующему их вопросу.

Ньютон почти все свои рассуждения ведет геометрически; из слов его предисловия к первому изданию видно, какое значение он придавал

* См. примечания в конце статьи.

точности чертежа. Эта точность соблюдена и в русском переводе: академик А. Н. Крылов перечертил все чертежи тушью, строго следя за полным их соответствием тексту; чертежи были выполнены тушью в удвоенном масштабе, фотоцинкография уменьшила их в два раза.

Отдельные места текста Ньютона по сжатости изложения или особенностям бывших в то время математических приемов потребовали некоторых пояснений и толкований; все эти пояснения и толкования помещены академиком А. Н. Крыловым при самом тексте и в примечаниях, причем те места подлинника, которые в силу особенностей латинского языка допускали разное толкование, приведены в примечаниях еще и по-латыни, с пояснением причин, заставивших переводчика остановиться на том или ином их толковании.

Если мы теперь обратимся к тексту «Начал натуральной философии», то с совершенной ясностью убедимся не только в наличии у Ньютона теории пределов в почти современной ее форме, но и в выполнении ее с гораздо большею осторожностью, чем это было сделано Коши. Впрочем, пусть само дело говорит за себя.

Текст Ньютона и примечания академика А. Н. Крылова

Книгу 1 «Начал натуральной философии», ее отдел 1, носящий название «О методе первых и последних отношений, при помощи которого последующее доказывается», возглавляет поставленная Ньютоном в начале

«Лемма I. *Количества, а также отношения количеств, которые в продолжение любого конечного времени постоянно стремятся к равенству и ранее конца этого времени приблизятся друг к другу ближе, нежели на любую заданную разность, будут в пределе равны.*

Если это отрицаешь, то пусть они в пределе будут не равны, и их предельная разность пусть будет D; следовательно, они не могут ближе подойти к равенству, как до этой заданной разности D, в противность предположению».

Далее идет геометрическая

«Лемма II. *Если в какую-либо фигуру, ограниченную прямыми и кривою, вписывать любое число параллелограммов, имеющих равные основания и стороны, параллельные стороне фигуры, и дополнить параллелограммы, затем, уменьшая ширину этих параллелограммов, увеличивать их число до бесконечности, то я утверждаю, что в пределе отношения вписанной фигуры, описанной и криволинейной друг к другу равны единице.*»(2)

В качестве пояснения к тексту Ньютона академик А. Н. Крылов присоединяет к формулировке этой леммы следующее примечание:

«Предельные отношения Ньютон называет или «primae relationes», т. е. «первые отношения», или «ultimae relationes», т. е. «последние отношения», причем первым термином он пользуется при определении предела отношения двух бесконечно малых величин: «зарождающихся», «nascentium» или «исчезающих», «evanescentium». Второй термин применяется безразлично для предела отношения величин, как конечных, так и бесконечно малых. Когда две величины в пределе равны, т. е. когда их отношение в пределе равно единице, то употребляется термин «sunt ultimo aequales», т. е. «наконец, равны», или «ultimae rationes sunt rationes aequalitatis», т. е. «последние отношения суть отношения равенства». В переводе все эти термины заменены употребляемыми теперь словами «предельное отношение» или «предел отношения». Переменные величины вообще Ньютон называет или «неопределенными», «indeterminatae», или «текущими», «fluentes», величины постоянные всегда называет «заданными», или «данными», «datae». В переводе этот термин во многих местах сохранен».

Фигура, вычерченная Ньютоном при тексте леммы II, изображает основной криволинейный прямоугольный треугольник с прямолинейными катетами и криволинейной гипотенузой. Один катет — горизонтальный, вершина прямого угла в его левом конце, другой катет вертикальный и выше его. Кривая гипотенузы начерчена Ньютоном в виде монотонно ниспадающей непрерывной линии, обращенной своей выпуклостью вверх. Горизонтальный катет разделен на равные отрезки, служащие нижними основаниями двух серий прямоугольников. Прямоугольники первого рода содержатся в основной фигуре и упираются в кривую правыми верхними вершинами; их соединение образует фигуру первого рода, содержащуюся в основной. Прямоугольники второго рода, опираясь на кривую своими левыми верхними вершинами, частично выступают из основной фигуры; их соединение образует фигуру второго рода, содержащую в себе целиком основную. Таким образом, основная фигура является промежуточной, содержа в себе фигуру первого рода и сама содержась в фигуре второго рода; поэтому обе эти фигуры являются по отношению к основной крайними. Периметр каждой крайней фигуры есть многоугольник, причем зубчатая верхняя часть его чрезвычайно близка к кривой, когда деления горизонтального катета чрезвычайно малы.

Самый большой прямоугольник второго рода, считая слева первый, Ньютон, в целях следующей леммы III, несколько расширил справа пунктиром, немного увеличив его основание и оставив прежнюю высоту.

Доказательство леммы II Ньютон дает в следующих словах:

«Разность вписанной и описанной фигур есть сумма параллелограммов, которая (вследствие равенства всех оснований) равна прямоугольнику, построенному на одном из оснований и сумме (их) высот, т. е. (начальному) прямоугольнику (второго рода). Но этот прямоугольник, так как его ширина уменьшается бесконечно, может быть сделан менее любой заданной величины. Следовательно (по лемме I), в пределе фигура вписанная, фигура описанная и тем паче заключающаяся между ними криволинейная будут между собой равны».

Эту лемму расширяет следующая

«Лемма III. *Предельные отношения тех же сумм параллелограммов равны единице и в том случае, когда ширины их не равны между собою, но все уменьшаются бесконечно.*»

Доказательство Ньютона таково:

«Пусть основание (пунктирного прямоугольника) равно наибольшей из ширин. Этот (пунктирный) параллелограмм будет больше разности фигуры вписанной и фигуры описанной; при бесконечном же уменьшении ширины его площадь может быть сделана менее площади любого заданного прямоугольника.

Следствие 1. Таким образом, в пределе сумма этих исчезающих параллелограммов вполне совпадает с площадью криволинейной фигуры.

Следствие 2. В еще большей мере прямолинейная фигура, ограниченная хордами дуг, совпадает с криволинейной фигурой.

Следствие 3. То же самое относится и к описанной прямолинейной фигуре, ограниченной касательными к сказанным дугам.

Следствие 4. Поэтому эти две последние фигуры [по отношению к периметру (криволинейному)] в пределе не суть прямолинейные, но составляют криволинейный предел прямолинейных фигур».

Кульминационным пунктом ньютонова учения о пределах является

«Лемма IV. *Если в каждую из двух фигур вписать (как указано выше) ряд параллелограммов так, чтобы число их было то же самое, и если при бесконечном уменьшении ширин пределы отношений площадей параллелограммов одной фигуры к площадям соответствующих параллелограммов другой между собою равны, то я утверждаю, что и самые фигуры находятся в том же отношении.*»

Для этой леммы Ньютон вычертил два криволинейных прямоугольника, таких же точно, как и в лемме II, с одинаковым числом в каждый из них вложенных прямоугольников первого рода; прямоугольников второго рода (выступающих) совсем нет.

Доказательство важной леммы IV и еще более важного вытекающего из нее следствия Ньютон проводит так:

«В самом деле, в каком отношении находится каждый из параллелограммов одной фигуры к ему соответствующему другой, в том же отношении друг к другу находятся и суммы всех их, т. е. площадь одной фигуры к площади другой, ибо по лемме III пределы отношений площади первой фигуры к первой сумме и площади второй ко второй сумме равны единице.

Следствие. Совершенно так же докажется, что если вообще две какого угодно рода величины будут разделены на одинаковое число частей и, при бесконечном возрастании числа их и уменьшении каждой из них, отношение их соответственно друг к другу, т. е. первой к первой, второй ко второй и т. д., остается постоянным, то и самые величины будут находиться в этом же отношении; ибо если в относящихся к этой лемме фигурах взять параллелограммы так, чтобы они были пропорциональны сказанным частям, то суммы частей будут относиться между собою как суммы параллелограммов и, следовательно, когда число частей и число параллелограммов будет бесконечно возрастать, а самые части уменьшаться, предельное отношение сумм частей будет оставаться равным предельному отношению сумм параллелограммов; это же отношение равно отношению каждого параллелограмма к ему соответствующему, т. е. (по предположению) пределу отношения части к части».

Исключительная важность этой части текста Ньютона побудила академика А. Н. Крылова снабдить его следующим примечанием:

«Эта лемма и ее следствие, составляющее в теперешнем изложении основную теорему интегрального исчисления, постоянно применяются в «Началах», в которых аналитический процесс интегрирования заменяется часто сопоставлением той кривой, коей площадь ищется, с другой известной кривой так, чтобы площади соответствующих параллелограммов (элементы интеграла) находились в постоянном отношении. Аналитически этот процесс равносилен интегрированию при помощи подстановки».

Этими словами академик А. Н. Крылов указывает, что следует рассматривать лемму IV как то, что в настоящее время называется «вторым принципом анализа бесконечно малых», или еще иначе: «принципом интегрального исчисления». Как известно, этот принцип при вычислении предела суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых позволяет заменять эти бесконечно малые слагаемые другими, им равномерно эквивалентными.

Что же касается «первого принципа анализа бесконечно малых», т. е. принципа дифференциального исчисления, позволяющего при вычислении предела отношения двух бесконечно малых заменять эти бесконечно малые другими, им эквивалентными, то этот принцип полностью указан Ньютоном в следствии леммы VII и повторно в следствии леммы VIII. Полный текст Ньютона таков:

«Лемма VII. *При тех же предположениях* (*непрерывной кривизны*) *я утверждаю, что предельное отношение дуги, хорды и касательной друг к другу равно единице.*

Следствие 3. Ввиду этого все эти длины при всяком рассуждении о пределах отношений могут быть взяты одна вместо другой».

«Лемма VIII. *Я утверждаю, что в пределе эти три исчезающие треугольника* (*имеющие основанием хорду, дугу и касательную, а остальные две стороны соответственно параллельными двум заданным прямым*) *между собою равны и предельное отношение их площадей равно единице.*

Следствие. Следовательно, во всех рассуждениях о пределе отношений эти треугольники могут быть взяты один на место другого».

Для того чтобы сделать еще более ясным метод пределов, чтобы обратить внимание на его характерные черты, условия его применимости и попутно ответить на могущие возникнуть недоумения, Ньютон сопровождает длинный ряд своих лемм (лемма I—лемма XI) следующим в высшей степени замечательным окончанием отдела 1:

«Поучение. Предыдущие леммы приведены, чтобы избежать утомительности длинных доказательств, основываясь по образцу древних на приведении к нелепости.

Доказательства делаются более краткими и при помощи способа неделимых, но так как самое представление неделимых грубовато (durior), то этот способ представляется менее геометричным, почему я и предпочел сводить доказательства всего последующего к пределам сумм исчезающих количеств и к пределам их отношений; поэтому я предпослал сколь можно краткие доказательства свойств этих пределов. Способом пределов достигается то же, что и способом неделимых, и после того как его основания доказаны, мы можем им пользоваться с еще большей уверенностью. Поэтому, если во всем последующем изложении я и рассматриваю какие-либо величины как бы состоящими из постоянных частиц или если я принимаю за прямые линии весьма малые части кривых, то следует разуметь, что это — не неделимые, а исчезающие делимые величины, что это — не суммы и не отношения определенных конечных частей, а пределы сумм и пределы отношений исчезающих величин, и сущность этих доказательств в том и состоит, чтобы все приводить к предыдущим леммам.

Делают возражения, что для исчезающих количеств не существует «предельного отношения», ибо то отношение, которое они имеют ранее исчезания, не есть предельное, после же исчезания нет никакого отношения. Но при таком и столь же натянутом рассуждении оказывается, что у тела, достигающего какого-либо места, где движение прекращается, не может быть «предельной» скорости, ибо та скорость, которую тело имело ранее, нежели достигло этого места, не есть «предельная», когда же достигло, то нет скорости. Ответ простой: под «предельною» скоростью надо разуметь ту, с которою тело движется не перед тем как достигнуть крайнего места, где движение прекращается, и не после того, а когда достигает, т. е. именно ту скорость, обладая которой тело достигает крайнего места и при которой движение прекращается. Подобно этому под предельным отношением исчезающих количеств должно быть разумеемо отношение количеств не перед тем, как они исчезают, и не после того, но при котором они исчезают. Точно так же и предельное отношение зарождающихся количеств есть именно то отношение количеств, с которым они зарождаются. Предельная сумма зарождающихся или исчезающих количеств есть та составленная из них сумма, которая образуется, когда они, увеличиваясь или уменьшаясь, только начинают или прекращают существовать. Существует такой предел, которого скорость может достигнуть в конце движения, но не может превзойти,— это и есть предельная скорость. Такова же причина существования предела отношения зарождающихся или исчезающих количеств и пропорций. Когда такой предел существует и величина его вполне определенная, то его нахождение есть задача истинно геометрическая. Все же геометрическое может быть законным образом применяемо при геометрических изысканиях и доказательствах.

Можно возразить, что если существуют предельные отношения исчезающих количеств, то существуют и предельные величины их самих и, следовательно, всякое количество должно состоять из неделимых, что опровергнуто Евклидом в книге X «Элементов», в учении о несоизмеримых величинах. На самом же деле это возражение основано на неверном допущении.

Предельные отношения исчезающих количеств не суть отношения пределов этих количеств, а суть те пределы, к которым при бесконечном убывании количеств приближаются отношения их, и к которым эти отношения могут подойти ближе, нежели на любую наперед заданную разность, но которых превзойти или достигнуть на самом деле не могут ранее, чем эти количества уменьшатся бесконечно. Дело объясняется проще на бесконечно больших величинах. Если две величины, разность которых задана, будут обе увеличиваться до бесконечности, то между ними будет существовать предельное отношение, равное единице, однако не будет предельных значений для самих величин, т. е. таких наибольших их значений, отношение которых как раз было бы равно единице. Поэтому если в последующем для простоты речи я буду говорить о величинах весьма малых или исчезающих или зарождающихся, то не следует под этими словами разуметь количества определенной величины, но надо их рассматривать как уменьшающиеся бесконечно».

Во всем предыдущем тексте Ньютон выдвигает на первый план самую теорию пределов, которой он придал чисто геометрическую форму. Бесконечно малые отодвинуты на задний план и затеряны среди мира переменных величин, частным случаем которых они являются. Но Ньютону дальше пришлось в упор столкнуться с самостоятельной индивидуальностью бесконечно малых как таковых, когда ему оказалось уже недостаточно геометрической теории пределов и когда он был приведен к рассмотрению аналитических выражений. И первая же задача об отыскании флюксии многочлена принудила его войти в соприкосновение с арифметикой бесконечно малых.

Соответствующее место книги II, отдела II, гласит:

«Лемма II. *Момент произведения равен сумме моментов отдельных производителей, умноженных на показатели их степеней и коэффициенты*».

Важное пояснение к этой лемме помещено Ньютоном перед доказательством, и оно таково.

«Я называю «произведением» вообще всякое количество, которое в арифметике происходит от умножения, деления и извлечения корней из отдельных его сомножителей, в геометрии же оно образуется нахождением объемов, площадей, сторон, крайних и средних пропорциональных, не делая сложения и вычитания. К такого рода количествам относятся: произведения, частные, корни, прямоугольники, квадраты, кубы, стороны квадратов и кубов и т. п. Я рассматриваю здесь эти количества как неопределенные и изменяющиеся и как бы возрастающие и убывающие от постоянного движения или течения, и их мгновенные приращения или уменьшения разумею под словом моменты, так что приращения почитаются за положительные, или прибавляемые моменты, уменьшения — за вычитаемые, или за отрицательные.

Но следует озаботиться, чтобы не принимать за таковые конечных частиц. Конечные частицы не суть моменты, но сами суть количества, из моментов происходящие. Надо подразумевать, что они суть лишь едва-едва зарождающиеся начала конечных величин. Поэтому в этой лемме никогда и не рассматриваются величины моментов, но лишь их начальные отношения. То же самое получится, если вместо моментов брать или скорости увеличений или уменьшений [которые поэтому можно называть движениями, изменениями или потоками (флюксиями) количеств], или же какие угодно конечные количества, этим скоростям пропорциональные. Коэффициент же при какой-нибудь переменной есть количество, получаемое от разделения произведения на эту переменную».

Из дальнейшего текста леммы, из приводимых в ней формул и рассуждений легко усматривается, что «момент» Ньютона и есть, по существу, дифференциал Лейбница. В этой лемме, чрезвычайно сжатой по объему и неизмеримо богатой по содержанию, Ньютон дает дифференциалы многочленов и дифференциалы каких угодно степеней, как отрицательных, так и дробных, т. е. дифференциалы дробей и радикалов. Поразительным является полное совпадение взглядов Ньютона с современным воззрением на дифференциал. Согласно современным взглядам, дифференциал есть, с одной стороны, особого рода бесконечно малое, эквивалентное приращению функции, и, с другой стороны, неопределенная величина, пропорциональная производной. Та же самая двойственность природы «момента» полностью отражается в словах Ньютона, когда он говорит о нем.

Здесь читатель должен быть весьма осторожным и не вводиться в заблуждение кажущимся противоречием и расхождением между словами Ньютона и его делом, ибо хотя Ньютон до доказательства и заявляет, что «в этой лемме никогда и не рассматриваются величины моментов», однако в самом доказательстве у Ньютона фигурируют половины моментов и четверть их произведения. Это вполне согласуется со взглядом Ньютона на моменты как на бесконечно умаляющиеся величины, подчиненные действиям арифметики.

Возражения

Приведенный выше текст Ньютона столь прост и ясен, что по поводу его трудно ожидать возникновения недоумений. Единственный пункт, который может задержать на себе внимание, это тот, где Ньютон вводит впервые в свое изложение «моменты» количеств и где он говорит, что «это суть лишь едва-едва зарождающиеся начала конечных величин». В первое мгновение можно подумать, что Ньютон имеет в виду бесконечно малые приращения, положительные или отрицательные, непрерывно во времени возрастающей или убывающей какой-либо конкретной величины.

Это было бы совсем неверно, ибо дифференциал функции есть линейное выражение от приращения независимого переменного, т. е. бесконечно малое наипростейшей природы, эквивалентное сложному — по своей натуре — приращению функции (3).

Но, во-первых, здесь самое удвоение слова «едва» («едва-едва») показывает, что мы имеем дело с литературным приемом (педагогического стиля), и, во-вторых, за этим тотчас же следует решающее и уже чисто математическое разъяснение: «то же самое получится, если вместо моментов брать или скорости,...или же какие угодно конечные количества, этим скоростям пропорциональные». Принимая во внимание, что — по самому естеству вещей — скорость есть не что иное, как осуществленный самою природою переход к пределу, разъяснение Ньютона имеет решающее и исчерпывающее вопрос значение, ибо оно представляет собою точное математическое определение дифференциала функции одного независимого переменного в вполне современном виде (т. е. в «облинеенной» форме).

В остальном же текст Ньютона столь прозрачен, что, казалось бы, нельзя было ожидать, чтобы он был способен вызывать недоумения, особенно если при этом следить не за словами Ньютона, силою вещей не отделимыми от его эпохи, но за его делами; в своем же математическом поведении Ньютон молчаливо, но со всею уверенностью действует всегда так, как может вести себя лицо, чувствующее себя принадлежащим к нашей эпохе, воспитанным на наших определениях и идеях.

И, однако, текст Ньютона оказался способным вызывать дебаты, иногда принимающие горячий характер. В нашей стране русская редакция текста «Начал» вызвала настойчивые возражения со стороны математика С. А. Богомолова, с которыми, по-видимому, солидаризировался проф. Д. Д. Мордухай-Болтовской (4). Полагая, что в данном случае за различием убеждений высказывающихся лиц скрыта почва, уже не зависящая от личных настроений, вкусов и склонностей, и что обнажение этой почвы может представить более широкий интерес, мы решили войти в детали сделанных возражений.

Как мы уже заметили, причиною возражений явилось разночтение русского текста «Начал», обязанное различному пониманию латинского подлинника Ньютона. В качестве исходного пункта послужила формулировка леммы I, возглавляющая отдел 1 «Начал».

В латинском тексте Ньютона стоит:

«*Quantitates et quantitatum rationes, quae ad aequalitatem dato tempore constanter tendunt et eo pacto propius ad invicem accedere possunt quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo aequales*».

Русский перевод А. Н. Крылова гласит:

«*Количества, а также отношения количеств, которые в продолжение любого конечного времени постоянно стремятся к равенству и ранее конца этого времени приблизятся друг к другу ближе, нежели на любую заданную разность, будут в пределе равны*».

Чтение С. А. Богомолова текста леммы в точности совпадает с переводом академика А. Н. Крылова за исключением четырех последних слов, которые он заменяет такими: «*делаются наконец равными*».

Проф. Д. Д. Мордухай-Болтовской читает всю лемму по-иному, но существенным в его чтении является перевод трех последних слов латинского текста в виде: «*становятся, наконец, равны*».

Мы видим, что оба автора вполне согласны друг с другом в понимании трех последних слов латинского текста и что это понимание идет в разрез переводу А. Н. Крылова. Отправляясь отсюда, оба они приходят к доктрине, которую, пользуясь их языком, можно сформулировать так:

«У Ньютона переменная величина всегда достигает своего предела. Недостижение переменной своего предела является характерной чертой математиков лишь сравнительно недавнего времени.»

Из этой доктрины оба автора выводят далеко идущие следствия. Из них для нас здесь самым важным является утверждение о несуществовании у Ньютона теории пределов в смысле, сколько-нибудь близком к современному ее пониманию.

Понятно, что столь важный тезис не мог быть базирован на одном только разночтении формулировки леммы I Ньютона. Поэтому оба автора ищут в подтверждение выдвигаемого ими тезиса еще и других аргументов.

Аргументация проф. Д. Д. Мордухай-Болтовского идет из истории философии и не лежит ни в области естествознания, ни в области математики. Поэтому мы ее касаться не будем. Я ограничусь только тем, что приведу лишь заключительные слова статьи автора (5), в которых он высказывается уже как математик и которые имеют прямое отношение к вопросу о достижимости или недостижимости переменной величиной своего предела. Вот эти слова:

«Если раньше отождествлялась бесконечно малая дуга стягивающей ее хорде, то Ньютон такого отождествления уже не делает.

Для него ultima ratio arcus et chordae est ratio aequalitatis (последнее отношение дуги и хорды — это отношение равенства)».

Следовательно, пока дуга и хорда существуют, они не равны; поэтому их отношение отлично от единицы, т. е. не есть отношение равенства. А когда уже нет ни дуги, ни хорды, тогда нет и их отношения.

Этой цитаты, собственно, и достаточно.

С. А. Богомолов держится математической стороны дела и подвергает приведенные выше места текста Ньютона большому обсуждению. Однако я не мог притти к пониманию смысла его аргументации.

Так, в одном из первых же своих рассуждений (6) автор пишет:

«В следствиях леммы III Ньютон рассматривает некоторые геометрические переменные и совершенно ясно высказывает, что они совпадают со своими пределами в конце изменения; так, следствие 2-е гласит (привожу по возможности дословный перевод, отступая кое-где от перевода русского издания «Начал»):

«В еще большей мере прямолинейная фигура, ограниченная хордами исчезающих дуг ab, bc, cd и т. д., совпадает в конце концов с криволинейной фигурой».

Яснее нельзя выразить, что переменная достигает своего предела».

Насколько можно понять, С. А. Богомолов под «геометрической переменной» в данном случае разумеет изменяющийся истинный многоугольник, т. е. имеющий во всякое мгновение своего существования конечное число вершин, расположенных на данной кривой, причем его стороны, служащие хордами, безгранично умаляются.

В этих условиях утверждение С. А. Богомолова о совпадении геометрической переменной со своим пределом в конце изменения невозможно понять: кривая линия не есть многоугольник.

Полагаю, что сказанного также достаточно.

Таким образом, разночтение текста леммы I Ньютона, по-видимому, является в конечном счете единственным основанием предложенной обоими авторами доктрины.

Смысл определений Ньютона

Прежде чем перейти к обсуждению по существу теории пределов Ньютона, полезно уточнить употребляемую обоими авторами русскую терминологию. Они употребляют два выражения: «достигать чего» и «совпадать с чем» как равнозначные. Между тем последнее выражение является гораздо более точным, чем первое, нередко получавшее в текущей жизни и в науке смысл выражения: «простираться до чего», «доходить до чего», «догонять что», каковые вовсе не предполагают ни полного, ни частичного совпадения.

Про материальный брусок, ориентированный по оси OX и имеющий начало O своим центром, когда он мысленно разбит на две части — левую A, точки которой имеют отрицательные абсциссы, и правую B, являющуюся дополнением к левой части, выражаются так: материя части A достигает материи части B, ибо между этими частями не только невозможно осуществить материальной прокладки, но и математической. И, однако, совпавших точек здесь нет.

Про две движущиеся направо по оси OX точки, расстояние между которыми монотонным образом безгранично уменьшается, обычно выражаются так: рассматриваемые движущиеся точки достигают друг друга, хотя самого мгновения, когда действительно осуществляется их совпадение, может и не быть. Это может произойти по трем обстоятельствам: 1) либо вследствие ухода времени совпадения в бесконечность; 2) либо вследствие ухода точек в бесконечность; 3) либо, при конечном времени и месте намечающегося совпадения, потому, что, в силу самого задания движущихся точек, в самый момент намечающегося совпадения точки эти перестают существовать.

Простым примером третьего случая является движение центра тяжести тяжелого однородного тора, плотность которого остается неизменной и который, безгранично утончаясь, вырождается в математическую окружность. Движение предполагается происходящим в ограниченное время, и центр тяжести тора безгранично приближающимся к некоторой конечной точке, совпадение с которой невозможно, ибо в данных условиях (7) математическая окружность невесома и центра тяжести в собственном смысле этого слова иметь не может.

Эти соображения заставляют нас отказаться от расплывчатого выражения «достигать чего» и предпочесть ему точное выражение «совпадать с чем».

Таким образом, основная мысль обоих авторов та, что у Ньютона переменная величина в конце своего изменения принципиально всегда, без всякого исключения, совпадает со своим пределом.

Если мы теперь обратимся к самому тексту Ньютона, то не только не встретим там подтверждения этой мысли, но, напротив, найдем энергичное предостережение против нее. И оно имеет тем большее значение, что основано не на сомнительном переводе выхваченных мест из текста Ньютона и отдельных, изолированно стоящих латинских слов (8), но на непосредственном восприятии целой чисто математической части этого текста, которая не может допускать никакого иного математического смысла и иного толкования.

Это предостережение содержится в знаменитом «Поучении», поставленном Ньютоном в конце отдела 1 книги 1. В этом «Поучении» Ньютон предусматривает ряд вопросов, недоумений, сомнений и возражений, которые может встретить предлагаемое им учение о пределах, и точным образом отвечает на них. Такие вопросы касаются следующих пунктов: зачем нужна теория пределов, раз имеется «метод исчерпывания» древних? зачем выдвигать новую дисциплину, раз можно обойтись «методом неделимых»? исчезающе малые величины Ньютона не суть ли просто «неделимые»?

Для нас наиболее важными являются следующие два возражения, предусматриваемые Ньютоном:

1) «Делают возражение, что для исчезающих количеств не существует «предельного отношения», ибо то отношение, которое они имеют ранее исчезания, не есть предельное, после же исчезания нет никакого отношения».

2) «Можно возразить, что если существуют предельные отношения исчезающих количеств, то существуют и предельные величины их самих, и, следовательно, всякое количество должно состоять из неделимых, что опровергнуто Евклидом в книге X «Элементов» в учении о несоизмеримых величинах».

Наконец, совершенно исчерпывает вопрос следующее разъяснение Ньютона:

«Дело объясняется проще на бесконечно больших величинах,— пишет Ньютон.— Если две величины, разность которых задана, будут обе увеличиваться до бесконечности, то между ними существует предельное отношение, которое равно единице, однако нет предельных значений для самих величин, т. е. таких наибольших их значений, отношение которых как раз было бы равно единице.»

Таким образом, с совершенной ясностью Ньютон говорит о переменной величине, имеющей пределом единицу и такой, у которой предел этот заведомо не совпадает ни с каким из численных значений рассматриваемой переменной величины.

Этот пример Ньютона имеет решающее значение, ибо он показывает, какой является самая сущность ньютоновых определений: рассматриваемая переменная величина есть либо монотонно возрастающая, либо монотонно убывающая, смотря по тому, будет ли числитель меньше знаменателя, или, наоборот, больше его. И пределом этой переменной величины является единица. Но в тот момент времени (предполагая его фиксированным и конечным), когда переменная величина могла бы обратиться в единицу, она — по самой сути своего определения — утрачивает смысл. Но это не мешает ей иметь единицу своим пределом.

В других же случаях, как на это указывает Ньютон своим примером скорости движения тела, может случиться, что переменная величина не утрачивает своего смысла в заключительное мгновение своего изменения и совпадает в этот момент со своим пределом. Но это обстоятельство есть случайное и не имеет ни малейшего значения, ни интереса. Как общее правило, переменная величина в самое последнее мгновение своего изменения утрачивает смысл, по крайней мере во всех сколько-нибудь серьезных и ценных случаях, ради которых, собственно, и возникли оба исчисления. Ибо если бы это было не так, то интересующая величина предела прямо получалась бы вычислением или измерением переменной величины в этот заключительный момент, и тогда не было бы никакой необходимости ни в изменении переменной величины, ни в стремлении ее к пределу, ни вообще в каких-либо новых теориях и исчислениях.

Сказанного, собственно, достаточно для того, чтобы видеть, что идеи и определения Ньютона, относящиеся к теории пределов, не расходятся с современными. Но мы хотим сделать больше, а именно — дать объяснение некоторым особенностям и кажущимся странностям латинской терминологии Ньютона, вводящим в соблазн навязать Ньютону чуждую ему в «Началах» идею актуально малых. Это объяснение даст нам возможность видеть, что ньютонова теория пределов задумана Ньютоном гораздо осторожнее и тоньше, чем это сделал Коши, и что, следуя ей, может быть, удалось бы избежать тех последствий, которые повлекла за собою теория пределов Коши.

Если мы сделаем пересмотр всех тех случаев, в которых Ньютон оказывался в необходимости фактически применять свою теорию пределов, если мы пересмотрим все его схемы, рисунки и чертежи, мы немедленно заметим, что всюду Ньютон предполагал лишь монотонное изменение переменных величин, его переменные величины идут к пределу, либо монотонно возрастая, либо монотонно убывая. Все кривые у Ньютона и, что важнее всего, все его объяснения к ним таковы, что не только всюду предполагается существование касательной, перемещающейся непрерывно, но и наличие определенной выпуклости и вогнутости кривых, а также их непрерывная кривизна (9), кроме, понятно, отдельных точек, встречаемых в конечном, относительно небольшом, числе.

С Ньютоном происходило в некотором отношении обратное тому, что происходило с Коши. Коши, формулируя свое определение функции, указывает, что течение численных величин функции всегда должно быть задано с помощью аналитического выражения, но фактически Коши этим ограничительным предположением никогда не пользовался, что и дало повод утверждать (Борель, Лебег), что определение функции действительного переменного по Коши идентично общему определению функции по Дирихле как голого соответствия, независимо от средств его установления. Ньютон же, формулируя свое определение предела, молчаливо предполагает как обстоятельство, само собой разумеющееся, не указывая его explicite, что изменение величин есть всегда монотонное. Таким образом, Коши ставит свое определение функции слишком узко по сравнению с тем, чем фактически пользуется. Наоборот, Ньютон ставит свое определение предела слишком широко, так что заставляет заподозрить немонотонное стремление переменных величин к их пределам, ибо он explicite не сделал никакого ограничительного указания. Но всюду им предполагается монотонное изменение переменных величин, по крайней мере именно вблизи своих предельных значений.

Те функции, за течением величин которых (10) следил Ньютон, могут быть разрезаны на конечное число частей, каждая из которых являет монотонность изменения. Таким образом, на первый взгляд можно было бы думать, что Ньютон ограничивался рассмотрением лишь тех функций, про которые принято говорить, что они «удовлетворяют условию Дирихле», т. е. имеют ограниченное число максимумов и минимумов. Но в некоторых местах Ньютон прибавляет, что предполагает непрерывную кривизну.

Без сомнения, функции, которые имел в виду Ньютон, как естественно думать, безгранично дифференцируемы. По крайней мере, легко себе представить удивление Ньютона, если бы ему было указано, что какая-либо его функция дифференцируема лишь до известного конечного числа раз, после чего она всюду утрачивает производную.

Наличие у всякого движения скорости и ускорения казалось Ньютону в природе вещей. Вот почему естественно думать, что всякое приближение к пределу Ньютон мыслит монотонным, но отнюдь не осцилляторным. Для Ньютона наличие движения без скорости или без ускорения, кривой без касательной или без кривизны, наличие переменной величины, хотя и непрерывно изменяющейся, но такой, что каждое ее численное значение, как допредельное, так и предельное, является осцилляторным пределом (11), было бы «противоестественным» и, без сомнения, вызвало бы резко отрицательную реакцию на эту мысль (12). Подобные кривые суть создания лишь нового времени, выросшие на почве теории пределов Коши.

Вот почему без малейшей натяжки следует думать, что всякое стремление к пределу переменной величины Ньютон предполагал монотонным и отнюдь не осцилляторным. Нужно иметь в виду, что актуальная бесконечность в современном понимании ее теорией функций бесспорно была чужда Ньютону и что функции, хотя и непрерывные, но имеющие бесконечность нулей, накопляющихся вблизи предельной точки, казались невозможными, как кажется это невозможным неискушенному сознанию начинающего, который, не приобретя еще привычки, действительной или кажущейся, охватывать эту бесконечность смаху, помещает нуль за нулем постепенно, без охвата их всех сразу.

Но раз переменная величина изменяется непрерывно и монотонно, то совокупность ее численных значений, воспринятых до заключительного момента изменения (т. е. до самого конца изменения), всегда есть открытый интервал, т. е. отрезок, лишенный концевой точки, начальной или последней, смотря по направлению движения монотонно изменяющейся величины. В этом именно смысле Ньютон и говорил о последнем (или первом) значении переменного, потому что такое предельное значение в самом деле видно на глаз, являясь начальной или конечной точкой совокупности численных значений переменной величины (13).

Такое предельное значение сразу охватывается глазом, являясь таким образом, «оптическим пределом», и соответственно этому входит в речь сразу же. Таков именно смысл примера, приводимого Ньютоном: монотонно изменяющейся по величине дроби, числитель и знаменатель которой уходят в бесконечность при сохранении постоянной их разности. Единица есть оптический, т. е. видимый глазом конец совокупности фактически принимаемых этой дробью численных значений, но сама она не принадлежит к таковым, как на это указывает сам Ньютон.

Если же отказаться от монотонного изменения величин, как это — по крайней мере формально — сделано Коши, то тогда в общем случае мы имеем дело с осцилляторностью, и предельная точка, к которой стремится переменная величина, является уже не видной на глаз, потому что она глубоко спрятана среди численных значений, фактически принимаемых переменной величиной до заключительного момента ее изменения. Раз нет монотонности, никакое уменьшение размера интервала времени, в которое происходит изменение переменной величины, не может поместить предельное значение на самый конец совокупности численных значений переменной: всегда это предельное значение является глубоко запрятанным внутри этой совокупности; оно не видно на глаз, т. е. оптически не различимо, и извлечь его из совокупности допредельных значений, как показывает «большой математический анализ» (т. е. арифметизированный), нет возможности, если еще раз не применять процесса перехода к пределу, что было бы idem per idem.

Трудно сказать без углубленного изучения, имеются ли у Ньютона следы идеи аналитической функции (14), но безграничная дифференцируемость натурально предполагается. Вот почему выражение Ньютона «последнее значение» для переменной вовсе не употребляется в смысле фактического принимания его переменной, но лишь в том смысле, что для совокупности фактически принимаемых значений оно в самом деле является последним (замыкающим) или первым, смотря по тому, как смотреть.

Таким образом, выражение Ньютона «ultimo» вовсе не говорит о том, что переменная величина всерьез становится равной пределу — это опровергается и самим Ньютоном, когда он приводит указанный выше пример дроби с безгранично увеличивающимися числителем и знаменателем, но говорит о том, что, в силу монотонности изменения, предельное значение в самом деле является оптически различимым концевым (последним или первым) для фактически принимаемых значений.

Мы видим, что здесь нет места ни для актуально малых, ни для неделимых, которые Ньютон отвергает, сославшись на опровержение их Евклидом в книге X «Элементов», в учении о несоизмеримых величинах.

Из истории математического анализа

На изложенном, собственно, можно было бы и остановиться, если бы нам еще не казалось целесообразным и своевременным выяснить причины того, почему даже испытанные умы склонны приписать Ньютону употребление актуально малых. Это, нам думается, вовсе не есть только заблуждение индивидуального характера, но за чисто личными вкусами легко усматриваются импульсы уже внешнего происхождения, диктуемые самим состоянием вещей. Притягательность идеи актуально малого есть чисто внешний феномен, сказывавшийся в разные эпохи и появлявшийся различно, в зависимости от общего хода науки и, в частности, от состояния математического анализа (15). Будут ли это рассуждения элеатов, «зернистость пространства» средневековых мыслителей, «неделимые» Возрождения, «пространственная атомистичность» Римана и теперешние усилия говорить всерьез о «квантовании пространства» (16), на всем этом лежит отблеск притягательности упомянутой идеи. Для того чтобы сделать мысль более ясной, мы должны уделить немного внимания жизни математического анализа.

Математический анализ вовсе не есть совершенно законченная наука, как иногда склонны его себе представлять, с раз навсегда найденными принципами, из которых только остается извлекать дальнейшие следствия. Аналогия с «Элементами» Эвклида вполне поверхностна, да и самые эти «Элементы» вовсе не такая окаменелость, как хотят думать. Математический анализ ничем не отличается от всякой другой науки и имеет свой ход идей, движущийся не только поступательно, но и кругообразно, с возвращением к группе прежних идей, правда всегда в новом освещении. В этом отношении имеются аналогии с большими дисциплинами, какова, например, физика.

Если, для того чтобы составить себе представление о состоянии в настоящее время математического анализа, начинают просматривать современные учебники и курсы математического анализа, то немедленно отмечают громадную разницу в их изложении.

Во-первых, среди этих книг мы встречаем курсы «большого стиля», являющиеся, собственно, не учебниками, но трактатами, далекими от тенденций преподавания и преследующими преимущественно цели систематизации. Такие книги дают изложение математического анализа без теории пределов. В этих трактатах изгнана всякая идея возможного изменения и самое понятие переменной величины вместе с ее пределом. Понятия эти объявляются чуждым инородным телом в стройном организме математического анализа и квалифицируются как лишь полезный, хотя и грубоватый, начальный педагогический прием, от которого следует затем освободиться в целях достижения надлежащей строгости. И в таких книгах не только нет переменных величин, но даже и постоянных: с самого начала заявляется, что имеются только числа, в соответствии с чем весь математический анализ получает строго стационарный характер. Но не следует обманываться насчет этого характера: такая стационарность ничего общего не имеет с античной стационарностью, ибо если по тем или иным основаниям, лежащим в самой глубине античной мысли и античного мировоззрения, из геометрии и, значит, из всей античной математики было изгнано движение и всякие процессы изменения, то вместе с тем оттуда было сознательно и тщательно изъято и бесконечное (17). Наоборот, в указываемых трактатах все изложение принципиально и даже технически базируется на рассмотрении бесконечных множеств и не как становящихся (потенциально), но как уже ставших (актуально): концепция, глубоко чуждая античной мысли, однако придающая такому изложению математического анализа кажущуюся (или истинную) стационарность. В таких трактатах математического анализа нет места ни переменным, ни постоянным величинам: в них все превращено в число; это достигается тем, что к миру всяких величин мы подходим с готовой уже «областью вещественных чисел». Более точно, в таком изложении математического анализа нет речи об измерении величин, ибо всякая величина является здесь лишь точкою арифметизированного континуума и, значит, мир тех или иных величин представляется, говоря образно, лишь качественно окрашенным экземпляром области вещественных чисел (18). Такой прием изложения получил название арифметизации анализа, и ему нельзя отказать в известной цельности и завершенности; странным в таких трактатах является необходимое (по современным условиям) введение таких теорем, каковы теоремы Грина или Стокса, которые производят курьезное впечатление отголосков каких-то утративших внутренний смысл традиций.

Во-вторых, среди современных книг по математическому анализу мы встречаем курсы «малого стиля», являющиеся в точном смысле учебниками и в самом деле преследующие несомненно педагогические цели. Характерною чертою этих курсов является самое широкое введение изменения величин. В этих книгах математический анализ подлинно является анализом бесконечно малых, ибо все его здание базировано на теории пределов и операциях с бесконечно малыми (точнее, с бесконечно умаляющимися), тогда как в трактатах «большого стиля» бесконечно малые, как и все переменные величины, совершенно изъяты, и лишь изредка позволяется говорить на их языке ради только краткости речи, но по существу все сведено к разрезам и сечениям в арифметизированном континууме, т. е. к чистым числам, каждое из которых является неизменяющимся индивидом. В противоположность этому, в курсах «малого стиля» континуум совершенно не арифметизирован, и ведущийся в нем безгранично продолжающийся математический процесс выхватывает из него одну предельную точку, получающую тотчас же соответствующее имя или определенный математический знак: это и является доведенным до конца измерением рассматриваемой постоянной величины. В соответствии с этим изложение математического анализа (являющегося, как было сказано, в сущности анализом бесконечно малых) в таких курсах близко следует историческому его развитию. Это изложение, отличающееся большою гибкостью и живостью, отнюдь нельзя упрекнуть в нестрогости, т. е. в грубом нарушении научности. Упреки, которые адресуются такому изложению математического анализа, касаются, во-первых, введения «излишних» понятий: изменения переменной величины, движения в геометрическом континууме, бесконечно умаляющегося предела, и, во-вторых, что является собственно самым важным и наиболее болезненным упреком, это — «малая дальнодейственность» такого математического анализа, т. е. неразрешимость при помощи вводимых им понятий важных проблем, однако прекрасно ставящихся и формулируемых на языке этого малого анализа. Наиболее известным примером такого феномена служит классически просто формулируемая теорема Фишера — Рисса и связанное с нею условие замкнутости академика В. А. Стеклова: известно, что исчерпывающая (т. е. необходимая и достаточная) формулировка этого условия требует введения интеграла Лебега, каковой, в свою очередь, требует полностью арифметизированного континуума, т. е. уже «большого анализа».

Это имеющееся в настоящее время наличие двух различных параллельных изложений математического анализа способно на первых порах вызвать недоумение. Но таковое рассеивается, когда принимают во внимание, что такая двойственность является результатом сложившейся исторической обстановки и что математический анализ, подобно другим великим дисциплинам — физике и химии,— есть живая наука, имеющая внутри себя борющиеся течения.

В истории математического анализа можно различить четыре различные эпохи, частично налагающиеся друг на друга.

1. Эпоха, простирающаяся до решающей деятельности Ньютона и

Лейбница и наполненная наивными и курьезными, а порою и весьма глубокими (Уоллис) (19) изысканиями по проведению касательных, вычислению площадей и по «углам соприкосновения». Это есть эпоха Возрождения: XVI и первая половина XVII в.

2. Эпоха, начинающаяся с решительных открытий Ньютона и Лейбница и через имена И. Бернулли, Эйлера, Лагранжа, Лапласа и Даламбера простирающаяся до Гаусса. Расцвет этого великого создания мысли был похож на чудо. Едва решались верить тому, что видели. Открывали истины за истинами, казавшиеся проницательным умам скептически настроенной эпохи невозможными. Такое значение имеют слова Даламбера: «allez en avant et la foi vous viendra». Они относились собственно к дифференциальным выражениям. Казалось, сама логика восстает против этого, казалось, все предположения основаны на ошибках, и все же цель была достигнута. По преимуществу это — вторая половина XVII и XVIII в. При этом влияние идей и символики Лейбница было преобладающим.

3. Эпоха логического обоснования анализа бесконечно малых, выполненного Августином Коши. Масса накопившихся парадоксов и кажущихся взаимно противоречивыми результатов стала столь тягостной, что необходимо было освободить выросший и полный сил математический анализ от смутных идей и довести оставленное до совершенной ясности. Эта огромная тягостная работа выпала на долю Коши (1789—1857). К счастью, Коши обладал не только критическим, но и выдающимся по своей чрезвычайной изобретательности и глубине умом. Поэтому производимая им реформа математического анализа не была только отрицательной, т. е. состоявшей в отбрасывании логически сомнительных частей, но и ярко творческой. Наука обязана Коши созданием больших методов и особых приемов, из которых прием «доказательств существования» впервые выдвинут им. Наука обязана Коши и созданием математических областей, из которых на первом месте должна быть поставлена теория функций мнимого переменного, построение которой было выполнено Коши с гораздо большею осторожностью и глубиною, чем это было впоследствии проделано Вейерштрассом. Вообще исключительная творческая сила Коши предохраняла его от многих неправильных действий, на которые решались некоторые его последователи, не обладавшие во всей полноте ею; например, выбрасывание за борт математического анализа расходящихся рядов, о чем впоследствии пришлось пожалеть, было делом рук не самого Коши, но его учеников, полагавших, что они остаются верными заветам учителя. И, наконец, Коши принадлежит дело всей установки математического анализа на понятиях переменной величины и ее предела.

Идея этой установки, несомненно, идет от Ньютона, как от истинного инициатора, набросавшего в «Началах» для этой цели определенный план. До Ньютона было бы тщетно искать родоначальников этих понятий: только у Зенона из Элеи (500 лет до н. э.) да в рассуждениях Грегори

(1647), обсуждавшего его апории, можно найти следы вопроса о пределе (20). Исходя от Ньютона, научная концепция предела, пройдя через ряд имен, среди которых следует указать Робинса (Robins), Жюрина (Jurin), Маклорена и Даламбера, дошла до Коши. Выход в свет в 1821 г. его знаменитого «Курса математического анализа» следует считать датой окончательно совершившегося устройства математического анализа на новом основании: понятии предела. Насколько дело Коши было хорошо подготовлено его предшественниками, следует из того, что делу обоснования анализа сам Коши не придал формы острого научного результата, но сообщил ему, скорее, характер окраски преподавания. Однако не следует заблуждаться в этом отношении и уменьшать заслугу Коши.

Коши остался верен основной идее Ньютона, но счел нужным значительно расширить его концепцию, введя в рассмотрение пределы немонотонно изменяющихся переменных. С одной стороны, это значительно облегчило рассуждения, ибо сразу же придало им характер чрезвычайной общности и указало для мысли определенные схемы. Достаточно указать на общее, до сих пор остающееся неизменным определение непрерывности функции. Но, с другой стороны, эта самая общность сразу же дала себя чувствовать в двух отношениях: во-первых, в появлении функций все с более и более необычным, казавшимся странным и невозможным аллюром, и, во-вторых, в появлении проблем, рождавшихся в недрах анализа Коши, на которые сам этот анализ оказался бессильным ответить. Как на пример первого достаточно указать на ужаснувшее многих открытие непрерывных функций, всюду лишенных производной. Примером второго служит проблема доказательства того, что непрерывная функция, изменяющая знак, должна пройти через нуль. Всем стало ясно, что дело устройства анализа удержаться на этой точке не может и что как бы ни был безупречен с логической точки зрения анализ, обоснованный Коши (так называемый «малый математический анализ»), наличие все увеличивающегося числа проблем, рожденных внутри этого анализа, ответить на которые он, исходя из одних только собственных ресурсов, не был в состоянии, принуждало сделать какие-то дальнейшие шаги. Это сознание и было началом последней эпохи в истории математического анализа, охватывающей и настоящий момент. Рассмотренная третья эпоха, возглавленная Коши, простирается от начала XIX в. до его последней четверти и протекает в русле идей Ньютона.

4. Эпоха перестройки математического анализа на ведущих идеях Кантора (1845—1918), первые опубликования которого начались в 1870 г. Эти опубликования, сначала встретившие недоумение и сильное противодействие, нашли затем горячих сторонников, особенно среди молодых ученых. Создалось общее сильное движение, возглавленное плеядой молодых французских математиков, образовавших идейно сплоченное ядро и примкнувших к идеям Кантора. Наиболее творческая и глубокая активность группы этих математиков падает на конец XIX и начало XX в.

Активность и блестящий успех этой группы произвели сильное впечатление на молодых математиков всех стран и вызвали естественное подражание. Неузнаваемо изменился не только самый математический анализ, но и ряд смежных с ним областей и дисциплин. Отголоски этого и по сию пору чувствуются в далеких от анализа областях. Большой привлекательностью этой преобразовательной работы было отсутствие необходимости иметь в своем распоряжении огромный математический материал и чувствовать «органическую связь идей математики с идеями других наук» (Эрмит). Математические рассуждения достигли неслыханной до сих пор общности, в связи с чем главное внимание было перенесено на схемы мысли. Отсюда естественно возникло тяготение к самому абстрактному. В частности, в математическом анализе основные определения подверглись чрезвычайному обобщению. Одновременно с этим создавались и внимательно исследовались геометрические формы и функции с самыми необыкновенными свойствами и аллюром, наличие которых было невозможно предполагать, оставаясь на почве анализа Коши и обычной привычной геометрии. Это дало возможность говорить видным математикам о превращении или вырождении математического анализа в «клинику и патологию функций» (Валле Пуссен), ибо правильное течение функций стало редчайшим (21) исключением.

Возвращаясь к математическому анализу, следует указать на то, что его перестройка была осуществлена изъятием из его фундамента основных идей Ньютона: переменной величины и предела. Взамен этого под математический анализ была подведена платформа широкого развития учения о бесконечных множествах, т. е. он был базирован весь на идее актуальной бесконечности, введение которой в основу математического анализа и вообще всей математики явилось делом Кантора. Эта идея, абсолютно чуждая Ньютону (и Коши), не имела ничего общего с понятием актуально большого и актуально малого, которые столь интересовали Лейбница, считавшегося с ними, и на которые полностью опирались приверженцы «метода неделимых». Но все же по своим свойствам и результатам она оказалась идущей навстречу идеям Лейбница, ибо многие математические образования (геометрические формы, функции и т. д.) мыслились просто как совокупность геометрических точек, являвшихся «последними элементами» Лейбница, чем достигалась тонкая «зернистость» их структуры. Вскоре же этот прием был перенесен вообще на математические образования, в которых составлявшие их элементы, какова бы ни была их природа, получили имя «точек» в абстрактных пространствах.

Самое понятие величины также подверглось изъятию из математического анализа и заменилось отвлеченным понятием действительного числа как разреза множества всех рациональных чисел. В соответствии с возникновением указанного навыка, каждое действительное число получило название «точки» в арифметическом континууме, и всякая геометрическая точка в обычном линейном континууме, которым пользуется элементарная геометрия, стала соответствовать «точке» арифметического континуума. Это соответствие быстро перешло в отождествление благодаря навыкам аналитической геометрии. Этим был сделан завершающий шаг в направлении «арифметизации континуума», а в дальнейшем и всего математического анализа, отныне строящегося на множествах действительных чисел, причем понятие предела переменной величины заменилось стационарным (или кажущимся таковым) понятием разреза области действительных чисел. Преобразованный таким образом анализ получил название «арифметизированного анализа» или «большого анализа» в отличие от «малого анализа», построенного Коши.

Наличие в настоящее время курсов математического анализа двух различных стилей объясняется как раз сосуществованием двух логически непротиворечивых математических анализов: «малого» и «большого».

Построенный «большой» математический анализ казался совершенным созданием мысли, недоступным возражениям логического порядка и несущим в себе все возможности для разрешения всех возникающих внутри его проблем.

Появление антиномий в общей теории множеств, которое сначала было обеспокоило сторонников арифметизированного анализа, в дальнейшем прошло бесследно, так как на указание этих антиномий следовал ответ, что таковые тут не имеют места, ибо здесь имеют дело со специальными множествами, которые не подлежат антиномиям.

Но потом здесь дал себя снова чувствовать тот же самый феномен, что и в «малом анализе» Коши, а именно, появление проблем большого значения, видимо не разрешимых в недрах арифметизированного анализа его собственными внутренними ресурсами. И тогда мнения относительно прочности воздвигнутой постройки стали расходиться.

Одни продолжали стоять за полную устойчивость возведенного здания «большого математического анализа» и, хорошо понимая роковое значение для судьбы воздвигнутой постройки наличия проблем, с абсолютной точностью и исчерпывающей полнотой формулируемых в недрах «большого анализа» (т. е. в его терминах) и, однако, не разрешимых его собственными внутренними ресурсами, считали нужным лишь пополнять этот анализ от времени до времени новыми аксиомами, сопровождая их тщательно выработанными доказательствами непротиворечивости наращенному ранее материалу (Гильберт). Другие, столь же хорошо понимая, что разрешимость проблем, достигаемая постоянной гальванизацией «большого анализа» новыми аксиомами, не есть истинная и что предмет, предстоящий перед нашим умом как вполне сформированный индивид, не нуждается в аксиомах для установления его взаимоотношений с другими такими же индивидами, ранее изученными, усомнились в самом фундаменте «большого анализа» и, заявляя открыто о необходимости «деарифметизировать континуум», начали выдвигать, в противовес арифметизированному континууму, доктрину о континууме как о «среде свободного становления» (Брауэр, Вейль). Следует прибавить, что к этому их побуждала не только вся тяжесть апорий Ришара (Richard) (22), но еще и яркое сознание того, что арифметизированный континуум— при условии мышления его действительно арифметизированным (и не на словах, но на деле), т. е. каждый его элемент фактически определяемым, отправляясь от единицы,—есть собственно иллюзия, ибо образование это есть чисто случайное, заведомо зависящее от исторического хода математической мысли (23).

Это течение явным образом пошло на сближение с руслом идей Ньютона. При этом вспомнили о первоначальной борьбе с идеями Кантора при появлении первых его опубликований (Эрмит, Кронекер) и о словах Пуанкаре: «Cantor avait cru pouvoir constituer une Science de l'Infini; d'autres se sont avancés dans la voie qu'il avait ouverte, mais ils se sont bientôt heurtés à d'étranges contradictions... Il n'y a pas d'infini actuel: les Cantoriens l'ont oublié, et ils sont tombés dans la contradiction... les vraies mathématiques, celles qui servent à quelque chose, pourront continuer à se développer d'après leurs principes propres sans se préoccuper der orages qui sévissent en dehors d'elles...».

В настоящий момент большинство математиков еще продолжает питать уверенность, что «большой математический анализ» преодолеет налетевший на него идейный шквал и что его здание останется нетронутым. Мнение меньшинства трудно формулировать: такая здесь еще царит неясность (24).

Возвращаясь к нашей основной теме об актуально малых, следует указать, что, подобно апориям Зенона (25), мысль о них никогда не могла быть успешно изгнана из сознания. Имеются, очевидно, какие-то глубоко скрытые причины, еще до сих пор не выясненные полностью, которые заставляют наш ум быть расположенным всерьез считаться с ними. Но когда в математическом анализе дела идут хорошо, тогда ничто не обнаруживает присутствия в нас этой идеи. А в такой сложной обстановке, какая имеется сейчас, нет недостатка в попытках возвратиться к актуально малым, и имеются все основания думать, что этот феномен явно выраженного тяготения к ним есть прежде всего симптом происходящей борьбы научных течений.

Но какова бы ни была судьба попыток серьезного возвращения к ним, нет ни малейшего сомнения, что дело их чрезвычайно затруднено огромной проделанной работой по созданию тончайших и парадоксальных геометрических образов и функций. Представление же об актуально малых, говоря словами Ньютона, «грубовато» (durior), а здесь приходится считаться с необходимостью удержания всего богатства достигнутых филигранных построений (без огульного объявления их всех иллюзиями), сочетая это удержание с безукоризненною логическою строгостью.

И все же — странная вещь! — символика и язык проблемы Пфаффа (26) целиком основаны на восприятии дифференциалов как актуально малых. Но пойдет ли мысль дальше по этому пути или иному, окажется ли следующий этап математического анализа еще более приближающимся к Лейбницу или, напротив, текущим в русле идей Ньютона, или еще каким-либо иным, нельзя забывать о том, что математический анализ является просто «наукой о бесконечном». Это старое его определение идет через века и является более точным, чем известное вычурное определение Ресселя, имевшее лишь интерес момента. И, как далекую цель, мы не должны забывать о страстном видении безграничного оптимизма Якоби (1804—1851), уверенного в наступлении такого порядка вещей, когда «из каждой теоремы математического анализа будет вытекать предложение теории чисел (натуральных), и всякая теорема теории чисел повлечет предложение математического анализа». Имеющееся в настоящее время разъединение этих двух великих дисциплин служит свидетельством не силы их, а слабости.

Примечания

1) Мы говорим здесь об «абсолютном уме» параллельно термину «абсолютный слух», употребляемому в музыке.

2) Мы изъяли здесь и в дальнейшем буквенные обозначения Ньютона, относящиеся к его чертежам, которых мы не приводим.

3) Прием, получивший впоследствии название «линеализации» (linealisation), т. е. облинеивания.

4) Исаак Ньютон. Математические работы. Перевод с латинского и комментарии проф. Д. Д. Мордухай-Болтовского. 1937.

5) Д. Д. Мордухай-Болтовской. Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики. Глава V. Генезис и история теории пределов. § 3. Лейбниц и Ньютон. «Изв. Сев.-Кавказск. гос. ун-та», 1928, стр. 108—109).

6) С. А. Богомолов. Общие основания ньютонова метода первых и последних отношений. «Известия Физико-математич. общ-ва Каз. ун-та», 1916, стр. 24—25.

7) Т. е. в условиях постоянной пространственной (трехмерной) плотности.

8) Мы настолько далеко стоим от времени, когда жил Ньютон, что нам уже невозможно представить себе и почувствовать характер тех трудностей (проистекавших от манеры мыслить предшественников и окружавших Ньютона лиц), перед которыми стоял Ньютон. Точный адэкват латинского текста Ньютона ни на одном из нынешних европейских языков иметь сейчас почти невозможно.

9) См. «Начала», книга 1, отдел 1, лемма VI.

10) В ограниченном интервале изменения независимого переменного.

11) Мы здесь имеем в виду даже не пресловутые непрерывные функции без производной, впервые частично осуществленные Вейерштрассом (с бесконечной производной) и полностью Данжуа (без производной, конечной и бесконечной, во всех точках), но гораздо более замечательные непрерывные функции Корске, имеющие всюду (во всякой точке) определенную ограниченную производную, но изменяющую свой знак

во всяком интервале, где бы он ни лежал и как бы мал он ни был. Такие функции труднее строить, чем функции без производной.

12) Достаточно процитировать слова Эрмита из его письма к Стилтьесу: «Я с ужасом и отвращением отстраняюсь от печальной идеи функций без производных, кривых без касательных, движений без скорости».

13) На смешении закрытого отрезка (сегмента) и открытого промежутка (интервала) основано много недоразумений и среди них «доказательство» знаменитого постулата Эвклида о параллельных (Вржесневский).

14) Однако Ньютон сообщил Лейбницу анаграмму, начинавшуюся так: aaaaabbbccccii и т. д. Лейбниц, разумеется, ничего не понял. Но мы, имеющие ключ к ней, знаем, что говоря современным языком, полная фраза Ньютона была: «Я умею интегрировать все дифференциальные уравнения». Ньютон этим хотел только сказать, что он может сформировать степенной ряд, формально удовлетворяющий предложенному уравнению.

15) В этом отношении появление курса проф. М. Я. Выгодского «Основы исчисления бесконечно малых» (1932) глубоко симптоматично. Этот курс, внутренне цельный и освещенный большой идеей, которой он остается верным, не укладывается в рамки современного этапа математического анализа, длящегося 150 лет и в настоящее время приходящего к своему завершению.

16) Академик И. П. Павлов говорил о возможности сближения процессов квантового характера в человеческом мозге с указанными тенденциями.

17) Здесь не место обсуждать истинные причины этой тенденции (боязни бесконечного) античных математиков. Они чрезвычайно глубоки и не могут быть редуцированы к давлению доктрины элеатов; скорее наоборот: сама доктрина являлась выражением этих причин.

Принятие за истинные числа одних только «натуральных» чисел, избегание иррационального, не укладывавшегося в сознание, утверждение Эвклида, что несоизмеримые расстояния относятся между собой «не как числа», ограничение в геометрии рассмотрением фигур небольшого размера и избегание фигур астрономических размеров, наконец знаменитая работа Архимеда о числе песчинок, направленная к исключению бесконечного,— всё это феномены одного характера.

18) Можно усматривать в этом заключительный акт тайной, долгой и, наконец, победоносной борьбы новой математики против понятия величины.

19) Насколько глубоки исследования Уоллиса об «углах соприкосновения» (см. его обширный трактат «De angulo contactus et angulo semicirculi», занимающий 60 стр. in folio мелкой печати в его собрании сочинений), видно из того, что автор сознавал упорядоченность этих величин по закону неархимедовой шкалы. В новейшее время один лишь Борель в своей «Теории роста» («Théorie de la croissance», 1908) сделал дальнейшую попытку подчинить величины этой шкалы алгорифму вычисления.

На этом же пути лежит недавно сделанное Хаусдорфом (Hausdorf) открытие «алефической иррациональности» на неархимедовой прямой ростов, достижимой дорожками прямого Ω и обращенного Ω^* типов. Открытие это можно сопоставить с открытием Пифагора обычной иррациональности (достижимой дорожками типов ω и ω^*).

20) Мы оставляем в стороне замечательный индивидуальный случай арифметического предела, встреченный Уоллисом. Он рассматривал получение иррациональной величины дробями со все большим и большим приближением, причем уклонение таковых от нее становилось меньше наперед заданной положительной дроби.

21) Здесь уместно заметить, что в последнем издании своего известного «Курса анализа бесконечно малых» Валле Пуссен изъял полностью метод теории множеств и этим приблизил свой текст к изложению курсов «малого анализа». А между тем его курс получил крупную известность именно благодаря замечательному изложению идей «большого анализа».

22) Мы говорим «апория» Ришара, а не «парадокс» Ришара, принимая во внимание чрезвычайную глубину факта, указанного им. Важность рассуждения Ришара вполне сравнима с важностью рассуждений Зенона, хотя и имеет менее популярную форму. Сущность его та, что множество всех индивидуально определимых действительных чисел есть заведомо счетное; с другой же стороны, всякое счетное множество действительных чисел тотчас же диагональным приемом Кантора определяет индивидуальное действительное число, не принадлежащее этому множеству. Здесь имеется поразительная близость к основному предположению Кантора: «континуум не есть счетное множество».

23) Иллюстрировать арифметизацию континуума можно следующим образом. Представим себе два кинематографических экрана, на одном из которых показывается непрерывное движение точки, выходящей из начала O и перемещающейся вправо по оси OX. На другом экране показывается формула для той абсциссы, которую в данный момент имеет движущаяся точка. Эта формула может выражаться и бесконечным алгорифмом, например как сумма бесконечного сходящегося ряда, лишь бы закон этого алгорифма выражался конечным образом (например, чтобы течение членов бесконечного ряда было охарактеризировано конечным образом). Континуум арифметизирован, когда при всяком положении движущейся точки на первом экране ее абсцисса имеет соответственную формулу указанного рода на втором экране.

Но фактически лишь рациональные и алгебраические числа хорошо определимы, отправляясь от единицы. Множество их есть счетное. Чтобы выйти за его границы, необходимо ввести новую арифметическую операцию. Естественным является введение операции возвышения в степень при данных основании и показателе степени и обратное действие — логарифмирование данного числа при данном основании. Это дает бесконечность новых чисел, уже трансцендентных, и важной проблемой математики является решение вопроса о том, принадлежат ли две «натуральные трансцендентности» π и e этому действительному телу, инвариантному по отношению к алгебраическим и двум введенным операциям. Но тело это есть счетное, и чтобы продолжить далее арифметизацию континуума, необходимо согласиться в выборе следующей расширяющей тело операции. И здесь мы всецело зависим от дальнейшего исторического хода математической мысли. Не существует единообразного, общеобязательного для всех процесса арифметизации континуума, который охватил бы его весь. В каждый момент истории математики действительно арифметизированным будет лишь некоторое счетное множество точек континуума, причем возможным является и обеднение в дальнейшем этого множества, если какие-либо «арифметизирующие» операции будут впоследствии забыты.

24) Неясность эта усилилась спорами относительно непротиворечивости самой арифметики и разрешимости в конечном виде ее проблем. Насколько в обсуждении принципов можно иногда встретиться с самыми неожиданными идеями, показывает, например, высказанная Борелем мысль о том, что трансфинитное число Кантора есть просто неиндуктивное число: «конечное, но очень большое». Мысль эта не была развита Борелем, так как трудности, очевидно, превысили имевшиеся возможности. Но будущий историк с удивлением констатирует наличие идеи, не принадлежащей собственно к нашей эпохе.

25) Встречающееся иногда убеждение в том, что апории Зенона «разрешены» арифметизированным анализом, нельзя признать хорошо обоснованным.

26) Мы имеем в виду русло основных изысканий по этой проблеме, приведших к действительно новым результатам, а не к перелицовке уже известного.

ИСААК НЬЮТОН КАК МАТЕМАТИК И НАТУРАЛИСТ *

(1642—1727)

Величайший гений человечества Исаак Ньютон родился 25 декабря 1642 г. (стар. ст.) в Вульсторпе близ Грэнтэма в Линкольншире.

Гений Ньютона слишком велик, чтобы можно было дать ему полную характеристику в столь кратком изложении. Бессмертное сочинение Ньютона «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» проникнуто такой не поддающейся описанию силой мысли и глубиной, что не могло быть сразу оценено его современниками. Но по мере того как стали понимать истинный смысл и значение его замечательного труда, слава Ньютона начала расти и затмевать собой славу всех великих ученых античного мира, средних веков и первого периода нового времени. Уже ближайшие его последователи, изумленные величием сделанного Ньютоном, характеризовали его сочинение как «величайшее и непревзойденное никем создание человеческого ума», а про него самого крупнейшие ученые позднейших времен говорили: «С удивлением спрашиваем мы: к какому роду принадлежит человек, могший разить этим гигантским мечом, который другие едва были в состоянии только приподнимать с земли?».

И теперь, по прошествии трех веков, мы должны сказать, что со времени Ньютона, в буквальном смысле слова, начинается новая эра в естествознании вообще и в целом ряде наук, в частности. И действительно, мысль Ньютона до неузнаваемости изменила лицо математики, физики и астрономии.

Исчисление флюксий

1. Накануне открытия. Для того чтобы понять значение Ньютона для математики, необходимо бросить взгляд на ее состояние в период, предшествовавший Ньютону. Этот период можно охарактеризовать как эпоху растерянности и величайшего хаоса, в который, однако, были брошены первые семена того, что в настоящее время мы называем анализом бесконечно малых' и контуры чего поднимались, как

---

* Журнал «Природа», 1943, № 3—4, стр. 74—83.

в тумане, отчетливо чувствуемые только несколькими острыми умами той эпохи.

До какой степени открытие анализа бесконечно малых было уже созревшим, свидетельствует тот факт, что некоторые сильные умы того времени (мы имеем в виду Декарта и Ферма) вплотную подходили к открытию дифференциального исчисления и, говоря образно, уже почти касались его. Во всяком случае, они уже начинали пользоваться приемами дифференциального исчисления в некоторых частных случаях. На этом основании такие знаменитые математики, как Лагранж, Лаплас и Фурье, пораженные близостью приемов Ферма к процессам дифференциального исчисления, были склонны приписать Ферма честь открытия этого исчисления, против чего сделал возражение Пуассон, указавший, что «дифференциальное исчисление состоит в системе точных правил для отыскания дифференциалов всех функций, и это — существеннее, чем та манера рассматривать бесконечно малые изменения, с которой подходят к решению одной или двух изолированных проблем».

С другой стороны, ближайший учитель Ньютона профессор Барроу (Barrow), передавший впоследствии занимаемую им кафедру своему знаменитому ученику, также весьма близко подошел к открытию дифференциального исчисления и начал даже пользоваться почти тем же самым основным чертежом, каким пользовался и Ньютон для изложения своего метода флюксий и какой фигурирует во всех наших учебниках анализа бесконечно малых. Барроу не хватало лишь общего обозначения, и открытие прошло мимо него.

Наконец, и сам Ньютон, по его собственному признанию, одно время думал, что открытие метода касательных (т. е. метода флюксий) уже сделано неким Слюзом (Baron René François de Sluse).

В этих условиях следует ли удивляться тому, что само открытие анализа бесконечно малых совершили почти одновременно и независимо друг от друга в двух разных местах Ньютон и Лейбниц? История науки говорит нам, что когда идеи созревают и, говоря образно, носятся в воздухе, всегда можно ожидать одновременного и независимого открытия; таков, по-видимому, случай открытия неевклидовой геометрии, задолго предвиденной Гауссом, который вывел для себя ее основные формулы за много лет ранее формального ее открытия, осуществленного независимо и почти одновременно Н. И. Лобачевским и Болиа (Bolyai).

2. Античная математика. Главной причиной, вызвавшей созревание идей, было отчетливое сознание недостаточности античной математики, ни в какой степени не соответствовавшей требованиям новой эпохи. Гений античного мира был направлен по преимуществу на геометрию, и его активность почти вся была посвящена изучению отдельных кривых линий. Само это изучение было чрезвычайно глубоким и проводилось характерным для древних статическим методом: рассматриваемая фигура или кривая предполагалась начерченной и неподвижной, и далее чистыми рассуждениями выводились нужные свойства кривой из анализа

ее элементов. При этом очень важную роль играли касательные, ибо они оказывались тесно связанными с чрезвычайно важными и глубоко лежащими свойствами кривых. Само понятие касательной определялось опять-таки статически, т. е. вполне характерным для античной мысли способом: «касательной» называлась просто прямая, имеющая с кривой только одну общую точку. Следует отметить, что у античных геометров совсем отсутствовала общность: классификаций кривых не было, всякая кривая изучалась отдельно и как индивид. О том, каких это стоило трудов, легко себе составить представление, если вспомнить, что для изучения свойств одной только окружности была нужна целая книга.

Другим характерным свойством античной мысли было полное изгнание из геометрии движения: изучаемая фигура и все ее элементы предполагались абсолютно неподвижными [1].

3. Эпоха Возрождения. После перерыва в античных традициях, с наступлением эпохи Возрождения, пришли новые требования. В геометрию древних было введено движение вместо прежней застывшей неподвижности, и касательная стала определяться как предельное положение продолженной в обе стороны движущейся хорды, когда точки ее пересечения с кривой сливаются в одну. Начиная с этого момента,

---

[1] Мы оставляем в стороне причины такой традиции античных геометров. Они глубоки и не могут быть тривиализированы к боязни критики элеатов. Основным моментом античного мировоззрения было восприятие отдельного тела как бытия. Сам внешний образ тела был адэкватом понятия бытия; то, что не имело образа, вообще не существовало. Весь внешний мир — космос — предстоял как статика осязаемо-наличных отдельных тел и был их суммой. Античная математика, идеализируя такое восприятие, в основе своей была только стереометрией. Достаточно вспомнить античное определение линии как «длины без ширины», с которым современной науке было бы нечего делать. Промежуток между телами, т. е. наше пространство, было «чистым ничто», и для него, по-видимому, не имелось положительного термина. В соответствии с этим, античная геометрия избегала введения в свои рассмотрения бесконечного пространства и была, как «познание вечно сущего», только учением о неизменяемых, т. е. ставших, неподвижных формах.

Имеется глубокая разница между таким восприятием пространства и восприятием его у Ньютона. Для Ньютона пространство было объективным вместилищем всех вещей, т. е. само тоже было предметом среди прочих предметов, имеющим свои собственные свойства, к которым можно было подходить и которые можно было изучать, как изучают свойства всякой внешней вещи. Поэтому трудно надеяться отыскать у Ньютона следы концепции неевклидовой геометрии. Достаточно вспомнить колебания Гаусса относительно опубликования «его размышлений» по неевклидовой геометрии: здесь была не одна боязнь возражений («крика беотийцев»), но и сдержанность глубокого и много думавшего мыслителя, колебавшегося сделать трещину в кристаллльно чистом здании тысячелетней геометрии, тогда как у более молодого Лобачевского и юного Болиа таких колебаний не могло быть.

Противоположностью концепции пространства у Ньютона является соответствующая концепция Лейбница, для которого пространство является лишь «соотношением между вещами», т. е. оно было для Лейбница функцией порядка предметов. Концепция эта, по-видимому, близка к концепции Эйнштейна.

задача о проведении касательных ставится в центре внимания европейской мысли. Этого уже требовал «математический язык книги природы» («Natura e scritta in lingua mathematica»), по удивительно вещему выражению Галилея, и связанная с этим необходимость изучать криволинейное движение и его скорость: с указанного времени начинаются поиски касательных для возможно большего числа кривых, как известных уже античным математикам, так и открытых в Новое время. Но и помимо этого, начиная с конца XVI в., физические и астрономические науки настойчиво требовали бесконечно малой геометрии, иначе они грозили быть остановленными в ходе их развития: теорема площадей механики требовала квадратур; сюда же присоединилось отыскание центров тяжести, придававшее квадратурам совершенно реальный смысл. И в то же самое время астрономия настаивала на вычислении объемов тел вращения, т. е. уже на кубатурах.

Стремление удовлетворить назревшим потребностям принудило геометров эпохи Возрождения (Кавальери, Торричелли, Вивиани) выработать особый метод неделимых, представляющий собой как бы карикатуру анализа бесконечно малых, дававший ценные, хотя казавшиеся малонадежными, результаты, а порой приводивший и к прямым грубейшим ошибкам даже сильнейших людей (Кеплер). Поэтому у геометров того времени было стремление, получив результат методом неделимых, переобосновать его методом античных математиков (Гюйгенс).

Кроме того, метод неделимых, хотя и вводил уже в рассмотрение движение, однако еще подражал древним в отдельном изучении каждой кривой: общность по-прежнему отсутствовала, и геометры эпохи Возрождения, как и античные математики, продолжали изучать каждую кривую в отдельности, загромождая этим себе все пути дальнейших открытий. Желание избавиться от блуждания в частностях, присущих всякой кривой, рассматриваемой как индивид, и побуждало Декарта и Ферма стремиться выработать более общий прием проведения касательных.

4. Дело Ньютона. Оно прежде всего состояло в анализе создавшегося положения. Будучи по природе натуралистом, Ньютон не стал блуждать в логических ухищрениях, но принял как принцип образование всех вообще величин — алгебраических, геометрических и механических — путем их непрерывного возрастания или убывания. Таким образом, все величины x, y, z,...Ньютон рассматривал как текущие (fluentes), а скорости, с которыми они текут, Ньютон называл флюксиями (fluxiones) и обозначал их через $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$,...

Для Ньютона всякая величина возникала и существовала благодаря возрастанию или убыванию, происходившему от беспрестанного наращения или сбрасывания количества, пропорционального флюксии. Приняв это за принцип, Ньютон вскоре оказался в состоянии определять флюксии и, стало быть, касательные ко всем кривым, уравнения которых можно было написать, причем ход этого определения был совершенно общим, планомерным и не зависимым от частных свойств изучаемой кривой. Это и было открытием самого существа дифференциального исчисления.

Далее, Ньютон подверг анализу все типы ставившихся в то время проблем механики и астрономии, как-то: определения кривизны, площади, длины дуги, центра тяжести и т. д.— все это в самом общем случае. Тщательное размышление привело Ньютона к тому поразительному заключению, что все такие задачи, несмотря на кажущееся большое их различие, приводятся только к двум основным типам: 1) отыскать касательную к заданной кривой и 2) по заданной касательной разыскать саму кривую.

Первая задача есть задача отыскания флюксии, когда дана флюэнта; это есть основная задача дифференциального исчисления. Вторая задача, обратная первой, есть задача разыскания флюэнты, когда дана ее флюксия; это есть основная задача интегрального исчисления, каковое уже тем самым стало открытым.

Размышления Ньютона происходили в эпоху 1665—1666 гг., к 1671 г. открытие было уже настолько завершенным, что Ньютон с величайшею легкостью решал задачи анализа бесконечно малых, бывшие в ту пору никому не под силу.

Следует, однако, заметить, что, будучи более натуралистом, чем логиком, Ньютон как раз и не дал тех точных формальных правил, лежащих в основании найденного им исчисления флюксий, обладание которыми, как мы видели выше, Пуассон считал критерием приоритета открытия дифференциального исчисления. Ньютон опубликовал существо своего метода лишь 42 года спустя, да и то в неполном виде. Вообще следует указать, что нежелание публиковать и стремление откладывать печатание были одною из черт характера Ньютона, более всего на свете ценившего внутренний покой и возможность невозмущаемого ничем течения размышлений [1].

5. Тенденция Лейбница. Знаменитый соперник Ньютона Лейбниц имел ум совсем иной природы: он нисколько не был натуралистом, но был философом-логиком [2]. Относясь несколько пренебрежительно к поискам «законов природы», Лейбниц видел достойную его сил задачу лишь в отыскании законов мышления.

---

[1] Достаточно, например, вспомнить, как однажды Ньютон, раздосадованный возникшими спорами по поводу его теории света, сказал: «Очевидно, кто хочет писать о свете, тому следует оставаться в тени».

Вообще, приключившееся впоследствии прискорбное столкновение двух гениальных мужей — Ньютона и Лейбница — было делом их друзей, создавших условия для вовлечения их в род полемики.

[2] Некоторые английские авторы еще в начале текущего столетия говорили о славянском происхождении Лейбница и сближали его фамилию: «Leibnitz» со словом «Лубенец».

В 1666 г. он составляет свое, привлекающее теперь к себе общее внимание, сочинение «De arte Combinatoria», существенная часть которого до начала текущего столетия оставалась неопубликованной, где он дает замечательный план математической логики, которая сделала бы ненужным ищущий инстинктивный процесс живой мысли, и где искусство думать было бы сведено к исчислению алгебры мышления, формулы которой выражали бы чистые законы мысли. «Величайший живописец начертит от руки прямую линию хуже, чем ребенок, вооруженный линейкой», говорил Лейбниц. Эта идея не была, даже в то время, целиком новой, ибо порой останавливала на себе внимание отдельных мыслителей [1]. Но фактическая реализация этого плана была внушена Лейбницу аналитической геометрией Декарта, где геометрическое воззрение в самом деле было заменено алгебраическими манипуляциями [2].

В 1672 г. Лейбниц изучает математику как науку, совершеннее всего отражающую законы мышления, и, имея необыкновенно проницательный ум, сразу же нападает на проблему касательных как наиболее важную. В следующем, 1673 г., он открывает связь «прямой и обратной задач касательных» и таким образом нападает на мысль формального установления двух взаимно противоположных исчислений, причем ясно видит в обратной задаче касательных ключ к квадратурам кривых.

Не будучи натуралистом, Лейбниц был чужд идее введения в рассмотрение скорости. В противоположность Ньютону и в согласии со своими философскими взглядами, Лейбниц рассматривает всякую величину не как возникающую и существующую благодаря беспрестанному наращe-

---

[1] В средние века — Раймонда Луллия. В наши дни этой идеей живо интересовался академик И. П. Павлов, сближавший законы мышления с далеко идущими следствиями условных рефлексов. В переписке с американскими учеными И. П. Павлов ставил вопрос о построении модели человеческого мозга, функционирование которой иллюстрировало бы хоть элементарные формы умозаключений.

[2] Как впоследствии выяснилось, неопубликованная часть указанного сочинения Лейбница содержала как раз важное исчисление классов, начавшееся складываться в конце прошлого столетия (Шредер, Пеано) и развитое в начале текущего века в большую систему Ресселем и Уайтхедом («Principia Mathematica», vol. I—III); этим исчислением в последние годы воспользовался Гильберт для своей известной попытки («Grundlagen der Mathematik») отыскать аксиомы математических рассуждений, установить взаимную их непротиворечивость и, в частности, доказать полную математическую разрешимость (конечным числом шагов) всех проблем теории чисел. Известно, что к этой попытке Гильберта, еще при появлении первых ее эскизов, крайне скептически отнесся Пуанкаре, указавший на прорыв в систему Гильберта порочных кругов (circulus vitiosus) и предсказавший a priori ее неудачу. Такую же неудачу попытке Гильберта в ее новой редакции предрек 12 лет назад и Лебег. И действительно, автор оказался не в силах защитить свою систему от дальнейшего прорыва порочных кругов, в конце концов окутавших ее всю. Насколько можно судить, неудача существа концепции Гильберта встречает в настоящее время все более и более широкое применение.

нию или сбрасыванию бесконечно малых количеств («моментов», по терминологии Ньютона), но как стационарную сумму ее бесконечно малых элементов.

Со всей остротой понимая громадную творческую силу всякого счастливо найденного символа («характеристики», как выражается Лейбниц), создавая символ определителя n-го порядка и устанавливая его внутреннюю структуру в целях общего решения систем линейных уравнений [1], он в течение нескольких лет, уклоняясь от открытий в области сложившейся математики, упорно и тщательно ищет только одного: глубокой и творческой символики новых исчислений, и, наконец, в 1675 г. открывает необыкновенно простые и проникновенные обозначения, основанные на устрашавшей многих и казавшейся безнадежно скомпрометированной методом неделимых идее бесконечно малых. Начиная с этого момента, Лейбниц пишет формулу за формулой, уже в современном виде основные правила дифференциального и интегрального исчислений [2]. Через 8 лет, в 1683 г., когда символика новых исчислений была Лейбницем тщательно продумана в далеко идущих следствиях, он публикует весь полученный им канон анализа бесконечно малых.

Нужно ли удивляться тому, что вышедшие из рук столь несравненного мастера, с необыкновенной остротой прозревавшего творческую силу всякого символа, символика и терминология возникшего анализа бесконечно малых оказались столь счастливыми и творческими, что быстро завоевали на континенте господствующее положение и даже до сего дня лежат в основе современного математического анализа? Обозначения и терминология Ньютона были вскоре на континенте вытеснены и забыты; лишь в последнее время наблюдается употребление символики Ньютона в работах по математической физике.

Столь интересовавший прежде вопрос о приоритете в настоящее время, по-видимому, утрачивает смысл. Хотя Лейбниц на 28 лет ранее Ньютона публикует свое открытие анализа бесконечно малых, найденного им независимо от Ньютона и исходя из совсем иных оснований, однако истиной является то, что Ньютон ранее Лейбница на 10 лет установил для себя наличие двух великих и взаимно противоположных исчислений и, не составляя их канона, полностью понял все их неизмеримо важное значение для изучения природы. Его «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica», создававшиеся в течение 20 лет и вышедшие спустя три года

---

[1] Вот интересный отрывок письма Лейбница относительно этого к Лопиталю (Marquis de l'Hospital), датированного 28 апрелем 1693 г.: «Une partie du secret de l'analyse consiste dans la caractéristique, c'est-a-dire dans l'art de bien employer les notes dont on se sert et vous voyez, Monsieur, par ce petit echantillon, que Viéte et Descartes n'en ont pas encore connu tous les mystères».

[2] Насколько эта работа была трудной, когда ее проделывали в первый раз, можно судить из того, что формулы дифференциалов произведения и частного потребовали от Лейбница значительного размышления и крайнего внимания и были им получены в корректном виде лишь после десятидневных усилий.

после публикации Лейбница, насквозь проникнуты духом новых исчислений и показывают в исполинском виде значение этих исчислений для изучения природы и всю мощь Ньютона в умении применять их. И эта мощь становится для нас теперь тем яснее, чем больше мы обращаем внимание на чрезвычайную загроможденность творческого пути и полное отсутствие подходящей символики и соответствующего канона, как, например, у античных математиков.

По-видимому, Ньютон не особенно интересовался новыми исчислениями ради их самих, но рассматривал их лишь как инструмент для нашего понимания природы, придавая этому громадную важность, тогда как для Лейбница, имевшего по-иному устроенный ум [1], новые исчисления были важны сами по себе, как приподнимавшие завесу над нашими законами мышления, которые он упорно искал.

6. Суммирование бесконечно малых. При рассмотрении вопроса о флюксиях следует обратить внимание на один пункт, иногда оставляемый в тени: в числе формул, фигурирующих в каноне новых исчислений, важнейшей из всех и наиболее глубокой является та, которая — говоря современным языком — отождествляет определенный интеграл с разностью двух значений первообразной.

Мы оставляем сейчас в стороне деликатный вопрос о возникновении самой концепции определенного интеграла: обращение задачи дифференцирования, т. е. идея неопределенного интеграла, бесспорно есть дело Ньютона и Лейбница, тогда как концепцию определенного интеграла обычно относят Лейбницу [2]. Мы хотим здесь обратить внимание на исключительное значение формулы, о которой идет речь: эта формула связывает

---

[1] Идея о возможности существования столь различно устроенных интеллектов, настолько различных, что между ними невозможно ни взаимное понимание, ни какое-либо соглашение, была с большою силою и ясностью высказана Пуанкаре в его заключительных словах в полемике с Расселем. Эта мысль, привлекшая внимание, встретила осторожное возражение Бореля.

[2] Большой принципиальной разницы между обоими авторами, Ньютоном и Лейбницем, в отношении дифференциального исчисления нет: лишь символика, да хорошо развитый канон исчисления дифференциалов у Лейбница, при почти полном отсутствии такового у Ньютона, являются их отличиями. Но в отношении интегрального исчисления разница между ними чрезвычайно велика. Ньютон рассматривает интегральное исчисление как «обращение дифференцирования»; для него, следовательно, интегральное исчисление было по преимуществу исчислением неопределенных интегралов, т. е. исчислением первообразных. Ценность этого исчисления он видел в том, что производной площади была ордината данной кривой, и еще в том, что многие задачи сводились к задаче о площадях, например задача о длине дуги и т. п. Следовательно, все такие задачи являлись лишь формой общей задачи обращения дифференцирования.

Точка же зрения Лейбница была совсем иной; для него интеграл был стационарной суммой бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых, т. е. он рассматривал интегральное исчисление как исчисление определенных интегралов. Вряд ли у Ньютона можно найти случай точного знания величины определенного два взаимно обратные исчисления и заслуживает название «основной формулы анализа бесконечно малых».

Рассматриваемая формула сближает две совсем разнородные идеи, и в соприкосновении их и заключена вся творческая мощь новых исчислений: с одной стороны, идея суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых, следовательно, операция по существу трансцендентная, для нас (т. е. в конечном виде) в принципе невыполнима, вследствие перехода к пределу; с другой стороны, сам результат этой трансцендентной операции представлен этой формулой именно в конечном виде, если, разумеется, первообразная нам известна.

Интегральное исчисление немного бы стоило, если бы первообразная не разыскивалась в конечном виде, но всегда требовала бы тоже перехода к пределу: в этом случае не было бы никакого прогресса, ибо речь шла бы только о связи двух фактически невыполнимых операций — отыскания первообразной и суммирования бесконечно малых. Вся огромная заслуга Ньютона и Лейбница состояла именно в конечной выразимости результата фактически невыполнимой операции. Во многих требовавшихся наукою ценных случаях, например при отыскании длин дуг, центров тяжести и т. д., это давало часто быстрый и поразительный эффект, оставлявший неизгладимое впечатление в сознании ученого.

С тех пор минуло более 250 лет, и по пути Ньютона и Лейбница прошло не мало сильных людей. Никто из них не смог продолжить дела основоположников анализа бесконечно малых и не мог указать другого метода выражать в конечном виде результат суммирования бесконечно малых: метод обращения дифференциального исчисления, т. е. исчисление первообразных, открытое Лейбницем и Ньютоном, остается до сих пор един-

---

интеграла между данными пределами, если неопределенный интеграл был ему неизвестен.

В связи со своей точкой зрения, Ньютон все свое внимание перенес на исчисление неопределенных интегралов, в котором достиг величайшего искусства и глубины; Эйлеру после Ньютона оставалось почти одно только систематизирование материала. Ньютону принадлежат псевдо-эллиптические интегралы, интегрирование рациональных дробей редукцией к интегралам от иррациональных выражений, интегрирование дифференциального бинома, интегралы, приводимые к интегралам от дифференциальных биномов, и т. д.

Однако будет явной несправедливостью сказать, что Ньютону были чужды, в принципе, пределы сумм бесконечно увеличивающегося числа бесконечно умаляющихся слагаемых. Достаточно для этого цитировать книги 1 отдела I «Поучение» к лемме XI («Математические начала натуральной философии», перевод академика А. Н. Крылова, 1915).

«...Так как само представление неделимых грубовато (durior), то этот способ представляется менее геометричным, почему я и предпочел сводить доказательства всего последующего к пределам сумм исчезающих количеств и к пределам их отношений... Поэтому, если... я и рассматриваю какие-либо величины как бы состоящими из... частиц, то следует разуметь, что это — не суммы и не отношения определенных частиц, а пределы сумм и пределы отношений исчезающих величин...».

ственным методом. Даже Эйлер ограничился тем, что внес только некоторую планомерность в процесс поисков первообразной.

Лишь на долю Августина Коши, сильнейшего математика XIX в., выпала честь дать особый прием довольно общего характера, названный им исчислением вычетов, посредством которого во многих случаях, там, где нам изменяет испытанный метод первообразных Ньютона и Лейбница, можно выражать в конечном виде результат суммирования бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых.

Но этот прием Коши, кажущийся на первый взгляд очень «простым», в самом своем существе совсем не ясен: основанный на употреблении функций мнимого переменного, он производит впечатление лишь счастливой случайности. Его принудительная убедительность служит ширмой или маской его сущности и не открывает нам ни его истинной природы, ни механизма его удачливости. Ни теория Римана аналитических функций, ни формальные работы Гаусса о мнимостях, ни, наконец, попытки Минковского о пространственно-временном континууме не бросили достаточно света на вопрос об истинном генезисе мнимости (Федоров).

В связи с этим, по-видимому, стоит возрастающее недовольство формальною точкою зрения Вейерштрасса, которую начинают рассматривать уже как тормоз в научном движении (Борель), стремление возвратиться к более осторожной первоначальной концепции Коши и настойчиво возникающие попытки выйти за пределы жесткого, изолированно стоящего семейства аналитических функций (Борель, академик С. Н. Бернштейн, Карлеман, Данжуа) [1].

Теория света

Рано пробудившийся у Ньютона интерес к вопросам космического порядка и первые наблюдения, сделанные им в возрасте 22 лет над Луною, привели его в дальнейшем к изобретению отражательного телескопа и к исследованию света вообще. Если в своих математических изысканиях Ньютон обнаружил силу своего теоретического гения, то в своих исследованиях над свойствами света Ньютон показал, какую вообще мощь имеет человеческий умозрительный гений, когда он направлен на мир эксперимента. Тысячи людей видели явление радуги и замечали разноцветные лучи, вызываемые в осколках стекла солнечным светом, и все же нужен был весь умозрительный гений Ньютона, чтобы в этом увидеть

---

[1] Нужно еще отметить близость этого круга идей к важнейшей из проблем математики: связи между собой тех или других математических констант. Установление наличия такой связи является подлинным открытием, сопровождаясь многочисленными следствиями и давая могущественный импульс для появления новых идей. На этом пути имеет значение даже констатирование отсутствия связи, т. е. различные доказательства транцендентности, хотя таковые и имеют, в конечном счете, чисто отрицательный характер.

не игру случая, а глубоко скрытое, в высшей степени важное явление природы: разложение белого света на свои составные части — простые спектральные цвета. Продолжительные размышления над этим, столь обыденным, простым явлением привели его к постановке самых элементарных, ставших классическими, опытов с прохождением света через стеклянные призмы, которые тем не менее никто не ставил, хотя, без сомнения, многие не только держали призмы в своих руках, но и видели все то, что видел и Ньютон,— видели, не понимая, однако, смысла виденного.

Опыты эти показали неравномерное преломление света и послужили для Ньютона точкою отправления для его знаменитой атомной теории света, к которой современная наука возвращается, правда в другом понимании, после извилистого и длинного пути [1].

Из деятельности Ньютона в этом направлении очень поучительно видеть, сколь малого стоит голый эксперимент, если он заранее не создан целиком в нашей мысли.

Закон всемирного тяготения

Роль Ньютона в истории астрономии должна быть признана исключительно большою, так как он, в буквальном смысле слова, создал новую эру в науке о небе. Эта эра в настоящее время далеко не закончилась.

Установление закона тяготения покрыло имя Ньютона вечной славой. Имеются две различные версии этого открытия.

Обычная версия такова: ряд лиц, среди которых нужно цитировать имена Роберта Гука, Гюйгенса, Галлея, Врена, самого Ньютона и других, предсказывал, что если третий закон Кеплера верен (а в абсолютной точности его в то время сомневались), то притяжение между Землею и другими членами солнечной системы должно происходить обратно квадратам расстояния. Однако доказательство истинности или ложности этого ожидания отсутствовало.

В 1666 г. Ньютон, предположив верность третьего закона Кеплера, получил простое выражение величины ускорения силы тяжести на поверхности нашей планеты в функции радиуса Земли, расстояния Луны до Земли, времени лунного обращения и длины градуса земного экватора.

[1] Физики говорят: взаимное уничтожение позитрона и электрона, превращающихся при этом в гамма-лучи, и обратное превращение гамма-лучей в пару (электрон и позитрон) вызывает в памяти одно пророческое место в «Оптике» Ньютона, где он писал в 1704 г.: «Природа любит превращения. Среди разнообразных и многочисленных превращений, которые она делает, почему бы ей не превращать тела в свет и свет в тела?» Гамма-лучи — это, по существу, свет. Электроны и позитроны — это частицы, т. е. тела. Поэтому превращение гамма-лучей в пару: электрон + позитрон и обратно есть как раз то самое, что имел в виду Ньютон в своем предвидении.

Но эта последняя величина Ньютону была известна в неточном виде: 60 английских миль вместо 60,5. Вычисленная величина земного ускорения поэтому оказалась тоже неточной: ниже наблюдаемой в действительности. Усматривая в этом неверность закона обратных квадратов, Ньютон прекратил дальнейшие вычисления.

Но 18 лет спустя, на заседании Королевского общества, Ньютон случайно узнал о более точных измерениях земного экватора, проделанных Пикаром и давших ему величину градуса, превышавшую прежнюю на 0,5 английской мили. Отправляясь от этой, более точной величины, Ньютон повторил свои вычисления и получил для земного ускорения величину, наблюдаемую в действительности. Это подтверждало закон обратных квадратов. В одном из «поучений» «Начал натуральной философии» Ньютон засвидетельствовал свою зависимость от закона центробежной силы Гюйгенса, служившего ему в его вычислениях [1].

Легенда говорит о столь сильном волнении Ньютона при его перевычислениях с цифрою Пикара, проистекавшем от сознания приближающегося великого открытия, что он уже не смог лично сам закончить своих вычислений, и их за него довел до конца один из его друзей.

---

[1] См. книги I отдела II «Поучение» к предложению IV («Начала» в переводе академика А. Н. Крылова): «Случай, указанный в следствии 6 («Если времена обращения находятся в полукубическом отношении радиусов, то центростремительные силы обратно пропорциональны квадратам радиусов, и наоборот») имеет место для небесных тел (как это независимо друг от друга отметили Врен, Гук и Галлей), поэтому относящееся к центростремительным силам, убывающим пропорционально квадратам расстояний от центра, я решил изложить в последующем подробнее.

При помощи предыдущих предложений может также быть выведено отношение центростремительной силы к какой-либо известной силе, например к силе тяжести, ибо если тело обращается около Земли по кругу под действием силы тяжести, то эта сила и есть центростремительная. Ее можно определить по падению тел и по времени оборота и величине дуги, описываемой в заданное время. Такого рода предложениями Гюйгенс в превосходном своем сочинении «De Horologio oscillatorio» и сопоставил силу тяжести с центробежными силами обращающихся тел».

Таким образом, сама мысль о законе тяготения обратно квадратам расстояния, по-видимому, зародилась в одно и то же время в нескольких умах. Но насколько глубоко видел Ньютон план дальнейших шагов в этом направлении, видно из слов академика А. Н. Крылова («Ньютонова теория астрономической рефракции». Изд-во АН СССР. М., стр. 37):

«Видимо, Ньютон ясно сознавал, что сопоставление теоретического и выведенного из наблюдений значений этого неравенства (параллактического неравенства Луны), которое, как впоследствии оказалось, равно 2′6″, доставляет некоторое соотношение между параллаксом Луны, параллаксом Солнца и отношением масс Луны и Земли. Эта последняя величина может быть определена по отношению высоты прилива во время сизигий и квадратур, что Ньютоном было показано; значит, по величине параллактического неравенства Луны имелась возможность определить параллакс Солнца, т. е. расстояние от Земли до Солнца, а по нему и все прочие абсолютные размеры солнечной системы, так сказать, не выходя из кабинета, что и было сделано через 125 лет Лапласом.

Отсюда становится понятной та настойчивость, с которой Ньютон требовал от Флемстида наблюдений Луны».

Другая версия, более глубокая, такова: в 1666 г. численное подтверждение закона обратных квадратов Ньютоном было полностью доведено до конца, но тогда Ньютон не мог определить притяжения сферическим слоем внешней точки. Его письма к Галлею показывают, что он не предполагал, что Земля притягивает так, как если бы вся ее масса была сосредоточена в ее центре. В этих условиях Ньютон не мог иметь уверенности в том, что предполагаемый закон тяготения подтверждался цифрою, хотя благодаря большим расстояниям он мог претендовать на то, что дал тесное приближение. Когда Галлей посетил Ньютона, через 18 лет, в 1684 г., он просил Ньютона определить форму орбиты планеты, исходя из закона притяжения обратных квадратов. Ньютон немедленно ответил, что орбитой будет эллипс, ибо он уже решил для Гука в 1679 г. аналогичную проблему. После свидания с Галлеем Ньютон, пользуясь величиной земного радиуса, указанной Пикаром, пересмотрел свои прежние вычисления и оказался в состоянии показать, что если расстояния между телами солнечной системы столь велики, что сами тела могут быть рассматриваемы как точки, тогда их движение происходит в согласии с предполагаемым законом тяготения. Наконец, только в 1685 г. он пришел к точной теореме о притяжении внешней точки сферическим слоем, так недостававшей ему ранее. Это и было окончательной фазой его открытия.

Версия эта основана на анализе астрономом Адамсом громадной массы неопубликованных писем и рукописей Ньютона, составляющих «Портсмутскую коллекцию», бывшую до конца XIX в. частною собственностью. Неопубликованные рукописи Ньютона, содержащиеся в этой коллекции, показали, что он имел в своих вычислениях движения Луны гораздо бо́льшую степень приближения, чем то, что дал в «Началах». Подобная замена лучшего результата худшим обусловлена была желанием Ньютона иметь свои результаты интерпретированными геометрически, тогда как такая интерпретация высокого приближения ему не давалась. Рукописи этой же коллекции показывают, каким образом Ньютон приходил к своим результатам. Например, знаменитое решение проблемы движения тела вращения в слабо сопротивляющейся среде, формулированное в «Поучении» книги II, теорема 35, отсутствует в «Началах». Но оно содержится в набро́ске письма к Давиду Грегори, жившему в Оксфорде.

Позже закон обратных квадратов тщательно проверялся во всех уголках Вселенной и везде оказался точным — от движения планет и их спутников нашей системы до двойных звезд нашего Млечного пути. Таким образом, в глубинах и в пределах нашего Млечного пути этот закон точен. Вопрос о движениях друг к другу спиральных туманностей приобретает особый интерес.

Это открытие, сделанное «на небе», имело неисчислимые весьма ощутительные последствия для жизни на Земле: расчет затмений, точное знание приливов и отливов и связанное с ним вождение кораблей — все это плоды этого открытия.

В свое время открытие это произвело величайшее впечатление, и один из сильнейших ученых конца XVIII в. прекрасно сказал: «Слава Ньютона написана на небе, и планеты своим непрестанным движением будут вечно свидетельствовать о ней».

К этому остается прибавить то, что для нас научный облик Ньютона обольстительно чарующ, так как непреклонность движений его ума будет всегда служить для дальнейших исследователей тем, чем служит компас для пустившегося в море путешественника.

V

СОПРОВОДИТЕЛЬНЫЕ СТАТЬИ

Н. Н. Лузин

РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО*

Мои работы по теории функций комплексного переменного почти неотделимы от работ по метрической теории функций действительного переменного. Причина этому совершенно простая: в ту эпоху конца столетия и начала века мало кто думал, что функции комплексного переменного имеют природу sui generis, и большинство ученых полагало, что разгадать таинственность некоторых глубоких положений аналитических функций и проникнуть в последние их «секреты» можно, следуя методам функций действительного переменного, и что поэтому всякий прогресс этих последних методов тотчас же благотворно отразится на успехах теории функций комплексного переменного. Таким образом, речь шла о переносе и адаптации методов действительного переменного в области комплексного переменного.

Моя задача как лица, отдававшего много времени функциям действительного переменного, состояла в формулировании проблем комплексного переменного по типу проблем действительного переменного и разрешении их методами, выработанными в арсенале функций действительного переменного.

1. В качестве самой первой проблемы функций комплексного переменного, атакованной мною, была проблема, возникшая из изучения прекрасной работы астронома Фату [1]. Проблема эта ставила вопрос: насколько стремление к нулю коэффициентов a_n ряда Тэйлора

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

обеспечивает сходимость его почти всюду на периферии C круга радиуса 1? Казалось, что условие $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ вынуждает указанную сходимость.

---

* Настоящая статья опубликована в «Успехах математических наук» (7, вып. 2) и представляет собой извлечение из письма Н. Н. Лузина, написанного А. И. Маркушевичу в 1947 г. и содержащего материал для статьи в сборнике «Математика за XXX лет».

[1] P. Fatou. Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta Math., 30, 1906.

Эта гипотеза оказалась неверной, и мне удалось сформировать ряд Тэйлора с условием (1), расходящийся в каждой точке окружности C единичного круга [1], [2].

2. Вторая моя работа [3], опубликованная в «Известиях Иваново-Вознесенского политехнического института» уже в послереволюционное время, в 1919 г., проистекала из диссертации В. В. Голубева [1].

Эта оригинальная и обильная идеями, постановками проблем и ценными вопросами книга Владимира Васильевича Голубева послужила источником не только моей статьи, но и двух диссертаций (Ивана Ивановича Привалова и Владимира Семеновича Федорова).

В ней был поставлен вопрос о сохранении или о несохранении множеств меры нуль при конформном изображении, причем В. В. даже был намечен прием, который, по его мнению, должен был привести к решению вопроса в положительном смысле, т. е. в смысле сохранения множеств меры нуль, если бы удалось построить функцию $f(z)$, голоморфную внутри единичного круга, ограниченную на нем и неопределенную по всякой жордановой дорожке L, примыкающей к любой точке множества E меры нуль, лежащего на периферии C единичного круга; множество E меры нуль при этом должно быть фиксированным, но произвольным.

В указанной статье [3] мне удалось построить требуемую В. В. Голубевым функцию $f(z)$ и тем самым установить, наконец, подозреваемую раньше инвариантность множеств меры нуль при конформном изображении внутренностей замкнутых спрямляемых контуров.

3. Третья работа [4] также напечатана в «Известиях Иваново-Вознесенского политехнического института в 1922 г. В эту эпоху мне довелось провести одно лето на отдыхе, на Волге, вблизи г. Горького (тогда Нижнего Новгорода) у родителей Ивана Ивановича Привалова, вместе с ним. Среди многих математических сюжетов, обсуждаемых нами и стоявших на очереди в науке, были проблемы единственности аналитических функций, обладающих различными a priori предписанными свойствами. Я тогда же увидел, что мы можем иметь целый ассортимент самых разнообразных аналитических функций с невообразимо парадоксальными свойствами, если только будет выполнено построение функции $f(z)$, голоморфной внутри единичного круга C и такой, что если удалить из внутренности единичного круга внутренности счетного множества кружков $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$, лежащих внутри C и не имеющих попарно общих точек, стремящихся к периферии C и имеющих радиусы $r_1, r_2, \ldots, r_n \ldots$ убывающими до нуля, то в оставшейся части внутренности единичного круга будем иметь равномерно $|f(z)| \to +\infty$, когда $|z| \to 1$.

Эта функция, являющаяся инструментом для построения аналитических функций с самыми «парадоксальными» свойствами, и найдена мною в вышеуказанной работе [4], напечатанной в «Известиях Иваново-Воз-

[1] В. В. Голубев. Однозначные аналитические функции с совершенным всюду разрывным множеством особых точек. М., 1916.

Работы
по
Теории Функций Комплексного
Переменного

академика Н. Н. Лузина

Мои работы по теории функций комплексного переменного почти неотделимы от работ по метрической теории функций действительного переменного. Причина этому совершенно простая: в ту эпоху конца столетия и начала века мало кто думал, что функции комплексного переменного имеют природу sui generis и большинство ученых полагало, что разгадать таинственность некоторых глубоких положений аналитических функций и проникнуть в последние их „секреты" можно, следуя методам функций действительного переменного и что, поэтому, всякий прогресс этих последних методов должен благотворно отразиться на успехах теории функций комплексного переменного. Таким образом, речь шла о переносе и адаптации методов действительного переменного в область комплексного переменного и этого искушения не избегли даже столь сильные ученые, каковы Mittag-Leffler, бывший столь близким к Weierstrass'у и Painlevé. Лишь у одного из основоположников функций комплексного переменного — Augustin Cauchy — имеются идеи иной природы, правда, не нашедшие своего полного выражения и по сие время.

Таким образом, моя задача, как мне, отдавшему много времени функциям действительного переменного, состояла в формулировании проблем комплексного переменного по типу проблем действительного переменного и разрешении их методами, выработанными в области функций действительного переменного.

Факсимиле письма Н. Н. Лузина к Маркушевичу несенского политехнического института». Сам же найденный ассортимент парадоксальных функций был опубликован в общих с И. И. Приваловым статьях [5], [6].

Наиболее странным и парадоксальным случаем множественности является случай:

а) аналитической функции $f(z)$, голоморфной внутри единичного круга C, за исключением совершенного всюду разрывного множества точек P, которая равномерно стремится к нулю, когда $|z|\to 1$, и не тождественна нулю. При этом функция $f(z)$ равномерно непрерывна внутри единичного круга.

Другие найденные случаи:

б) $f(z)$ может быть голоморфной внутри единичного круга C и стремиться к нулю равномерно, когда z стремится к точкам множества E второй категории и меры нуль, и, однако, при этом $f(z)$ не тождественна нулю;

в) $f(z)$ может быть голоморфной внутри единичного круга и стремиться к нулю по радиусам, направленным в точки множества E меры 2π и первой категории, и, однако, не быть при этом тождественной нулю;

г) $f(z)$ может быть голоморфной внутри единичного круга C и стремиться к нулю по радиусам, направленным в точки множества E второй категории и положительной меры, но при этом $\operatorname{mes} E < 2\pi$, и не быть тождественной нулю.

4. Содержание наших бесед с И. И. Приваловым по вопросам единственности опубликовано в [5], [6]. Наиболее важный результат таков: *если $f(z)$ голоморфна внутри простого спрямляемого контура K и если на периферии K лежит измеримое множество E положительной меры, такое, что при приближении ко всякой его точке M по некасательной жордановой линии L функция $f(z) \to 0$, то $f(z)$ тождественно равна нулю.*

Теорема эта имеет очень значительные применения.

Вторая же теорема единственности гласит: *если $f(z)$ голоморфна внутри единичного круга C и стремится к нулю по радиусам, направленным в точки множества E второй категории на дуге σ окружности C и положительной меры на каждой порции дуги σ, то $f(z)$ тождественно равна нулю.*

5. Предпоследняя моя работа по комплексному переменному [7] опубликована мною как почетным членом Математического общества Индии в его журнале.

Основное предложение: *для всякой аналитической функции $f(z)$, дающейся рядом Тэйлора*

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots, \tag{2}$$

где численный ряд $\sum\limits_{n=0} |a_n|^2$ есть сходящийся, почти для всякой точки z_0 периферии C единичного круга можно найти такой выпуклый замкнутый контур Γ_{z_0}, лежащий внутри C и лишь соприкасающийся с C в точке z_0, *что двойной интеграл*

$$\iint\limits_{\Gamma z_0} |f'(z)|^2\, d\omega,$$

распространенный на всю внутренность контура Γ_{z_0}, будет иметь конечную величину.

Смысл этого предложения тот, что площадь части поверхности Римана S, описываемая точкой Z, $Z = f(z)$, когда точка z описывает внутренность контура Γ_{z_0}, есть конечная величина для почти всех положений точки z_0 (т. е. кроме множества точек z_0 меры нуль).

Если бы площадь всей поверхности Римана S, которая получается, когда z описывает весь единичный круг C, была конечна, то, по известной теореме Фейера, ряд Тэйлора [2] был бы почти всюду для z_0 сходящимся.

Вопрос ставился так: насколько конечность куска поверхности Римана, соответствующего внутренности контура Γ_{z_0}, обеспечивает сходимость ряда Тэйлора $\Sigma a_n z^n$ в точке z_0?

6. В 1947 г. я опубликовал в «Докладах Академии наук СССР» сообщение [8]. Как известно, глобальное классическое предложение о равномерной сходимости ряда

$$Z = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3}$$

таково: *если $f(z)$ продолжаема всюду за окружность C единичного круга, то ряд (3) сходится равномерно на C.* Локальное предложение, коррелятивное к нему, есть известная теорема Фату: *если*

$$a_n \to 0 \text{ при } n \to \infty \tag{4}$$

и если $f(z)$ продолжаема через дугу σ периферии C единичного круга, то ряд (3) сходится равномерно на σ.

Теперь глобальное предложение Фейера таково: *если площадь поверхности Римана S, описываемой точкой Z, когда точка z описывает внутренность всего единичного круга C, конечна, тогда ряд Тэйлора (3) сходится на C почти всюду.*

В работе [8] устанавливается, что то же самое условие (4) необходимо и достаточно для локализации глобального предложения Фейера, а именно, мы доказываем, что *если поверхность Римана S имеет площадь, конечную вблизи какой-нибудь дуги σ периферии C единичного круга, и если осуществлено условие (4), то ряд Тэйлора (3) сходится почти всюду на σ.*

Таким образом, одно и то же условие $a_n \to 0$ при $n \to +\infty$ делает законным и переход от классического глобального предложения о равномерной сходимости на всей окружности C к коррелятивному локальному предложению Фату и переход от глобального предложения Фейера к его коррелятивной локальной форме.

СПИСОК ТРУДОВ Н. Н. ЛУЗИНА ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Ueber eine Potenzreihe. (Об одном степенном ряде.) R. del Circ. mat. Palermo, 1911, **32**, 386—390.

2. Об одном случае ряда Тэйлора. «Математич. сб.», 1912, **28**, вып. 2, 295—302.

3. Sur la représentation conforme. (О конформном отображении.) «Изв. Иван.-Вознес. политехн. ин-та», 1919, вып. 2, 77—80.

4. О существовании аналитических функций, равномерно бесконечных вблизи купюры. «Изв. Иван.-Вознес. политехн. ин-та», 1922, вып. 5, 20—26.

5. Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques. (О единственности и множественности аналитических функций.) C. R. Acad. Sci. Paris, 1924, **178**, 456—459. (Совместно с И. И. Приваловым.)

6. Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques. (О единственности и множественности аналитических функций.) Ann. sci. Éc. norm. sup. Paris, série 3, **42** (1925), 143—191. (Совместно с И. И. Приваловым.)

7. Sur une proprieté des fonctions à carré sommable. (Об одном свойстве функций с суммируемым квадратом.) Bull. Calcutta math. Soc., 1930, **20**, 139—154.

8. О локализации принципа конечной площади. «Докл. АН СССР», 1947, **56**, № 5, 447—450.

В. С. Федоров

ТРУДЫ Н. Н. ЛУЗИНА ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО *

Настоящая статья, посвященная работам Н. Н. Лузина по теории функций комплексного переменного, является дополнением к публикуемой в настоящем томе Собрания сочинений Н. Н. Лузина его статье «Работы по теории функций комплексного переменного»**.

1. Труды Н. Н. Лузина по теории функций комплексного переменного существенно связаны прежде всего с исследованием свойств тригонометрического ряда как действительной части ряда Тэйлора на окружности его круга сходимости, причем свойства этого тригонометрического ряда выводятся из поведения ряда Тэйлора внутри его круга сходимости.

Так, в своей работе 1911 г. «Об одном случае ряда Тэйлора» ([1], [2]***) Н. Н. Лузин строит пример («пример Лузина») степенного ряда

$$\sum_{0}^{\infty} \alpha_n z^n \tag{1}$$

с коэффициентами, стремящимися к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \tag{2}$$

однако расходящегося во всякой точке единичной окружности. Отсюда Н. Н. Лузин выводит существование тригонометрического ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta, \tag{3}$$

расходящегося для всех значений θ, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, кроме, быть может, множества значений θ меры нуль, и удовлетворяющего условиям:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{4}$$

---

* Журнал «Успехи математич. наук», 7, вып. 2, 7—16.

Среди указываемых проблем, поставленных Н. Н. Лузиным, часть содержится в рукописях, найденных после его смерти, часть была выдвинута в личных беседах и в личной переписке.

** См. предыдущую статью.

*** См. список трудов Н. Н. Лузина по «теории функций комплексного переменного» в конце предыдущей статьи.

Ряд (3) получается из ряда (1), если положить:

$$z = e^{\theta i}, \quad \alpha_n = a_n - ib_n$$

и взять действительную часть ряда (1). Эти примеры Н. Н. Лузина степенного ряда (1) и тригонометрического ряда (3) решают принципиально важные проблемы, связанные с работами П. Фату и А. Рисса.

П. Фату (1906 г.) и М. Рисс (1911 г.) доказали, что если ряд (1) удовлетворяет условию (2) и если $f(z)$ есть аналитическая функция, равная сумме ряда (1) внутри единичной окружности, то этот ряд сходится во всякой точке голоморфности функции $f(z)$ на окружности, и притом равномерно на всякой дуге, не содержащей особых точек $f(z)$. Н. Н. Лузин [2] поставил вопрос, в какой мере условие голоморфности является существенным для справедливости предыдущей теоремы, и при решении этого вопроса он построил свой пример всюду расходящегося степенного ряда.

П. Фату [1] поставил проблему: существует ли тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, и расходящийся на множестве положительной меры?

Пример тригонометрического ряда, построенного Н. Н. Лузиным, полностью решает этот вопрос.

2. Позднее Н. Н. Лузин значительно углубил изучение свойств степенного, а тем самым и тригонометрического ряда.

Допустим, что коэффициенты степенного ряда (1) удовлетворяют условию:

$$\sum_{0}^{\infty} n\,|\alpha_n|^2 = \sum_{0}^{\infty} n\,(a_n^2 + b_n^2) < +\infty. \tag{5}$$

Л. Фейером было доказано, что в этом случае ряд (1), а значит, и тригонометрический ряд (3) сходятся почти всюду на единичной окружности.

Пусть $f(z)$ есть сумма ряда (1) внутри круга $|z| > 1$; функция $w = f(z)$ отображает любую область D в единичном круге на некоторую риманову поверхность. Известно, что площадь этой поверхности S выражается так:

$$S = \iint_{D} |f'(z)|^2 d\omega,$$

где $d\omega$ — элемент площади, причем для круга $|z| < 1$ имеем:

$$\iint_{|z|<1} |f'(z)|^2\, d\omega = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\,|\alpha_n|^2. \tag{6}$$

Следовательно, теорему Фейера можно формулировать еще таким образом: если риманова поверхность, соответствующая единичному кругу,

---

[1] P. Fatou. Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta Math., 1906, 30.

имеет конечную площадь, то степенной ряд (1) сходится почти всюду на единичной окружности. Н. Н. Лузин называл это «глобальным принципом конечной площади».

Усилением этого результата Фейера является «локальный принцип конечной площади» [8], открытый Н. Н. Лузиным, а именно:

Если D — любая область внутри круга $|z| < 1$, примыкающая к какой-нибудь дуге $\alpha\beta$ его окружности, то в случае конечной площади S римановой поверхности, соответствующей этой области, ряд (1) сходится почти всюду на дуге $\alpha\beta$.

Равенство (6) показывает, что если ряд (5) сходится, то площадь S римановой поверхности, соответствующей кругу $|z| < 1$, конечна. Н. Н. Лузин в своей чрезвычайно глубокой работе [7] 1930 г. исследовал свойства той же римановой поверхности, предполагая только сходимость ряда

$$\sum |\alpha_n|^2 = \sum_0^\infty (a_n^2 + b_n^2). \tag{7}$$

Он получил следующий результат: почти для каждой точки ζ окружности единичного круга C существует такая простая замкнутая жорданова выпуклая кривая Γ, что:

1) Γ касается окружности C в точке ζ, имея все остальные свои точки внутри C;

2) интеграл

$$\iint_{(\Gamma)} |f'(z)|^2 \, d\omega$$

имеет конечную величину [(Γ) — конечная область, ограниченная кривой Γ]. При этом, как указывает Н. Н. Лузин, множество (меры нуль) исключительных точек ζ, для которых нет соответствующих кривых Γ, может действительно существовать даже в тех случаях, когда тригонометрический ряд (3) есть ряд Фурье от некоторой функции, непрерывной на всей единичной окружности.

При условии сходимости ряда (7) тригонометрический ряд (3) есть ряд Фурье от функции с суммируемым квадратом. Проблема о сходимости ряда Фурье для функций с суммируемым квадратом затрагивалась Н. Н. Лузиным во многих его работах. В уже упомянутой работе [7] он высказал мысль, что для полного ее решения понадобится привлечь теорию чисел или теоремы математического анализа, тесно связанные с теорией чисел ([7], стр. 152).

Н. Н. Лузин считал очень важным для теории степенных и тригонометрических рядов изучать метрические свойства преобразования

$$w = f(z) \tag{8}$$

как для общего случая, когда $f(z)$ есть сумма ряда (1), удовлетворяющего лишь условию сходимости ряда (7), так и при специальных предположениях относительно $f(z)$. Он замечает, что представляет большой интерес следующая проблема: выяснить, нет ли прямой или косвенной зависимости между существованием интеграла

$$\iint_{\Delta} |f'(z)|^2 \, d\omega, \tag{9}$$

где Δ — область, ограниченная простой замкнутой спрямляемой кривой, имеющей с единичной окружностью множество общих точек положительной меры, и сходимостью степенного ряда (1) почти всюду на этом множестве. При этом остается открытым вопрос о существовании области Δ указанного вида, для которой существует интеграл (9), когда $f(z)$ есть сумма ряда (1), если известна только сходимость ряда

$$\sum_{0}^{\infty} |\alpha_n|^2.$$

Другая задача, поставленная Н. Н. Лузиным, такова: пусть Ω есть поверхность Римана, в которую отображается единичный круг плоскости z при преобразовании (8), и E — множество точек на окружности $|z| = 1$, соответствующих точкам поверхности Ω, достижимым спрямляемыми кривыми, принадлежащими Ω; надо исследовать метрические свойства множества E.

Н. Н. Лузин указывает, что можно доказать существование спрямляемых кривых внутри единичного круга плоскости z, оканчивающихся на окружности этого круга и переходящих при преобразовании (8) в спрямляемые кривые. Вместе с тем Н. Н. Лузин строит такую функцию $f(z)$, однолистную и ограниченную в круге $|z| < 1$, что всякая спрямляемая кривая в этом круге, имеющая с его окружностью множество общих точек положительной меры, переходит при преобразовании (8) в кривую плоскости w, уже неспрямляемую ([7], стр. 152—154). Позднее Н. Н. Лузин, как видно из оставшихся после него рукописей, неоднократно обращался к исследованию метрических свойств преобразований (8), где $f(z)$ голоморфна и ограничена при $|z| < 1$, стремясь связать свойства римановой поверхности этой функции для $|z| < 1$ со сходимостью степенного ряда (1) для $f(z)$ при $|z| = 1$. Так, отправляясь от известного факта, что для функции $f(z)$, голоморфной, ограниченной и однолистной в единичном круге, ее степенной ряд сходится почти всюду на окружности $|z| = 1$, Н. Н. Лузин стремился обобщить это предложение на тот случай, когда преобразование (8) переводит круг $|z| < 1$ в риманову поверхность без точек ветвления, хотя бы и бесконечной площади, т. е. когда производная $f'(z)$ не обращается в нуль внутри единичного круга. Он высказывал мысль, что если имеется ряд

$$\sum_{0}^{\infty} \alpha_n z^n, \quad \left(\sum_{0}^{\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty\right),$$

расходящийся почти всюду для $|z| = 1$, то функция

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \alpha_n z_n$$

имеет, вероятно, нули своей производной $f'(z)$, безгранично накопляющиеся во всякой точке периферии ($|z| = 1$), и примеры таких рядов надо строить, может быть, начав с построения накопляющихся нулей производной.

Для изучения сходимости тригонометрических рядов от непрерывных функций Н. Н. Лузин считал важным исследовать метрические свойства преобразования (8) для случая, когда $f(z)$ — функция, голоморфная внутри круга $|z| < 1$ и равномерно непрерывная в замкнутом круге. В этих условиях функция $w = f(z)$ отображает круг $|z| \leqslant 1$ на некоторую область A, ограниченную жордановой кривой J. Обозначим через P совершенное множество точек окружности, которое отображается в кривую J при преобразовании (8). Н. Н. Лузин ставит задачу об изучении метрических свойств множества P.

Наконец, в своей последней опубликованной работе [8] по этим вопросам «О локализации принципа конечной площади» Н. Н. Лузин выставляет как весьма вероятное предположение: если производная $f'(z)$ ограниченной аналитической функции $f(z)$ не принимает внутри единичного круга какое-нибудь фиксированное значение, то разложение Тэйлора функции $f(z)$ сходится почти всюду на периферии этого круга.

Таким образом, в этих трудах, как и во всей своей научной деятельности, Н. Н. Лузин не только открывал факты первейшей важности, но и указывал пути дальнейших исследований, сопровождая свои указания детальными соображениями об ожидаемых трудностях и вероятных результатах.

3. Переходим теперь к исследованиям Н. Н. Лузина (совместно с И. И. Приваловым) граничных значений аналитических функций комплексного переменного ([5], [6]).

Рассматривая прежде всего функцию $f(z)$, голоморфную внутри единичного круга, будем называть, следуя новейшей терминологии, угловым предельным значением функции $f(z)$ в какой-нибудь точке ζ единичной окружности конечный или бесконечный предел (если таковой существует) функции $f(z)$, когда z, $|z| < 1$, стремится к ζ внутри любого угла, раствора меньшего π, симметричного относительно радиуса $O\zeta$ и с вершиной в этой точке ζ. Н. Н. Лузин и И. И. Привалов поставили проблему: «при какой структуре (мощности, категории, лебеговой мере,...) множества M точек единичной окружности всякая функция $f(z)$, голоморфная внутри единичного круга, однозначно определяется своими угловыми предельными значениями на множестве M?», и доказали, что это будет иметь место для всякого множества M положительной меры (теорема единственности Н. Н. Лузина и И. И. Привалова), а вместе с тем построили пример функции $f(z)$, голоморфной и ограниченной для $|z| < 1$ и стремящейся равномерно к нулю, когда z, $|z| < 1$, стремится по всем без исключения путям к точкам некоторого множества E меры нуль и второй категории на единичной окружности [хотя $f(z)$ не равна тождественно нулю].

Таким образом, не для всякого множества меры нуль (хотя бы и второй категории) точек единичной окружности любая функция $f(z)$, голоморфная внутри единичного круга, будет однозначно определяться своими угловыми предельными значениями на этом множестве. Для множества точек единичной окружности меры нуль и первой категории это было установлено еще в 1906 г. П. Фату, который высказал мнение: «Вероятно, что однозначная функция может принимать значение нуль только на множестве точек меры нуль изолированной купюры, но представляется весьма трудным дать общее доказательство этого факта» [1]. Заметим, что доказательство приведенной выше теоремы единственности основано на детальном изучении соответствия точек границ двух спрямляемых областей (т. е. областей, ограниченных простыми и спрямляемыми контурами) при конформном преобразовании этих областей друг в друга. А именно, потребовалось доказать предварительно теорему о том, что при конформном отображении внутренности круга на спрямляемую область всякое множество точек меры, большей нуля, на контуре области переходит во множество точек также меры, большей нуля, на окружности круга. Эта теорема, доказанная Н. Н. Лузиным в 1919 г. [3] [2], была вскоре пополнена таким фундаментальным предложением, установленным Н. Н. Лузиным совместно с И. И. Приваловым: *множество точек границы спрямляемой области меры нуль переходит во множество точек также меры нуль при конформном преобразовании этой спрямляемой области в другую спрямляемую область* (иначе: *множество меры нуль есть инвариант при конформном преобразовании друг в друга любых двух областей со спрямляемыми границами*). Кроме того, при конформном отображении двух спрямляемых областей друг на друга существует консерватизм углов на их границах, когда пренебрегаем множествами точек меры нуль. Эти свойства конформных преобразований и применялись их авторами для дальнейшего исследования граничных значений аналитических функций. Приведем основные результаты, называя радиальным предельным значением функции $f(z)$, голоморфной или мероморфной внутри единичного круга, в какой-нибудь точке ζ единичной окружности предел этой функции в

---

[1] Приведено в диссертации Фату, loc. cit., стр. 426.

[2] Доказательство этой теоремы Н. Н. Лузин получил, построив для любого заданного множества E меры нуль точек окружности $|z| = 1$ такую аналитическую функцию, которая голоморфна и ограничена для $|z| < 1$ и для любой точки E не стремится ни к какому определенному пределу (ни к бесконечности) по любой жордановой кривой, лежащей внутри единичного круга, примыкающей к этой точке и имеющей все остальные свои точки внутри единичного круга. Этот пример сам по себе замечателен и должен быть отмечен.

точке ζ при стремлении z, $|z| < 1$, к ζ вдоль радиуса окружности $|z| = 1$. Основные результаты следующие (см. [6]).

1. Теорема единственности для радиальных предельных значений. Пусть E — множество точек некоторой дуги σ единичной окружности второй категории и приведенное (т. е. такое, что каждая его порция на σ обладает положительной мерой). Аналитическая функция $f(z)$, голоморфная внутри единичного круга (или хотя бы в некоторой области, расположенной внутри круга $|z| < 1$ и примыкающей к дуге σ), однозначно определяется своими радиальными предельными значениями (конечными или бесконечными) в точках множества E; иначе говоря, если эти радиальные предельные значения все равны нулю (бесконечности), то $f(z)$ тождественно равна нулю (бесконечности). Вместе с тем, если множество E будет первой категории (хотя бы и приведенным на какой-нибудь дуге единичной окружности) или второй категории, но не найдется такой дуги единичной окружности, на которой E — второй категории и приведенное, то в таких случаях теорема единственности уже не имеет места: существуют аналитические функции $f(z)$, у которых их радиальные предельные значения на таком множестве E все равны нулю (бесконечности), хотя функции $f(z)$ голоморфны внутри единичного круга и не равны тождественно нулю (бесконечности). Так, существует функция $f(z)$, голоморфная внутри единичного круга, у которой равны нулю (бесконечности) все ее радиальные предельные значения в точках некоторого множества E единичной окружности, причем $\operatorname{mes} E = 2\pi$ и E — первой категории.

2. Существует функция $f(z)$, мероморфная внутри единичного круга и обладающая следующими свойствами: можно заключить ее полюсы внутрь таких аналитических простых замкнутых контуров

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots,$$

расположенных внутри круга $|z| < 1$ и попарно один вне другого, что $f(z)$ стремится равномерно к нулю (бесконечности), когда $|z| \to 1$ и z остается на множестве

$$Q = K - \sum_{n=1}^{\infty} \overline{(\gamma_n)},$$

где K — круг $|z| < 1$, $\overline{(\gamma_n)}$ — замкнутая конечная область, ограниченная контуром γ_n.

3. Существует функция $f(z)$ (не равная тождественно нулю), однозначная и непрерывная в замкнутой области $|z| \leqslant 1$ и равная нулю на окружности $|z| = 1$ [$f(z) \to 0$ равномерно при $|z| \to 1$], причем $f(z)$ голоморфна в области, полученной исключением из замкнутого круга $|z| \leqslant 1$ некоторого совершенного всюду разрывного множества точек. Такая функция может иметь положительную действительную часть всюду в круге $|z| < 1$. Если $f(z)$ удовлетворяет перечисленным условиям, то ее особые точки, лежащие в круге $|z| < 1$, неограниченно накапливаются около

всякой дуги окружности $|z|=1$, не нарушая, однако, равномерной непрерывности $f(z)$.

4. В 1922 г. Н. Н. Лузин опубликовал примеры аналитических функций $f(z)$ со следующими свойствами (см. [4] или [6]):

а) $f(z)$ голоморфна внутри единичного круга;

б) существует внутри этого круга счетное множество таких замкнутых полигональных областей D_k, не имеющих попарно общих точек, диаметры которых стремятся к нулю при $k \to \infty$, что $|f(z)|$ равномерно стремится к бесконечности, когда $|z| \to 1$, оставаясь вне всех D_k и внутри единичного круга;

в) $|f(z)|$ равномерно стремится к бесконечности, когда z, $|z|<1$, стремится к единичной окружности по некоторой последовательности концентрических окружностей с центром в точке $z=0$;

г) существует последовательность радиусов, всюду плотно расположенных в единичном круге, по каждому из которых $|f(z)| \to \infty$, $|z| \to 1$. Например, такой функцией $f(z)$ является сумма ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5^n \cdot z^{25^n \cdot n!}.$$

5. Н. Н. Лузин занимался также следующим вопросом:

Пусть функция $f(z)$ однозначна и непрерывна в некоторой области D, причем известно, что $f(z)$ голоморфна в области $D-\gamma$, где γ — некоторая жорданова кривая, расположенная в области D. Спрашивается: какими свойствами должна обладать кривая γ для того, чтобы функция $f(z)$ была голоморфной везде в области D? Еще П. Пенлеве доказал в 1888 г.[1], что $f(z)$ будет голоморфной в области D всякий раз, когда кривая γ спрямляемая. Н. Н. Лузин указал[2], что теорема П. Пенлеве распространяется и на некоторые неспрямляемые жордановы кривые γ. Чтобы сформулировать точно утверждение Н. Н. Лузина, напомним определение порции совершенного множества, расположенного на какой-нибудь линии Жордана. Если кривая γ определяется параметрическими уравнениями, когда параметр t пробегает некоторый отрезок оси t, и если совершенное множество P точек кривой γ соответствует совершенному множеству e точек этого отрезка, то порцией множества P называем такую его часть, которая соответствует совершенному множеству $e' \subset e$, совпадающему с частью e на отрезке, соединяющем крайние точки множества e'. Мы будем говорить далее, что совершенное всюду разрывное множество E имеет конечную длину, если существует такая постоянная $K>0$, что для всякого заданного $\varepsilon>0$ можно заключить все точки множества E внутри конечного числа таких простых замкнутых спрямляемых контуров, расположенных

[1] P. Painlevé. Sur les lignes singulières des fonctions analytiques. Ann. Fac. Sc. Toulouse, 1888, 2.

[2] Об этом говорит А. Данжуа в своей работе: A. Denjoy. Sur la continuité des fonctions analytiques singulières. Bull. Soc. Math. de France, 1932, 60, p. 28.

в любой окрестности множества E, попарно один вне другого и с диаметрами, меньшими ε, что сумма длин всех этих контуров будет меньше K.

Свойство кривой γ, указанное Н. Н. Лузиным, которое достаточно для голоморфности $f(z)$ во всей области D, состоит в том, что:

1) всякая дуга кривой γ содержит спрямляемую дугу;

2) всякое совершенное всюду разрывное множество точек, принадлежащих γ, содержит порцию E конечной длины.

Н. Н. Лузин поставил перед А. Данжуа вопрос[1]: возможно ли, чтобы $f(z)$ не была голоморфной ни в какой точке кривой γ, если эта кривая встречается не более как в одной точке со всякой прямой, параллельной данному направлению? Это оказалось возможным: примеры функций $f(z)$ с такими особыми линиями γ дал А. Данжуа в его цитированной работе.

6. Н. Н. Лузин глубоко интересовался и общими вопросами моногенности однозначной и непрерывной функции комплексного переменного в некоторой области или на некоторой кривой, причем он ставил себе задачу исследовать эти вопросы общими методами теории функции действительного переменного без применения известного в теории аналитических функций интеграла Коши. В оставшихся рукописях Н. Н. Лузина находим, например, следующие определения и проблемы.

Пусть функция $f(z)$ однозначна и непрерывна в некоторой области D плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Для данной точки z этой области и для всякого заданного числа $\varepsilon > 0$ рассмотрим множество M_ε значений разностного отношения

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

для всех комплексных значений Δz, удовлетворяющих условиям: 1) $\Delta z \neq 0$, 2) $|\Delta z| \leqslant \varepsilon$, 3) точка $z + \Delta z$ принадлежит области D. Пересечение замыканий всех таких множеств M_ε, соответствующих любым положительным ε, назовем множеством моногенности функций $f(z)$ в точке z и обозначим через $\mathfrak{M}_z$.

Проблемы.

1) Каково множество $\mathfrak{M}_z$ в общем случае $f(z)$ однозначной и непрерывной в области D и, в частности: может ли $\mathfrak{M}_z$ содержать кусок плоскости? Может ли $\mathfrak{M}_z$ быть кривой Кантора, не являющейся кривой Жордана? Может ли $\mathfrak{M}_z$ иметь плоскостную меру > 0? Каково множество точек z таких, что $\mathfrak{M}_z$ не есть простая дуга?

2) Какие функции $f(z)$, однозначные или непрерывные в некоторой области, имеют в этой области множество $\mathfrak{M}_z$, не зависящее от z (помимо функции $x - iy$, у которой, как легко доказать, множество $\mathfrak{M}_z$ есть единичная окружность для любой точки z)?

3) На оси x дан сегмент $[a, b]$ и на нем комплексная непрерывная функция:

$$f(x) = U(x) + iV(x),$$

[1] Там же, стр. 30.

имеющая в каждой точке x сегмента $[a, b]$ производную

$$f'(x) = U'(x) + iV'(x).$$

Спрашивается: можно ли пополнить определение функции $f(x)$ вне отрезка $[a, b]$ так, чтобы получить функцию $f(z)$, непрерывную в некоторой двумерной окрестности этого отрезка, совпадающую с $f(x)$ на этом отрезке и моногенную во всякой точке x отрезка $[a, b]$? Н. Н. Лузин добавляет: «Проблема новая, и я не знаю, как она решается. Одно из двух: или ответ утвердителен, и тогда как построить (= достроить) такую $f(z)$? *Или* ответ отрицателен, и тогда каковы необходимые и достаточные условия для существования такой $f(z)$?»

Н. Н. Лузин придавал большое значение и следующей проблеме: среди всех функций, голоморфных внутри данного простого замкнутого жорданова контура, непрерывных внутри и на этом контуре и принимающих значение нуль в данной точке z_0 и значение 1 в данной точке z_1 (точки z_0 и z_1 лежат внутри контура), отыскать ту функцию, модуль которой имеет минимальный максимум на данном контуре.

На этом мы заканчиваем наш краткий очерк того богатого наследства решенных и нерешенных вопросов теории функций комплексного переменного, которое осталось после незабвенного нашего учителя Николая Николаевича Лузина.

Д. Ф. Егоров

ОТЗЫВ О ДИССЕРТАЦИИ Н. Н. ЛУЗИНА «ИНТЕГРАЛ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД», ПРЕДСТАВЛЕННОЙ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ СТЕПЕНИ МАГИСТРА ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ *

Сочинение Н. Н. Лузина под заглавием «Интеграл и тригонометрический ряд» напечатано в «Математическом сборнике», издаваемом Московским математическим обществом, и удостоено премии А. Ю. Давидова согласно заключению комиссии из представителей Физико-математического факультета и Московского математического общества.

Названное сочинение, основываясь отчасти на результатах, ранее найденных автором и опубликованных частью в «Математическом сборнике», частью в иностранных ученых изданиях («Comptes rendus de l'Académie des Sciences à Paris», «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo»), представляет собой, на мой взгляд, весьма ценное научное исследование, богатое результатами и представляющее большой интерес по замыслу и по выполнению.

Общий план работы Н. Н. Лузина таков: рассматривая во введении коренной вопрос о взаимоотношении общего понятия о функции и аналитического ее представления, автор останавливается на классической задаче о представлении функции тригонометрическим рядом — задаче, которой обязана своим созданием вся современная теория функций и которая, как оказывается, продолжает служить поводом для новых и новых математических открытий. Среди тригонометрических рядов наиболее важным и простейшим является класс рядов Фурье:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha. \tag{2}$$

* Отзыв Д. Ф. Егорова, написанный 13 марта 1916 г., должен был появиться в 28-м выпуске «Ученых записок Московского университета, отдел физико-математический»; об этом есть указание на обложке 29-го выпуска этого издания. Однако в связи с временным прекращением издания «Ученых записок» выпуск 28-й не вышел в свет. Оригинал отзыва Д. Ф. Егорова был обнаружен среди бумаг, оставшихся после смерти Н. Н. Лузина. Этот отзыв был опубликован впервые в томе VIII, вып. 2(54) «Успехов математических наук» (*Прим. ред.*).

Эти ряды, как указывает автор, наиболее доступны изучению; но в то же время, как он указывает, этот класс не является строго определенным и зависит от того, в каком смысле понимаются интегралы в формулах (2), определяющих коэффициенты ряда. Так, ряды, которые нельзя было назвать рядами Фурье до открытия Лебегом нового, более широкого определения процесса интегрирования, в настоящее время можно уже назвать рядами Фурье (ряды Фурье — Лебега). Класс рядов Фурье имеет тенденцию все более и более расширяться с расширением понятия интеграла и стремиться к тому, чтобы охватить по возможности весь класс тригонометрических рядов. Для этого необходимо дальнейшее расширение понятия интеграла, и к этой проблеме и приходит автор рассматриваемого труда. В первой части своего исследования он занимается этой капитальной задачей анализа и дает полное решение ее в смысле возможности для всякой почти всюду конечной измеримой функции (эти ограничения необходимы) находить «примитивную» непрерывную функцию, для которой данная почти всюду (т. е. за исключением, быть может, множества меры нуль) является производной. Но такое решение представляется недостаточным в силу именно большой общности результата, так как для каждой данной функции оказывается бесчисленное множество примитивных, отличающихся не на постоянную. Автор вводит понятие об интеграле как о некотором регулярном процессе, при котором каждой функции соответствует одна примитивная (до произвольной постоянной), и задается целью дать такой регулярный процесс для возможно более широкого класса функций; эти изыскания составляют значительную часть первого отдела книги (главы I—IV) и, между прочим, приводят автора к мысли воспользоваться обратно тригонометрическим рядом для определения процесса интегрирования, т. е. определять примитивную данной функции, интегрируя почленно тригонометрический ряд, представляющий функцию; такой процесс автор называет «тригонометрическим интегрированием» и определение интеграла — «тригонометрическим определением».

Второй отдел сочинения (главы V—VI) посвящен теории тригонометрических рядов. В ней автор утилизирует свои прежние результаты относительно абсолютной сходимости тригонометрических рядов, а затем результаты первого отдела сочинения, приходя к полному решению задачи «найти тригонометрический ряд, представляющий почти всюду конечную измеримую функцию» и к важным результатам по условиям сходимости рядов Фурье и по вопросу о почленном интегрировании тригонометрических рядов, что в свою очередь снова приводит к «тригонометрическому» определению интеграла.

Обращаемся к беглому обзору работы по отдельным главам.

Введение посвящено постановке задачи и выяснению плана работы.

Глава I содержит сведения из общей теории функций, необходимые для последующего. Здесь дается прежде всего хорошее, картинное описание строения измеримых множеств. Далее приводится капитальной важности результат, касающийся общего свойства всех измеримых функций, данный ранее автором на страницах «Математического сборника» («C-свойство») и позволяющий во многих вопросах рассмотрение измеримых функций сводить к рассмотрению функций непрерывных. В связи с этим дается полная картина строения измеримых функций и доказывается ряд теорем, из нее следующих.

Глава II посвящена задаче отыскания примитивной функции. Автор ссылается на свои ранее появившиеся в печати работы, но вместе с тем дает более совершенное и ясное изложение процесса построения примитивной, причем выясняется, что возможно найти для данной функции $f(x)$ непрерывную примитивную $F(x)$ так, что кривая $y = F(x)$ течет в любой близости к произвольно заданной непрерывной кривой $y = \Phi(x)$. В виде приложения получается результат о существовании невозрастающей функции с положительной (почти всюду) производной и общее решение задачи Дирихле для круга.

В конце главы ставится задача отыскания определенного интеграла в связи с понятием о регулярном процессе, и таким образом автор приходит к задаче: выделить из семейства $\{F(x)\}$ примитивных неопределенный интеграл.

В главе III автор, приступая к решению поставленной в конце главы II задачи, прежде всего выясняет невозможность ее решения на основании требования, чтобы интеграл был точной примитивной, и приходит к необходимости исследовать, какими свойствами выделяются известные в настоящее время типы интеграла из семейства примитивных.

С этой точки зрения прежде всего рассматривается интеграл Лебега, причем оказывается, что этот интеграл есть примитивная функция с наименьшим полным изменением среди других примитивных. Исследование интеграла Данжуа оказывается более сложным, но и здесь автор приходит к окончательному результату, т. е. находит характеристические свойства интеграла Данжуа, являющиеся обобщением аналогичных свойств интеграла Лебега. При этом автору приходится вводить новое понятие о функции с «обобщенным ограниченным изменением» на данном отрезке. Весьма важное значение имеет теорема III, которая дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы непрерывная функция была неопределенным интегралом Данжуа. Конец главы III посвящен детальному анализу интеграла Бореля, причем автор рассматривает определение этого интеграла сначала в редакции Монтеля («Encyclopédie des Sciences Mathématiques»), затем в редакции самого Бореля и наконец с изменением, которое предлагает сам автор. Анализ автора можно признать образцом ясной, проникающей в суть вопроса математической критики. Оказывается, что определение в редакции Монтеля эквивалентно определению Лебега. Что касается до определения Бореля, то оказывается, что всякая функция, интегрируемая этим методом, интегрируется также методом Лебега — Дирихле (и следовательно, методом Данжуа); с другой стороны, можно дать примеры функций, интегрируемых по Лебегу, но неинтегрируемых методом Бореля, вопреки утверждению самого Бореля. Наконец, если внести в определение Бореля изменение, предложенное Н. Н. Лузиным, то все же мы не выйдем за пределы применимости метода Данжуа.

В главе IV автор, указав на невозможность существования универсального процесса (регулярного) интегрирования или, что то же, показав существование абсолютно «неинтегрируемых» функций и отметив неизбежность на известных стадиях обобщения искать интеграл среди разрывных функций, дает прежде всего интересную критику известных аксиом Лебега, из которой выясняется недостаточность этой системы для дальнейших обобщений интеграла. Имея, с другой стороны, в виду, что характеристические свойства интегралов Лебега и Данжуа, установленные автором в главе III, являются в точности характеристическими, т. е. характеризуют только эти интегралы и не могут служить для выделения интеграла из семейства примитивных в более общем случае, автор видит себя вынужденным снова обратиться к более детальному изучению примитивных функций для изыскания более общих свойств, отличающих неопределенные интегралы Лебега и Данжуа от прочих примитивных,— свойств, которые не были бы эквивалентны самим определениям этих интегралов и потому поддавались бы обобщению. В этих видах автор сначала исследует непрерывные функции, имеющие почти всюду производную, равную нулю, и доказывает для них две важные теоремы, которые приводят его к мысли исследовать вообще свойства непрерывных функций на множествах меры нуль. Это интересное исследование приводит автора к установленному им важному понятию о функциях с нулевым изменением, причем в дальнейшем оказывается, что интегралы Лебега и Данжуа суть единственные функции с нулевым изменением среди семейства примитивных, определяемых для подинтегральной функции. В связи с этим намечается путь для выбора интеграла из семейства примитивных и в более общих случаях. Этот путь (искать примитивную с нулевым изменением) приводит, в частности, к ценным результатам для широкого класса рядов, изучению которых посвящен конец главы IV, а в связи с этим и к упомянутому мною выше «тригонометрическому» интегрированию. Тот же класс рядов, естественно, приводит к задаче обобщения понятия о производной. Рассматривая эту задачу, автор исследует свойства производных чисел Дини и доказывает важную теорему о существовании почти всюду в данном множестве обычной производной, если в каждой точке множества четыре (или даже два — с одной стороны) производных числа Дини конечны. Из этой теоремы явствует, что во всех исследованиях, где пренебрегают нуль-множествами, введение производных чисел Дини совершенно излишне.

Глава V посвящена теории тригонометрических рядов. После краткого обзора известных результатов и упоминания результатов автора и связанных с ним результатов других ученых относительно расходящихся тригонометрических рядов, для которых коэффициенты a_n и b_n стремятся к нулю, даются капитальные результаты автора относительно абсолютной сходимости тригонометрических рядов и выводятся интересные следствия в связи с работами Фату по этому вопросу.

Далее автор обращается специально к рядам Фурье, попутно дает важные результаты относительно рядов Фурье — Данжуа и еще раз точно формулирует взаимоотношение между вопросами о расширении понятия интеграла и о границе класса рядов Фурье. Далее автор обращается к рядам Фурье-Лебега для функций с интегрируемым квадратом и выводит необходимый и достаточный признак их сходимости. В результате этого исследования получается важная и интересная формула для функции, сопряженной с данной, и, как следствие формулы,— интересное общее свойство всех измеримых множеств (§ 71, стр. 187).

Возвращаясь к своим формулам и отказываясь от суммируемости квадрата функции, автор дает общие предложения о функции, сопряженной с данной. Глава заканчивается обзором признаков сходимости типа Вейля и результатов Юнга.

В начале главы VI автор вкратце упоминает о методах суммирования тригонометрических рядов Фейера, Пуассона и Римана и доказывает основную теорему о представимости всякой измеримой, почти всюду конечной функции тригонометрическим рядом, суммируемым к этой функции методами Пуассона и Римана.

В связи с этим результатом автор обращается к «задаче Фурье», требующей определения коэффициентов тригонометрического ряда через значения функции, представляемой этим рядом. Так как «основная теорема», доказанная автором, каждой функции f приводит в соответствие целый класс $\{T\}$ тригонометрических рядов, то дело сводится к выделению из этого класса единственного ряда, особо сязанного с данной функцией, так, чтобы его коэффициенты получались каким-либо регулярным алгорифмом, и все дело лишь в нахождении критерия выбора в возможно более широком классе случаев. Автор дает интересные соображения вообще по поводу таковых критериев, указывает далее на вероятные критерии выбора и приходит к много раз уже упомянутому «тригонометрическому» интегрированию в связи с поставленной общей задачей Фурье. По поводу этого интегрирования автор дает свои результаты о возможности почленного интегрирования тригонометрических рядов не-Фурье и несколько общих замечаний о «тригонометрическом» выборе примитивной. Глава заканчивается рассмотрением и упрощением теории Римана, дающей необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция была суммой тригонометрического ряда.

Сочинение сопровождается обзором литературы, отличающимся выгодными особенностями. Во-первых, этот обзор содержит лишь мемуары, появившиеся с 1900 г., ввиду наличности подробных указателей более ранней литературы, и потому не загружен перечислением большого количества сочинений; из этого обзора читатель, знакомый с изложением предмета по какому-либо современному руководству, может узнать, где он может найти дальнейшее развитие различных вопросов теории. Во-вторых, литература собрана со строгим выбором, так что сочинения, имеющие лишь отдаленное отношение к теме работы, принципиально исключены из обзора. В-третьих, литература систематизирована, что представляет большое удобство для читателя.

Из данного мною обозрения сочинения Н. Н. Лузина, полагаю, явствует, что сочинение это представляет собой, как я уже говорил выше, весьма ценное научное исследование: оно содержит целый ряд важных и интересных новых результатов, дает подчас интересное и новое освещение известным результатам других ученых, содержит критический разбор некоторых новейших исследований, притом разбор, выполненный блестяще и сопровождаемый ценными замечаниями автора, вносящими усовершенствования в эти исследования.

Работа Н. Н. Лузина содержит так много ценного материала, что даже не все до конца использовано автором; в связи с этим можно отметить, что результаты, полученные Н. Н. Лузиным, уже послужили поводом для появления ряда работ других ученых (Штейнгауз, Фату, Серпинский) по затронутым им вопросам; между прочим имеются в этом направлении результаты некоторых молодых московских математиков.

Обращаясь к недостаткам работы Н. Н. Лузина, замечу, что, конечно, отдельные случайные погрешности, не имеющие влияния на результаты, можно указать, как во всяком другом труде, и я, например, со своей стороны, могу отметить определение функции с ограниченным изменением для совершенного множества. Мне представляется, что это определение, как самостоятельное, едва ли удачно, так как утилизирует значения функции не только на данном множестве, но и в точках, не принадлежащих к этому множеству; его можно было бы исправить, но для окончательного результата автора это не существенно, так как упомянутое определение имеет целью лишь подготовить определение функции с обобщенным ограниченным изменением на всей области (0,1).

Можно сделать автору более общий упрек: работа его во многих местах отличается излишней сжатостью изложения и потому может представить затруднения для читателя; но этот недостаток, как ни парадоксально это звучит, есть следствие достоинств работы: автор старался не превзойти известных границ в размере своего труда, а потому при обилии материала, данного им, вынужден был быть иногда излишне кратким. В этом направлении он, во-первых, вовсе не дал целого ряда интересных примеров, имевшихся у него, и лишь указал на возможность их построения. Об этом можно лишь пожалеть; особенно это можно сказать о примерах, упоминаемых на стр. 31, 51*. Далее не даны некоторые результаты, лишь вкратце упоминаемые, как, например, на стр. 92 и особенно на стр. 123 (о выборе примитивной с нулевым изменением)**. Нако-

---

* См. стр. 67, 82 тома I настоящего собрания сочинений.

** См. стр. 110, 133 тома I настоящего собрания сочинений.

нец, некоторые доказательства проведены слишком сжато, иногда со ссылками на результаты, уже имеющиеся, но мало известные. Не следует, однако, думать, что автор вообще склонен к такому изложению: эту сжатость мы встречаем главным образом там, где приходится давать несколько более сложные выкладки, и в противовес можно указать целый ряд страниц, на которых автор прекрасно освещает разбираемый вопрос, вскрывая самую суть дела, рисуя необыкновенно ясную, иногда совершенно своеобразную картину и при этом все же оставаясь в достаточной мере кратким. Для примера могу указать на прекрасную картину строения измеримых множеств, даваемую автором, и на блестящий анализ определения интеграла Бореля и аксиом Лебега.

Высокие достоинства труда Н. Н. Лузина не оставляют во мне никакого сомнения в том, что было бы только справедливо оценить его дарованием высшей ученой степени. Прибавлю к этому, что у Н. Н. Лузина есть ряд и других ценных работ и что его имя пользуется почетной известностью в математическом мире. Замечу еще, что разбираемый труд в его настоящем виде содержит столько ценного материала, что его свободно хватило бы на два отдельных сочинения, особенно при дальнейшем развитии некоторых указаний автора, которые часто имеют характер простого намека.

Ввиду всего вышеизложенного я полагал бы безусловно отвечающим обстоятельствам дела, допустив Н. Н. Лузина до защиты настоящего сочинения, ходатайствовать, в случае удовлетворительной защиты, перед Советом Императорского Московского Университета об утверждении Н. Н. Лузина в степени доктора чистой математики.

Н. К. Бари и Л. А. Люстерник

РАБОТЫ Н. Н. ЛУЗИНА ПО МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ *

Научная деятельность Н. Н. Лузина относилась к разным областям математики, но начальный период его работы был целиком посвящен вопросам метрической теории функций.

Первой целью, которую поставил себе Н. Н. Лузин, было изучение, в самом общем случае, сходимости тригонометрических рядов и свойств функций, изображаемых ими. Центральной его работой в этом направлении была его замечательная диссертация «Интеграл и тригонометрический ряд», опубликованная в 1915 г. и сыгравшая столь значительную роль в формировании Московской школы теории функций. В настоящее время эта книга переиздана. Новое ее издание включает некоторые работы Н. Н. Лузина ([2], [3], [18], [19], [20], [24]), содержание которых не изложено в его диссертации. Это издание снабжено комментариями, в которых, между прочим, дается полное освещение дальнейшего развития вопросов, поднятых в диссертации.

В связи с выходом этой книги мы в настоящей статье опускаем доказательства теорем и ограничиваемся лишь кратким указанием на дальнейшее развитие работ Н. Н. Лузина.

Работы Н. Н. Лузина по теории тригонометрических рядов были тесно связаны с общими вопросами метрической теории функций. Именно в связи с тригонометрическими рядами Н. Н. Лузин неоднократно возвращался к основным понятиям анализа: понятию функции, интеграла и т. п.

На протяжении истории анализа математикам часто приходилось возвращаться к критическому пересмотру его основ: развитие конкретного материала перерастало рамки сложившихся ранее концепций и точек зрения на основные понятия анализа. В этом разрезе особенно поучительна история теории тригонометрических рядов и ее влияние на эволюцию основных понятий анализа: функции, интеграла. Достаточно вспомнить знаменитую дискуссию Эйлера, Д'Аламбера и других математиков XVIII в. о том, что считать «произвольной функцией», дискуссию, вызванную появлением тригонометрических рядов как орудия решения математических

---

* Журнал «Успехи математических наук», 6, вып. 6.

задач *. В 30-х годах прошлого века в связи с открытием факта изображения рядами Фурье не только непрерывных, но и разрывных функций был снова пересмотрен вопрос о понятии функции. У Н. И. Лобачевского, у Дирихле именно в связи с работами по тригонометрическим рядам возникает концепция функции как соответствия между элементами двух числовых прямых. Поскольку коэффициенты Фурье некоторой функции представляются через интегралы от нее и поскольку широкие классы разрывных функций представимы тригонометрическими рядами, которые естественно считать рядами Фурье для этих функций, возник вопрос об определении понятия интеграла для таких функций. Так, Риман обобщил понятие интеграла на некоторый класс разрывных функций. В том пересмотре основных концепций анализа, который имел место в начале текущего столетия, вопросы теории тригонометрических рядов играли выдающуюся роль. Не случайно поэтому появление упомянутой фундаментальной работы Н. Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд». В этой работе особо подчеркнута историческая связь между теорией тригонометрических рядов и развитием понятия функции и интеграла.

Основную установку этой работы лучше всего охарактеризовать словами самого автора ([11], стр. 2): «Имеют ли результаты теории функций существенное значение для других дисциплин и, прежде всего, для классического анализа? Нужно иметь в виду, что при современном состоянии знания метод классического анализа, метод употребления аналитических выражений лежит в основе почти всякой математической дисциплины; поэтому та теория, которая не соприкасается прямо или косвенно с аналитическими выражениями, неизбежно занимает изолированное положение среди других ветвей математики.

Поэтому, если не хотят, чтобы теория функций действительного переменного была теорией, замкнутой в себе и не оказывающей влияния на другие математические теории, нужно поставить в связь аналитические выражения с одной стороны, определения и понятия теории функций, с другой стороны».

В связи с такой установкой Н. Н. Лузин выделяет две основные задачи: «Дано структурное свойство функции. Найти аналитические выражения, изображающие эту функцию». И задачу, обратную первой: «Дан класс аналитических выражений. Найти необходимое и достаточное структурное свойство функций, изображаемых этим классом аналитических выражений» (последнюю задачу Н. Н. Лузин считает особенно существенной).

Тем классом аналитических выражений, которые с этой точки зрения рассматривал Н. Н. Лузин, является класс тригонометрических рядов, и в первую очередь, конечно, рядов Фурье. «Формулы Фурье имеют в виду решение следующей задачи анализа: зная сумму тригонометрического ряда, определить его коэффициенты» ([11], стр. 7). Но, как замечает

* См., например, статью Н. Н. Лузина «Функция», публикуемую в настоящем томе.

Н. Н. Лузин ([21], стр. 6 и 7), «понятие ряда Фурье не есть понятие вполне определенное и устойчивое, но всецело зависит от понятия определенного интеграла. Принимая в формулах Фурье все более и более общее определение интеграла, мы расширяем все более и более класс тригонометрических рядов Фурье». «Отсюда естественно найти наиболее общее определение понятия интеграла с тем, чтобы расширить до возможных пределов класс тригонометрических рядов Фурье. Этим задача о тригонометрических рядах, их сходимости, суммируемости и свойствах функций, изображаемых ими, тесно связывается с задачей о нахождении возможно более общего определения понятия интеграла».

Что касается исторической связи между теорией тригонометрических рядов и понятием функции, то ей Н. Н. Лузин посвятил несколько параграфов своей диссертации. Мы дадим здесь несколько выдержек для характеристики его взгляда на этот вопрос (см. стр. 206, 207, 209):

«Классические методы суммирования... дают более или менее полное решение следующей задачи анализа:

дан тригонометрический ряд; *определить значения функции*, *изображаемой им.*

Эта задача, выдвинутая в анализе сравнительно недавно в связи с теорией расходящихся рядов, обратна другой задаче, поставленной давно, при первых шагах классического анализа, когда понятие «произвольной функции» не было еще сложившимся.

Задача Фурье:

дана функция своими значениями: *определить коэффициенты тригонометрического ряда*, *изображающего ее*».

«Известно, каким образом эта задача была связана с понятием „произвольной функции“. В 1747 г. Д'Аламбер проинтегрировал уравнение звучащей струны, и этот результат послужил началом целого ряда работ, раскрывших содержание понятия произвольной функции».

«Вопрос, который ставился сначала, был вопросом об отношении между аналитическим определением функции и определением до некоторой степени физическим: если отклонить *произвольно* струну от ее положения равновесия, существует ли формула, точно изображающая начальное положение этой струны.

На долю Фурье выпало дать утвердительный ответ на этот вопрос; Фурье дал метод вычисления коэффициентов тригонометрического ряда, изображающего «произвольную» функцию».

«Это открытие Фурье опрокидывало все понятия и взгляды той эпохи; в то время все, включая Эйлера, думали, что каждому определенному аналитическому выражению соответствует кривая, последовательные части которой зависят друг от друга... Но Фурье доказал, что такое понимание произвольной кривой — иллюзорно и невозможно, так как физик, чертящий кривую, в любой момент свободен изменить течение кривой; и раз кривая начерчена, всегда возможно ее изобразить одним аналитическим выражением.

Таким образом, пришли к тому парадоксальному результату, что нет никакого логического основания рассматривать два отрезка одной и той же прямой или две дуги одной и той же окружности как соответствующие одной и той же функции, потому что всегда возможно рассматривать как единую функцию ординату кривой, составленной из двух отрезков различных прямых или из двух дуг различных окружностей».

«Результат Фурье и изучение значений аналитических выражений разрушали всякую связь между различными частями кривой. Казалось, что значения аналитического выражения обладают лишь одним свойством: быть определенными,— в остальном же совершенно произвольны, будучи абсолютно независимы друг от друга. В этом именно смысле и было определено понятие функции, данное Дирихле; это определение функции явилось основным для современной теории функций действительного переменного».

«Задача Фурье приводит к отысканию регулярного алгорифма, позволяющего, отправляясь от значений функции, определять единственным образом коэффициенты тригонометрического ряда, изображающего ее. Одною из главных целей общей теории интеграла является построение этого регулярного алгорифма».

Дадим сейчас краткое изложение основных результатов Н. Н. Лузина в обоих тесно связанных между собой направлениях его работы: общей метрической теории функций и, в частности, теории интеграла и в связанной с ней теории тригонометрических рядов.

Изучая общие вопросы структуры измеримых множеств и функций, Н. Н. Лузин [7] получил в 1912 г. основной результат, так называемое C-свойство, ныне вошедшее во все учебники теории функций: всякую измеримую функцию, конечную почти всюду на некотором отрезке, можно изменить на множестве сколь угодно малой меры так, чтобы она стала непрерывной на всем отрезке (см., например, Н. Н. Лузин [20]).

Это характеристическое свойство измеримых функций имеет исключительное значение и нашло себе приложения не только в теории функций действительного и комплексного переменного, но и в других вопросах анализа, например в теории почти периодических функций. Простыми следствиями основного результата Н. Н. Лузина является ряд теорем, связывающих структуру функции с изображающим ее аналитическим аппаратом (например, теорема Фреше о том, что для всякой измеримой функции, конечной почти всюду, существует ряд из непрерывных функций, сходящийся к ней почти всюду; теорема Витали о том, что всякая измеримая функция, конечная почти всюду, отличается лишь на множестве меры нуль от функции второго класса по классификации Бэра и др.).

Но, что самое главное, C-свойство позволило Н. Н. Лузину дать полное решение ряда основных задач теории функций: задачи об отыскании примитивной функции, задачи об изобразимости функции тригонометрическим рядом и задачи о нахождении гармонической функции, голоморфной внутри круга и имеющей на окружности заданные значения. Об этом мы будем говорить подробнее дальше.

Заметим еще, что, исходя из C-свойства, можно естественно построить теорию интеграла Лебега, как это и было сделано Н. Н. Лузиным в его неопубликованных лекциях в Московском университете в 1920—1921 гг.[1]

Из C-свойства следует сразу, что всякая измеримая функция, конечная почти всюду, есть функция, асимптотически непрерывная почти всюду. Обратная теорема была доказана В. В. Степановым [48].

Исследования Н. Н. Лузина по теории измеримых функций послужили отправной точкой для работ других математиков и, прежде всего, его учеников. Укажем, например, на исследования А. Я. Хинчина [54] по строению измеримых функций.

Следующим вопросом общей метрической теории функций, который исследовал Н. Н. Лузин, был вопрос об отыскании примитивной функции. Н. Н. Лузин назвал примитивной такую непрерывную функцию, которая имеет данную своей производной почти всюду. Он отмечает, что было бы ошибочным рассматривать как примитивные только такие функции, которые имеют производную в каждой точке, так как неопределенный интеграл Лебега, ценность которого для анализа неоспорима, может, однако, не иметь производной в бесконечном множестве точек (и даже тогда, когда подинтегральная функция есть производная в каждой точке от некоторой непрерывной функции).

Приняв эту терминологию, Н. Н. Лузин ставит и решает во всей общности вопрос о том, какие функции имеют примитивную и как ее найти. Он доказывает, что всякая измеримая функция, конечная почти всюду, имеет примитивную. Требование конечности почти всюду является совершенно естественным, так как Н. Н. Лузин [2] доказал, что не существует непрерывной функции, имеющей бесконечную производную на множестве положительной меры.

Теорема о существовании примитивной была применена Н. Н. Лузиным в двух направлениях: во-первых, к решению задачи Дирихле и, во-вторых, к изображению функций тригонометрическими рядами. Для произвольной измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на окружности, Н. Н. Лузин доказал существование гармонической функции, голоморфной внутри круга и принимающей почти всюду на окружности значения $f(x)$ (слова «принимающая значения» здесь понимаются в смысле стремления к пределу по всем некасательным путям). До работы Н. Н. Лузина аналогичное предложение было доказано Фату лишь для случая суммируемой функции.

Этой теоремой начался важный цикл исследований Н. Н. Лузина по граничным свойствам аналитических функций [28], с которого в свою очередь и началась столь широко развившаяся московская школа теории

[1] Впоследствии такое построение было опубликовано Тонелли [52].

функций комплексного переменного. Им следовало бы посвятить специальную статью.

О приложении теоремы о примитивной к изображению функций тригонометрическими рядами мы будем говорить дальше.

Так как у всякой функции имеется бесконечное множество примитивных, не отличающихся на постоянную величину, то встает задача о выделении из пучка примитивных той, которую «естественно» считать неопределенным интегралом. Чтобы решить эту задачу, Н. Н. Лузин прежде всего отмечает, что хотя казалось бы естественным среди всех примитивных предпочесть точную, т. е. такую, которая имеет данную функцию своей производной всюду, но, во-первых, такой примитивной может не существовать даже для ограниченной функции и, во-вторых, точных примитивных, не отличающихся на постоянную, может оказаться бесконечное множество.

Таким образом, выделение какой-то примитивной, наиболее тесно связанной с данной функцией, следует производить на основании других принципов. С этой целью Н. Н. Лузин подверг глубокому изучению те понятия неопределенного интеграла, которые уже получили признание в математике: интегралы Лебега и Данжуа. Для суммируемых функций в классе их примитивных, очевидно, существуют функции с ограниченным изменением. Н. Н. Лузин доказал, что неопределенный интеграл Лебега есть единственная примитивная с наименьшим полным изменением, или, говоря геометрически, если функция суммируема, то среди кривых, изображающих ее примитивные, неопределенный интеграл Лебега есть кривая с наименьшей длиной дуги. «Таким образом, нахождение неопределенного интеграла Лебега представляет аналогии с задачами вариационного исчисления» ([11], стр. 57).

Для решения вопроса о характеристическом свойстве интеграла Данжуа Н. Н. Лузин ввел ряд новых понятий, которые сами по себе оказались весьма плодотворными и которыми до сих пор пользуются в различных вопросах теории функций[1]: понятие полного изменения функции для совершенного множества P и функции с обобщенным ограниченным изменением.

Пусть P есть совершенное множество и (Σ) есть система из конечного числа n сегментов, попарно без общих точек, покрывающая P. Пусть $F(x)$ — непрерывная функция; обозначая через M_i и m_i ее максимум и минимум на сегменте Δ_i системы (Σ) и составляя сумму

$$v = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i),$$

Н. Н. Лузин называет $F(x)$ «функцией с ограниченным изменением для множества P», если существует такое K, что $v < K$ для любой системы (Σ),

[1] О дальнейших применениях этих понятий см., например, в книге Сакса [47], гл. VII.

удовлетворяющей вышеприведенным условиям. Он доказывает, что если $F(x)$ есть функция с ограниченным изменением для P, то v стремится к определенному пределу, когда мера (Σ) стремится к мере P, в то время как длина наибольшего сегмента системы (Σ) стремится к нулю. Этот предел и называется полным изменением $F(x)$ для P и обозначается v_P.

Функция $F(x)$ называется функцией с обобщенным ограниченным изменением на (a, b), если для всякого совершенного множества P на (a, b) найдется такой сегмент Δ, что для пересечения $P_\Delta = P \cdot \Delta$ функция $F(x)$ будет функцией с ограниченным изменением. Пользуясь этими понятиями, Н. Н. Лузин доказал теорему: для того чтобы непрерывная функция была неопределенным интегралом Данжуа, необходимо и достаточно, чтобы она была функцией с обобщенным ограниченным изменением и ее полное изменение v_P, если только оно существует, для всякого совершенного множества P меры нуль было равно нулю. Если функция интегрируема по Данжуа, то в семействе всех ее примитивных есть одна и только одна обладающая только что указанными свойствами, и она совпадает с неопределенным интегралом Данжуа.

Наконец, так как почти одновременно с появлением работ Данжуа в математической литературе появилось еще два определения интеграла, принадлежащие Борелю, Н. Н. Лузин [11] подробно рассмотрел и эти определения. При этом он доказал, что одно из них эквивалентно интегралу Лебега, а второе не выходит за рамки интеграла Данжуа. Таким образом, необходимость исследовать структурные свойства этих интегралов отпала.

Закончив рассмотрение свойств процессов интегрирования, известных в его время, Н. Н. Лузин перешел к вопросу о существовании общего процесса интегрирования. Отметив, что найденные им свойства интегралов Лебега и Данжуа как характеристические не дают возможности выделить неопределенный интеграл из семейства примитивных для $f(x)$ в том случае, когда $f(x)$ несуммируема или неинтегрируема по Данжуа, Н. Н. Лузин поставил себе целью найти более общие свойства интегралов Лебега и Данжуа, которые были бы уже неэквивалентны этим последним. Прежде всего он установил, что функция, имеющая производную, равную нулю почти всюду, и отличная от константы, т. е. функция, которая может «портить» неопределенный интеграл, отображает множество меры нуль во множество положительной меры. В связи с этим он ввел понятие «N-свойства» и более сильное понятие — свойство нулевого изменения.

Непрерывная функция $F(x)$ обладает «N-свойством» на отрезке $[a, b]$, если для всякого множества E меры нуль на $[a, b]$ множество значений $F(x)$ на E есть опять множество меры нуль.

Непрерывная функция $F(x)$ есть функция с нулевым изменением на отрезке $[a, b]$, если для всякого множества E меры нуль на этом отрезке и для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти систему интервалов $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$, покрывающую E и такую, что, обозначая через w_i колебание $F(x)$ на

δ_i, имеем:

$$\sum w_i < \varepsilon.$$

N-свойство в настоящее время широко применяется в теории функций (см., например, книгу С. Сакса [47], гл. VII). Изучению N-свойства и его применений был посвящен ряд работ[1].

Н. Н. Лузин дал ясно понять, почему неопределенный интеграл естественно искать именно в классе функций, обладающих N-свойством и даже точнее, в классе функций с нулевым изменением. Он показал, что для суммируемой функции неопределенный интеграл Лебега есть единственная примитивная с нулевым изменением, и аналогичное предложение имеет место для функций, интегрируемых по Данжуа, и интеграла Данжуа.

В связи с задачей обобщения понятия неопределенного интеграла Н. Н. Лузин поставил ряд проблем. Многие из них позднее, в результате исследований других авторов, получали иногда положительное, иногда отрицательное решение. Но даже постановки задач, получивших отрицательное решение, оказались весьма плодотворными, так как они возбудили ряд исследований. Такова, например, задача об определении интеграла как суммы того ряда, который получается при интегрировании тригонометрического ряда, сходящегося к заданной функции. Подробнее мы будем говорить об этом дальше. Здесь же отметим, что эта задача, между прочим, привела к необходимости обобщить понятие производной. В связи с этим Н. Н. Лузин изучил и производные числа Дини, доказав, что если непрерывная функция имеет все четыре производных числа конечными всюду на некотором множестве положительной меры, то она имеет обыкновенную производную почти всюду на этом множестве. В своей диссертации ([11], стр. 141) Н. Н. Лузин подчеркивал необходимость обобщения понятия производной в связи с обобщением понятия интеграла. В московской школе теории функций вопросу обобщения понятия производной был посвящен в разное время целый ряд работ (см., например, работы А. Я. Хинчина [53], [54], Г. П. Толстова [50], [51], Ю. Б. Гермейера [30], [31]).

Перейдем сейчас к результатам Н. Н. Лузина по теории тригонометрических рядов. В 1911 г., когда Н. Н. начал свою научную работу, было уже известно, что если тригонометрический ряд сходится на множестве

---

[1] См., например, работу С. Банаха [25], решавшего поставленную Н. Н. Лузиным задачу о дифференцируемости этих функций. Банах доказал, что функция, обладающая N-свойством, обязана иметь производную на множестве положительной меры. Вопрос о сумме функций, обладающих N-свойством, также поставленный Н. Н. Лузиным, освещен в работе Н. К. Бари [26]. В этой работе, между прочим, доказывается, что любая непрерывная функция может быть представлена как сумма трех функций вида $f[\varphi(x)]$, где f и φ абсолютно непрерывны. Следовательно, всякая непрерывная функция есть сумма трех функций, обладающих N-свойством.

положительной меры, то его коэффициенты должны стремиться к нулю. Естественно возникал вопрос, является ли условие стремления коэффициентов к нулю достаточным для сходимости ряда на множестве положительной меры.

В своей первой печатной работе [1] Н. Н. Лузин построил степенной ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, и расходящийся в каждой точке единичного круга, и как следствие этого получил тригонометрический ряд, расходящийся почти всюду, хотя его коэффициенты стремятся к нулю. Этот факт казался в свое время крайне неожиданным, так как даже такие крупные специалисты в области тригонометрических рядов, как Фату, предполагали, что ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, может расходиться лишь на множестве меры нуль. Построенный Н. Н. Лузиным пример расходящегося ряда вызвал большой интерес и явился началом многочисленных исследований.

Прежде всего Н. Штейнгауз [55], видоизменяя пример Н. Н. Лузина, получил тригонометрический ряд, расходящийся всюду; но, как показал С. Б. Стечкин [49], уже в примере самого Н. Н. Лузина расходимость имеет место в каждой точке. Далее, ряд авторов ставил вопрос о быстроте, с которой коэффициенты почти всюду расходящегося степенного или тригонометрического ряда могут стремиться к нулю. Наиболее сильной теоремой в этом направлении является следующая: какова бы ни была монотонная последовательность положительных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, таких, что $\Sigma c_n^2 = +\infty$, можно найти тригонометрический ряд с коэффициентами $O(c_n)$ и расходящийся в каждой точке[1].

Наконец, следует отметить в качестве продолжения исследования расходящихся рядов результат Д. Е. Меньшова [40]: он построил тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, у которого любая подпоследовательность частных сумм расходится почти всюду.

Н. Н. Лузин [5] поставил также проблему о нахождении тригонометрического ряда, сходящегося на множестве меры, отличной от нуля и от 2π. Этой задачей занимался также целый ряд математиков. С. Штейнгауз [56] построил для любого отрезка ряд, сходящийся всюду на нем и расходящийся всюду вне его, А. Райхман [46] решил ту же задачу для произвольного замкнутого множества, а С. Б. Стечкин [49] — для произвольного множества типа F_σ.

При изучении вопросов сходимости тригонометрических рядов важную роль играют точки абсолютной сходимости. Н. Н. Лузин доказал [11], что если у тригонометрического ряда имеется бесконечное множество точек абсолютной сходимости[2], то ряд либо почти всюду сходится, либо почти всюду расходится. Кроме того, им получен [4], [11] весьма изящный и, вместе с тем, существенный результат: если тригонометрический ряд

[1] Этот результат содержится в работе С. Б. Стечкина [49]. Аналогичная теорема для степенных рядов была доказана Недером [41].

[2] В частности, это будет тогда, когда у него есть две точки абсолютной сходимости на расстоянии, несоизмеримом с π.

сходится абсолютно на множестве меры больше нуля или даже меры нуль, но второй категории, то он сходится абсолютно всюду.

До сих пор мы говорили о сходимости общих тригонометрических рядов. Отметим теперь исследования Н. Н. Лузина по вопросу о сходимости рядов Фурье. Большое внимание он уделил случаю, когда разлагаемая в ряд функция есть функция с интегрируемым квадратом. Для таких функций он нашел необходимое и достаточное условие сходимости ряда Фурье почти всюду. Если функция $f(x)$ имеет ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

то сопряженный тригонометрический ряд

$$\sum - b_n \cos nx + a_n \sin nx$$

по теореме Фишера — Риса есть снова ряд Фурье от некоторой функции с интегрируемым квадратом; обозначим ее через $g(x)$. Н. Н. Лузин доказал ([9], [11]) следующую теорему: для того чтобы ряд Фурье от $f(x)$ сходился почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha}\cos n\alpha\, d\alpha = 0$$

почти всюду.

Здесь интеграл определяется как предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}$.

Исследуя доказательство этой теоремы, Н. Н. Лузин получил [11] целый ряд интересных следствий. Среди них отметим, прежде всего, решение следующей задачи: зная значение $u(\theta)$ на окружности ($R=1$) гармонической функции $u(x, y)$, найти значения $v(\theta)$ на этой окружности сопряженной гармонической функции $v(x, y)$.

Н. Н. Лузин дал полное решение этой задачи для случая, когда данная функция $u(\theta)$ есть любая функция с интегрируемым квадратом. Это решение дается в виде формул:

$$v(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{u(\theta+\alpha)-u(\theta-\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha,$$

$$u(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{v(\theta+\alpha)-v(\theta-\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha,$$

где интегралы определены как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}$.

Далее, как следствие вышеупомянутого признака сходимости для рядов Фурье Н. Н. Лузин указал ряд случаев, когда по поведению функции можно судить о поведении ряда, сопряженного с ее рядом Фурье. Например, если рассматриваемая функция с интегрируемым квадратом удовлетворяет почти всюду условию Дини, то сопряженный тригонометрический ряд сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$.

Впоследствии вопросу о связи между данной и сопряженной функцией, а также о поведении тригонометрического ряда, сопряженного с данным, было посвящено много работ. Решающий результат был получен в 1935 г. А. И. Плеснером [44], доказавшим, что сходимость любого тригонометрического ряда на множестве положительной меры влечет сходимость сопряженного к нему ряда почти всюду на этом множестве. Интересно, что Н. Н. Лузин (в личной беседе с Д. Е. Меньшовым) высказывал гипотезу о справедливости этой теоремы еще в 1915 г.

Вернемся к теореме Н. Н. Лузина об условиях сходимости ряда Фурье для функции с интегрируемым квадратом.

При доказательстве этой теоремы было очень важным установить самое существование почти всюду несобственного (или, как называл Н. Н. Лузин, «особого») интеграла

$$\int_0^\pi \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha$$

для любой функции $g(x)$ с интегрируемым квадратом.

Исследуя этот особый интеграл, Н. Н. Лузин получил новое глубокое метрическое свойство измеримых множеств, которое он образно сформулировал так (см. стр. 187 его диссертации): всякое измеримое множество всеми своими частями, включая части меры бесконечно малой, порядка выше первого, расположено симметрично относительно почти каждой точки области, если пренебрегать бесконечно малыми расстояниями порядка выше первого.

Это свойство «почти симметричности» Н. Н. Лузин назвал дифференциальным свойством второго порядка измеримых множеств, так как оно является гораздо более тонким, чем известное свойство множеств положительной меры иметь почти все свои точки точками плотности («дифференциальное свойство первого порядка»). Действительно, не всякая точка плотности или разрежения обладает указанным свойством симметрии.

Возвращаясь к особому интегралу, заметим, что Н. Н. Лузин, всегда глубоко анализировавший причины обнаруженных им математических явлений, неоднократно настаивал на том, что существование этого интеграла есть результат не малости подинтегральной функции, а лишь интерференции ее положительных и отрицательных величин (так как даже для непрерывных функций

$$\int_0^\pi \left|\frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\right| d\alpha$$

может почти всюду расходиться). Подчеркивая это обстоятельство, Н. Н. Лузин указывал на то, что проблема сходимости рядов Фурье тесно связана с этой интерференцией. В одной работе, напечатанной значительно позднее [18], он изучил интеграл Дирихле

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(x+\alpha) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha$$

(где ε_1 и ε_2 положительны и как угодно малы). Как известно, вопрос о сходимости ряда Фурье от функции $f(x)$ сводится к вопросу о поведении $J_n(x)$ при $n \to \infty$. Н. Н. Лузин построил такую непрерывную функцию $f(x)$, для которой $J_n(x)$ стремится к $f(x)$ равномерно на $[0, 2\pi]$ и, однако, каждый из интегралов

$$J'_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon_1}^{0} f(x+\alpha) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha$$

и

$$J''_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\varepsilon_2} f(x+\alpha) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha,$$

сумма которых равна $J_n(x)$, расходится почти всюду и даже имеет бесконечные пределы неопределенности.

По поводу роли интерференции положительных и отрицательных величин в вопросах сходимости Н. Н. Лузин в своей диссертации писал (см. стр. 183):

«Упомянутую интерференцию положительных и отрицательных величин выражения

$$\frac{g(x+\alpha) - g(x-\alpha}{\alpha}$$

нужно рассматривать как истинную причину сходимости рядов Фурье — Лебега. Все исследования, делавшиеся до сих пор, о сходимости рядов Фурье основаны на рассмотрении лишь *абсолютных величин* тех или других выражений; нужно поэтому рассматривать эти исследования как достаточно грубые и как не входящие в сущность сходимости рядов Фурье. К сожалению, факт существования определенной конечной величины

$$\int_0^\pi \frac{g(x+\alpha) - g(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha$$

для интеграла глубоко скрыт в теореме Фишера — Риса, следовательно, обнаружен скорее теорией комплексного переменного, чем действительного. Было бы важно получить прямое доказательство существования определенного значения этого интеграла, основанное на методах действительного переменного».

Проблемой, поставленной здесь Н. Н. Лузиным, в 1921 г. занялся А. С. Безикович [29]. Он доказал существование особого интеграла для функций с интегрируемым квадратом, не пользуясь методами комплексного переменного. Но его доказательство, содержащее арифметические подсчеты, не удовлетворило Н. Н. Лузина, так как за этими подсчетами опять-таки нельзя было усмотреть, почему происходит интерференция положительных и отрицательных величин выражения $\frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}$. В дальнейшем Н. Н. Лузин получил новое, уже построенное на методах только теории функций действительного переменного, доказательство существования почти всюду на $(0, 2\pi)$ особого интеграла

$$\int_0^\pi \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha.$$

Впоследствии он обобщил эту теорему, доказав существование почти всюду на бесконечной оси OX интеграла

$$\int_0^\infty \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha,$$

если $f(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом на всей бесконечной оси. Эти доказательства им никогда не были опубликованы. Рукопись, содержащая их, была найдена в бумагах Н. Н. Лузина после его кончины и в настоящее время напечатана как приложение ко второму изданию его диссертации [24].

Укажем еще, что позднее другими авторами было доказано существование особого интеграла уже для функций с неинтегрируемым квадратом. Так, И. И. Привалов [45] получил этот результат для суммируемых функций, А. И. Плеснер [42] — для функций, интегрируемых в смысле Данжуа, и, наконец, Марцинкевич [35] — для функций, интегрируемых в смысле Данжуа — Хинчина, если их примитивные имеют производную почти всюду.

Возвратимся к случаю функций с интегрируемым квадратом. Отметим, что Н. Н. Лузин в своей диссертации сопоставил найденное им необходимое и достаточное условие сходимости почти всюду рядов Фурье от этих функций и существование особого интеграла. Он пишет (стр. 183):

«Заметив, что интеграл в равенстве

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha}\cos n\alpha\,d\alpha = 0$$

отличается от интеграла

$$\int_0^\pi \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha$$

лишь множителем $\cos n\alpha$, который принимает положительные и отрицательные величины, равномерно распределяющиеся на области $(0, 2\pi)$, когда $n \to +\infty$, мы приходим к вероятности того, что всякий ряд Фурье — Лебега от функции с интегрируемым квадратом есть всегда ряд, сходящийся почти всюду на $(0, 2\pi)$. Все результаты, полученные до сих пор в теории тригонометрических рядов, подтверждают вероятность этой гипотетической теоремы».

Высказанная здесь гипотеза до сих пор не подтвердилась, но и не опровергнута[1]. Она, так же как и многие другие поставленные Н. Н. Лузиным проблемы, вызвала целую серию работ. К этому кругу идей следует отнести и работы по так называемым признакам сходимости типа Вейля.

Как известно, принято называть функцией Вейля всякую положительную неубывающую функцию $w(n)$, такую, что сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} w(n)(a_n^2+b_n^2)$$

влечет сходимость почти всюду соответствующего тригонометрического ряда

$$\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Н. Н. Лузин в своей диссертации подчеркивает важность проблемы понижения функций Вейля. Он пишет (стр. 195):

«Чем медленнее возрастает функция Вейля $w(n)$, тем шире класс тригонометрических рядов, сходящихся *в силу этого признака* и, следовательно, тем более общ этот признак сходимости. Отсюда задача о сходимости тригонометрических рядов Фурье — Лебега от функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом приводит к задаче отыскания наименьшего возрастания функций Вейля.

Это наименьшее возрастание существует ли? Легко заметить, что если всякая возрастающая функция $\varphi(n)$, $\varphi(\infty)=\infty$, есть функция Вейля, тогда каждый ряд Фурье от функции с интегрируемым квадратом есть сходящийся почти всюду. Действительно, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ есть сходящийся, тогда всегда можно определить столь медленно возрастающую

---

[1] Заметим, что построенный А. Н. Колмогоровым [32] пример ряда Фурье, расходящегося в каждой точке, относится к функции с неинтегрируемым квадратом.

функцию $\varphi(n)$, $\varphi(\infty) = \infty$, что будет сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)(a_n^2 + b_n^2)$. Отсюда, если существует хотя одна функция $f(x)$ с интегрируемым квадратом, для которой ряд Фурье не сходится почти всюду, тогда медленность возрастания функций Вейля $w(n)$ не может переступить за известный порог; все сводится, следовательно, к фактическому определению этого порога. Поэтому было бы интересно понизить множитель Харди $\ln^2 n$».

И, действительно, позднейшими работами А. Н. Колмогорова и Г. А. Селиверстова [33], с одной стороны, и А. И. Плеснера [43], с другой стороны, было доказано, что множитель $\ln^2 n$ можно понизить до $\ln n$. До сих пор остается невыясненным, возможно ли дальнейшее понижение.

Что же касается общих ортогональных систем (а не специально тригонометрической), то здесь Н. Н. Лузин указал ([11], стр. 196) на возможность бесконечно понизить известный в то время множитель Планшереля $\ln^3 n$ и ставил проблему о возможности понизить его до $\ln^2 n$. Впоследствии работами Д. Е. Меньшова [37] и Радемахера было доказано, что действительно понижение до $\ln^2 n$ возможно, причем Д. Е. Меньшов [39] показал, что дальше этого «порога» снижение идти уже не может.

Перейдем теперь к поставленному Н. Н. Лузиным вопросу об изобразимости произвольной функции тригонометрическим рядом, вопросу, которого мы уже коснулись в начале этой статьи. Пользуясь общей теоремой о существовании примитивной для любой измеримой функции, конечной почти всюду, Н. Н. Лузин доказал [11] замечательную теорему:

«Всякая измеримая функция, конечная почти всюду, может быть представлена тригонометрическим рядом, суммируемым в ней методами Римана и Пуассона почти всюду».

В течение 25 лет этот результат не поддавался уточнению, и только в 1940 г. Д. Е. Меньшов [38] показал, что в этой теореме можно суммируемость заменить на обычную сходимость почти всюду. Вопрос же о том, является ли наложенное здесь на функцию требование конечности почти всюду необходимым, до сих пор полностью не решен.

Интересно, что в этом круге вопросов мы приходим к разным ответам в зависимости от того, как понимать «изобразимость» функции тригонометрическим рядом. Именно, из совместной работы Н. Н. Лузина и И. И. Привалова [34] вытекает возможность построить тригонометрический ряд, суммируемый методом Пуассона к $+\infty$ почти всюду; для метода Римана это уже невозможно (не только почти всюду, но и на каком-либо множестве положительной меры — в силу результатов Ю. Б. Гермейера [31]). Наконец, для обыкновенной сходимости вопрос все еще остается открытым.

При построении ряда, изображающего данную функцию, Н. Н. Лузин пользовался ее примитивной, а таких примитивных, как известно, бесконечное множество. Поэтому он отметил, что функция может быть изображена бесконечным множеством тригонометрических рядов, и, таким образом, еще не решена задача, которую он называет «задачей Фурье»: дана функция своими значениями; определить коэффициенты тригонометрического ряда, изображающего ее. Изложив в сжатой форме в своей диссертации (см. § 81—85) историю связи теории тригонометрических рядов с развитием основных понятий анализа (связи этой мы коснулись в начале настоящей статьи), Н. Н. Лузин очень ярко поставил вопрос об интегрировании как операции определения коэффициентов ряда по его сумме. Он указал (стр. 219), что задача Фурье распадается на две задачи: 1) выбор единственного ряда, наиболее тесно связанного с данной функцией, и 2) определение коэффициентов этого ряда, исходя непосредственно из значений функции.

Считая, что наиболее тесно связанным с данной функцией является такой ряд, который сходится к ней почти всюду, Н. Н. Лузин во всей остроте поставил вопрос о единственности разложения функции в тригонометрический ряд.

К решению этого вопроса Н. Н. Лузин привлек своих учеников. Прежде всего Д. Е. Меньшов [36] доказал, вопреки всеобщему мнению, существование тригонометрического ряда, сходящегося к нулю почти всюду, но имеющего отличные от нуля коэффициенты. После этого могло бы показаться, что с проблемой единственности уже нечего делать. Однако Н. Н. Лузин заметил, что остается нерешенным вопрос, почему именно удался пример Д. Е. Меньшова. Д. Е. Меньшов показал, что существует совершенное множество меры нуль, вне которого некоторый тригонометрический ряд сходится всюду к нулю. Всякое ли множество мощности континуума обладает этим свойством? Этот вопрос был поставлен Н. Н. Лузиным перед Н. К. Бари и решен ею в отрицательном смысле (см., например, Н. К. Бари [27]). В течение 30 лет вопрос о природе «множеств единственности» служит предметом внимания ученых (см. об этом статью Н. К. Бари [27]). На этом примере мы еще раз убеждаемся, как глубоки и интересны были проблемы, которые ставил Н. Н. Лузин.

Вернемся к вопросу об изображении функций тригонометрическими рядами.

Как было сказано выше, Н. Н. Лузин разбил задачу Фурье на две: 1) выбор единственного ряда, наиболее тесно связанного с данной функцией, и 2) определение коэффициентов этого ряда, исходя непосредственно из значений этой функции.

Определение коэффициентов ряда, изображающего данную функцию (если мы выделили каким-то образом один такой ряд, «особенно тесно связанный» с этой функцией), Н. Н. Лузин связал с обобщением понятия интеграла: естественно назвать неопределенным интегралом от $f(x)$ функцию $F(x)$, являющуюся суммой ряда, который получается от интегрирования ряда, изображающего $f(x)$. Создав таким образом «интеграл» от $f(x)$, можно уже коэффициенты изображающего ряда получать по формулам Фурье.

Чтобы оправдать это определение, надо было, прежде всего, выяснить, когда возможно почленное интегрирование тригонометрического ряда (не являющегося рядом Фурье). Н. Н. Лузин доказал, что такое интегрирование возможно всякий раз, как такой ряд сходится в каждой точке некоторого интервала (a, b) к функции $f(x)$, непрерывной на этом интервале [впрочем, его доказательство вполне сохраняет силу, если $f(x)$ только суммируема на (a, b)]. Однако более важно другое: он установил, что предложенное им определение «интеграла» от функции $f(x)$ не является формальным, а основывается на глубоком структурном отношении. Именно, он обнаружил, что если тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

сходится почти всюду к функции $f(x)$, то сумма $F(x)$ ряда

$$C + \frac{a_0}{2} x + \sum - \frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \sin nx$$

имеет асимптотическую производную $F^{[']}(x)$, равную почти всюду $f(x)$ (см. стр. 225 его диссертации).

Заканчивая изложение основных результатов Н. Н. Лузина по метрической теории функций действительного переменного, мы хотим отметить, что эти работы, и в особенности его замечательная диссертация, разрешили многие основные задачи складывавшейся тогда теории функций и в то же время определили в значительной степени дальнейшее ее развитие.

Оригинальность работ Н. Н. Лузина заключается не только в полученных результатах и новых постановках вопросов, но и в методе: работы Н. Н. Лузина отличает чрезвычайно яркий характер геометрического изложения. Достаточно просто напомнить некоторые из результатов: «C-свойство», свойство графика неопределенного интеграла Лебега быть кратчайшей кривой среди всех примитивных, свойство симметрии в теореме об измеримых множествах и многие другие. Н. Н. Лузин умел находить в самых сложных и отвлеченных вопросах простое геометрическое ядро, которое во многих случаях и подсказывало решение задачи. Этот геометрический стиль свойственен и другим работам Н. Н. Лузина. Достаточно указать на яркие геометрические методы, которые он ввел в дескриптивную теорию функций (метод решета, метод проектирования и другие). Эти геометрически-конструктивные методы многочисленные ученики Н. Н. Лузина переносили в самые разные области математики, казалось бы очень далекие от теории функций действительного переменного.

Говоря о трудах Н. Н. Лузина по метрической теории функций действительного переменного, мы неоднократно указывали, как они продолжались в исследованиях его учеников. Период, когда Н. Н. Лузин в основном уделял внимание метрической теории функций, был периодом, когда закладывались основы созданной им большой научной школы — московской школы теории функций. Общеизвестно, что эта школа явилась основой для развития других математических школ в Советском Союзе. Н. Н. Лузин привлек к вопросам в области метрической теории функций и смежным вопросам математики как своих младших товарищей по университету (И. И. Привалова, В. В. Степанова), так и своих первых учеников (Д. Е. Меньшова, А. Я. Хинчина); далее в эту работу включились многие математики следующих поколений, как непосредственные ученики Н. Н. Лузина, так и ученики его учеников. Методы метрической теории функций в московской математической школе широко применялись в самых разнообразных областях. Мы уже отметили, что сам Н. Н. Лузин переносил их в теорию функций комплексного переменного. Ученики Н. Н. Лузина широко применяли эти методы в теории дифференциальных и интегральных уравнений, в теории почти-периодических функций, в вариационном исчислении и функциональном анализе, в вопросах теории чисел, теории вероятностей и других вопросах математики. Сам Н. Н. Лузин в последние 20 лет своей жизни редко возвращался к метрической теории функций, но его работы в этом направлении оказали самое сильное влияние на несколько поколений советских математиков, и тематика, поставленная Н. Н. Лузиным, продолжала привлекать внимание и вызывать к жизни новые исследования. Именно в последние годы появился ряд выдающихся исследований в области метрической теории функций, и некоторые из них непосредственно примыкают к первым работам Н. Н. Лузина. Это является лишним свидетельством того вклада в науку, который был заложен работами Н. Н. Лузина по метрической теории функций.

РАБОТЫ Н. Н. ЛУЗИНА ПО МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Über eine Potenzreihe. R. C. Circ. mat. Palermo, 1911, 32, 386—390.

2. К основной теореме интегрального исчисления. «Матем. сб.», 1912, 28, вып. 2, 266—294.

3. Об одном случае ряда Тэйлора. «Матем. сб.», 1912, 28, вып. 2, 295—302.

4. К абсолютной сходимости тригонометрических рядов. «Матем. сб.», 1912, 28, вып. 3, 461—472.

5. Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques. C. R. Acad. Sc., Paris, 1912, 155, 580—582.

6. Добавление к статье: «К основной теореме интегрального исчисления». «Матем. сб.», 1912, 28, вып. 2, 266—294; «Матем. сб.», 1912, 28, вып. 4, 544.

7. Sur les propriétés der fonctions mesurables. C. R. Acad. Sc., Paris, 1912, 154, 1688—1690.

8. Sur les propriétés de l'intégrale de M. Denjoy. C. R. Acad. Sc., Paris, 1912, 155, 1475—1477.

9. Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier. C. R. Acad. Sc. Paris, 1913, 156, 1655—1658.

10. Интеграл и тригонометрический ряд. М., тип. Лисснера и Собко, 1915, 242 стр. (Диссертация.)

11. Интеграл и тригонометрический ряд. «Матем. сб.», 1916, 30, вып. 1, 1—242.

12. Sur la recherche des fonctions primitives. C. R. Acad. Sc. Paris, 1916, 162, 975—978.

13. Démonstration élémentaire du théorème fondamental sur la densité des ensembles (совместно с В. К. Серпинским). R. C. Circ. mat. Palermo, 1917, **42**, 167—172.

14. Sur la notion de l'intégrale. Ann. mat. pura appl. série 3, 1917, **26**, fasc 2—3, 77—127.

15. Современное состояние теории функций действительного переменного, М., Труды Всеросс. математич. съезда, 1927, 11—32.

16. Sur une propriété des fonctions à carré sommable. Bull. Calcutta math. Soc., 1930, **20**, 139—154.

17. Современное состояние теории функций действительного переменного. М.— Л., ГТТИ, 1933, 1—58.

18. Sur une mode de convergence de l'intégrale de Dirichlet. Изв. физ.-мат. о-ва Казанск. ун-та, 1934, **6**, сер. 3, 1—4.

19. О последовательностях измеримых функций. В кн.: А. Лебег. Интегрирование и отыскание примитивных функций. ГТТИ, 1934, 283—290.

20. О строении измеримых функций. Там же, стр. 290—310.

21. Современные проблемы теории функций действительного переменного. (Тезисы доклада.) В кн.: Бюллетень II Всесоюзного съезда математиков в Ленинграде 24—30 июня 1934 г. Л., АН СССР, 1934, 8—10.

22. Функция. БСЭ, 59, 314—334.

23. Теория функций действительного переменного. Общая часть. М., Учпедгиз, 1940, 302 стр. (2-е изд. Учпедгиз, 1948, 318 стр.).

24. Об особом интеграле (1924 г.). Том I, стр. 367—391 настоящего собрания сочинений.

ЛИТЕРАТУРА О РАБОТАХ Н. Н. ЛУЗИНА ПО МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Крылов А. Н. Записка об ученых трудах Н. Н. Лузина. В кн.: «Записки об ученых трудах действительных членов АН СССР по отделу гуманитарных наук, избранных 12 января и 13 февраля 1929 г.». Л., АН СССР, 1930, 48—64.

Николай Николаевич Лузин. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1948.

Меньшов Д. Е. и Лаврентьев М. А. Успехи теории функций действительного переменного в СССР. «Матем. сб.», 1928, **35**, доп. вып., 21 —42.

Канторович Л. В. и Фихтенгольц Г. М. Теория функций вещественной переменной и функциональный анализ. Сб.: «Математика и естествознание в СССР». Изд-во АН СССР, 1938.

Бари Н. К., Ляпунов А. А., Меньшов Д. Е. и Толстов Г. П. Метрическая теория функций действительного переменного. Сб.: «Математика г СССР за тридцать лет (1917—1947)». Гостехиздат, 1948.

Степанов В. В. Московская школа теории функций, Ученые записки Моск. ун-та, вып. 91. (Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры, т. I, кн. 1.)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА[1]

25. Банах С. (Banach S.). Sur une classe de fonctions continues. Fund. Math., 1926, **8**, 166—172.

26. Бари Н. К. Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues. Math. Ann., 1930, **103**, 145—248; 598—653.

[1] Более подробный список литературы, относящийся к работам, продолжающим труды Н. Н. Лузина по метрической теории функций, читатель найдет в изданном в настоящее время втором издании его диссертации.

27. Бари Н. К. Проблема единственности разложения функции в тригонометрический ряд. Успехи математич. наук, 1949, 4, вып. 3, 1—63.
28. Берман А. Ф. и Маркушевич А. И. Теория функций комплексного переменного. Сб. «Математика в СССР за тридцать лет (1917—1947)». Гостехиздат, 1948, стр. 319—414.
29. Безикович А. С. Об одном структурном свойстве функций и ансамблей. «Матем. сб.», 1922, 31, 128—147.
30. Гермейер Ю. Б. О симметрических производных числах. «Матем. сб.», 1943, 12 (54), 121—145.
31. Гермейер Ю. Б. Производные Риманна и Валле-Пуссена и их применение к некоторым вопросам из теории тригонометрических рядов. М., Диссертация, 1946.
32. Колмогоров А. Н. Sur une série de Fourier-Lebesgue divergente partout, C. R. Ac. Sci., 1926, 183, 1327—1329.
33. Колмогоров А. Н. и Селиверстов Г. А. Sur la convergence des séries de Fourier. C. R. Ac. Sci., 1924, 178, 303—306.
34. Лузин Н. Н. и Привалов И. И. Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques. (О единственности и множественности аналитических функций.) Ann. sci. Ec. norm. sup., série 3, 1925, 42, № 6, 143—191.
35. Марцинкевич (Marcinkiewicz J.). Sur les séries de Fourier. Fund. Math, 1936, 27, 38—69.
36. Меньшов Д. Е. Sur l'unicité du développement trigonométrique, C. R , 1916, 16, 433—436.
37. Меньшов Д. Е. Sur les séries de fonctions orthogonales. Fund. Math., IV, 1923, 82—105.
38. Меньшов Д. Е. Sur la représentation des fonctions mesurables par des séries trigonométriques. «Матем. сб.», 1941, 9 (51), 667—692.
39. Меньшов Д. Е. Sur les multiplicateurs de convergence pour les séries de polynômes orthogonaux. «Матем. сб.», 1939, 6(48), 27—52.
40. Меньшов Д. Е. О частных суммах тригонометрических рядов. «Матем. сб»., 1947, 20 (62), 197—236.
41. Недер Л. (Neder L.). Zur Theorie der trigonometrischen Reihen. Math. Ann., 1921, 84, 117—136.
42. Плеснер А. И. Zur Theorie der Konjugierten trigonometrischen Reihen. Mitteil. d. Math. Sem. d. Univ. Giessen, 1923, 10, 1—36.
43. Плеснер А. И. Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen. J. v. reine und ang. Math., 1925, 155, 15—25.
44. Плеснер А. И. О сопряженных тригонометрических рядах. Докл. АН СССР, 1925, 4, 235—238.
45. Привалов И. И. Интеграл Коши. Изв. Саратовского ун-та, физ.-мат. фак. № 1, 1918.
46. Райхман А. (Rajchman A.). Sur le principe de localisation de Riemann. C. R. de la Soc. Scient. de Varsovie, 1918, 11, 115—122.
47. Сакс С. Теория интеграла. ИЛ, М., 1949, 1—494.
48. Степанов В. В. Sur une propriété caractéristique des fonctions mesurables. Матем. сб.», 1924, 31, 487—489.
49. Стечкин С. Б. О сходимости и расходимости тригонометрических рядов. Успехи математич. наук, 1951, 6, вып. 2 (42), 148—149.
50. Толстов Г. П. Sur la dérivée approximative éxacte. «Матем. сб.», 1938, 4 (46), 499—504.
51. Толстов Г. П. Асимптотическая производная сложной функции. «Матем. сб.», 1950, 27 (69), 325—332.

52. Тонелли Л. (Tonelli L.). Sulla nozione di integrale. Annali di Matem., Ser. IV, 1924, 1, 105—145.
53. Хинчин А. Я. Sur une extension de l'intégrale de M. Denjoy. C. R. Acad. Sc., 1916, 162, 287—291.
54. Хинчин А. Я. Исследование о строении измеримых функций. «Матем. сб.», 1924, 31, 265—285 и 377—433.
55. Штейнгауз С. (Steinhaus S.). Sur une série trigonométrique divergente. C. R. de la Soc. Scient. de Varsovie, 1912.
56. Штейнгауз С. (Steinhaus S.). Sur un problème de M. M. Lusin et Sierpinski. Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie, 1913.

Л. Н. Сретенский

ЗАМЕЧАНИЯ К ПОСМЕРТНОЙ РАБОТЕ Н. Н. ЛУЗИНА ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ГЛАВНОМ ОСНОВАНИИ *

§ 1. Задача об изгибании на главном основании состоит в определении такого непрерывного изгибания поверхности, при котором некоторая сопряженная сеть кривых этой поверхности остается сопряженной во все время процесса изгибания. Эта сеть кривых носит название «главного основания поверхности».

Теория изгибания поверхностей на главном основании была предложена в середине прошлого века в трудах К. М. Петерсона, посвященных общему вопросу о соответствии между поверхностями. К. М. Петерсон установил общие свойства поверхностей, изгибающихся на главном основании, и дал ряд интересных примеров непрерывного изгибания поверхностей с сохранением сопряженных сетей. В дальнейшем это число отдельных примеров было увеличено работами ряда геометров.

В последующих исследованиях задача об изгибании поверхностей на главном основании получила широкое развитие и при этом выяснилось, что новое понятие теории изгибания поверхностей, введенное К. М. Петерсоном, тесно связано со многими вопросами теории поверхностей и теории конгруенций. В силу этого задача об изгибании поверхностей на главном основании сделалась одной из центральных задач дифференциальной геометрии.

Новое направление в исследовании задачи изгибания поверхностей на главном основании открылось работами С. С. Бюшгенса и С. П. Финикова.

В этих работах были поставлены в общем виде и частью разрешены следующие два вопроса:

1) Указать на данной поверхности все ее главные основания.

2) Найти все поверхности с данным линейным элементом, обладающие главным основанием.

Предположим, что на некоторой поверхности, обладающей линейным

---

* Журнал «Успехи математич. наук», 1953, 8, вып. 2 (54), 75—82.

элементом

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

какая-то сопряженная сеть является главным основанием. С. С. Бюшгенс и С. П. Фиников предполагают, что эта сеть изображается двумя дифференциальными уравнениями первого порядка:

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u,\ v);\ \frac{dv}{du} = \psi(u,\ v). \tag{1}$$

Содержание задачи об изгибании поверхности на главном основании приводит, по уравнениям Гаусса и Петерсона, к системе трех уравнений в частных производных второго порядка на две неизвестные функции φ и ψ.

В обозначениях С. П. Финикова эти уравнения записываются так:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial M_1}{\partial u} + NP_1 - N_1P = 0\,, \\ &\frac{\partial N}{\partial v} - \frac{\partial N_1}{\partial u} + MP_1 - M_1P = 0, \\ &\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial P_1}{\partial u} + MN_1 - M_1N = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Здесь величины M, N, ..., P_1 определяются через функции φ и ψ и коэффициенты линейного элемента. Приводим значение функции N, как самой простой по виду:

$$N = \frac{\partial \ln\varphi}{\partial u}\frac{2\varphi\psi}{(\varphi-\psi)^2} - \frac{\partial \ln\psi}{\partial u}\frac{2\varphi\psi}{(\varphi-\psi)^2} + \frac{\partial \ln\varphi}{\partial v}\frac{2\psi}{(\varphi-\psi)^2} - \frac{2\ln\psi}{\partial v}\frac{2\varphi}{(\varphi-\psi)^2} -$$
$$-4\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{1}{\varphi-\psi} + 2\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{1}{\varphi-\psi} - 2\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\varphi\psi}{\varphi-\psi} - 2\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\varphi+\psi}{(\varphi-\psi)\varphi\psi}\,.$$

Таким образом, задача об определении главного основания поверхности привелась к исследованию условий совместности трех дифференциальных уравнений второго порядка с двумя неизвестными функциями φ и ψ.

Если решается первая из поставленных выше задач, то одно из уравнений системы (2) будет являться следствием двух других уравнений. Интегрируя эти уравнения, мы найдем, в случае их совместности, все главные основания данной поверхности.

Для решения второй задачи надо интегрировать три уравнения (2); если эти уравнения будут совместны, то поверхности, обладающие главным основанием и принадлежащие к рассматриваемому линейному элементу, найдутся по шести коэффициентам двух квадратичных форм.

Исследованию системы уравнений в частных производных, накладываемых на функции φ и ψ, и посвящены работы Н. Н. Лузина.

§ 2. По исследованию уравнений изгибания поверхностей на главном основании Н. Н. Лузиным опубликовано всего пять работ.

Мы имеем в виду коротко напомнить главные результаты этих работ и подвести читателя к пониманию последней, незаконченной и неопубликованной работы, в которой содержится много материала для окончательного решения задачи об установлении необходимых и достаточных условий для существования главных оснований у данной поверхности.

В первой из своих работ Н. Н. Лузин указывает задачи, которыми он предполагает заниматься в дальнейшем; эти задачи такие:

1) узнать, существует ли аналитическая или алгебраическая поверхность S, не имеющая главных оснований;

2) узнать, существует ли аналитическая поверхность S, не имеющая главного основания, так же как и все аналитические поверхности S', наложимые на S;

3) узнать, существует ли аналитическая поверхность S, имеющая главное основание, так же как и все аналитические поверхности S', наложимые на S.

Первые две задачи получили в опубликованных работах Н. Н. Лузина утвердительный ответ в виде следующих теорем.

Теорема 1. *Можно найти такие три многочлена* $P(u, v)$, $Q(u, v)$, $R(u, v)$ *от переменных* u, v, *что алгебраическая поверхность* S, *определенная тремя уравнениями* $x = P(u, v)$, $y = Q(u, v)$, $z = R(u, v)$, *будет поверхностью без главного основания.*

Теорема 2. *Для любых заданных функций* $F(u, v)$ *и* $G(u, v)$ *двух независимых переменных* u, v *можно всегда отыскать такой многочлен* $E(u, v)$ *от букв* u, v, *с целыми коэффициентами, что всякая аналитическая поверхность* S, *имеющая форму* $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ *своим линейным элементом, будет поверхностью, лишенной главного основания.*

Третья задача получила отрицательный ответ благодаря следующей теореме.

Теорема 3. *Для всякой данной аналитической не развертывающейся поверхности* S *имеется бесконечность, зависящая от двух произвольных функций одного переменного, аналитических поверхностей* S', *наложимых на* S *и не имеющих никакого главного основания.*

Разрешив эти коренные вопросы теории изгибания на главном основании, Н. Н. Лузин обращается к рассмотрению двух задач.

1. Общая проблема. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы данный линейный элемент $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ обладал поверхностями с главным основанием.

2. Ограниченная проблема. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы данная поверхность $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$ имела главное основание.

Решению второй из этих задач и посвящено неопубликованное исследование Н. Н. Лузина*.

§ 3. Уравнения (2), определяющие главные основания, Н. Н. Лузин берет в новой, преобразованной им форме. В основу записи своих уравнений он кладет оператор $\Delta_f z$, определяемый так:

$$\Delta_f z = \frac{\partial z}{\partial v} + f\frac{\partial z}{\partial u}.$$

* См. статью «О регулярном решении задачи изгибания поверхности на главном основании», публикуемую в этом томе.

Этот оператор обладает следующими свойствами:

$$\Delta_f(z_1+z_2)=\Delta_f z_1+\Delta_f z_2;\quad \Delta_f \ln z=\frac{\Delta_f z}{z};$$
$$\Delta_f(z_1z_2)=\Delta_f z_1\cdot z_2+z_1\Delta_f z_2;$$
$$\Delta_g\Delta_f z-\Delta_f\Delta_g z=\frac{\Delta_g f-\Delta_f g}{g-f}\cdot(\Delta_g z-\Delta_f z).$$

Положим:

$$p(z)=\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}+2z\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+z^2\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix},\quad q(z)=\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+2z\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+z^2\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}.$$

Тогда уравнения Лузина, определяющие главные основания, запишутся так:

$$\Phi_0\equiv\Delta_\rho\ln\left\{\frac{\Delta_\tau\varphi-\begin{vmatrix}p(\varphi)&1\\q(\varphi)&\varphi\end{vmatrix}}{K}\right\}+\frac{3\Delta_\varphi\varphi-\Delta_\psi\varphi-2\begin{vmatrix}p(\varphi)&1\\q(\varphi)&\psi\end{vmatrix}}{\psi-\varphi}=0;$$

$$\Phi_1\equiv\Delta_\rho\left\{\Delta_\psi\ln\sqrt{K}+\frac{\Delta_\psi\varphi-\Delta_\varphi\psi}{\psi-\varphi}+\frac{\Delta_\psi\psi-\begin{vmatrix}p(\varphi)&1\\q(\psi)&\varphi\end{vmatrix}}{\psi-\varphi}\right\}+$$
$$+\frac{\Delta_\psi\varphi-\Delta_\varphi\psi}{\psi-\varphi}\left\{\Delta_\psi\ln\sqrt{K}+\frac{\Delta_\psi\varphi-\Delta_\varphi\psi}{\psi-\varphi}+\frac{\Delta_\psi\psi-\begin{vmatrix}p(\psi)&1\\q(\psi)&\varphi\end{vmatrix}}{\psi-\varphi}\right\}+$$
$$+\Delta_\psi\left\{\Delta_\varphi\ln\sqrt{K}+\frac{\Delta_\psi\varphi-\Delta_\varphi\psi}{\psi-\varphi}-\frac{\Delta_\varphi\varphi-\begin{vmatrix}p(\varphi)&1\\q(\varphi)&\psi\end{vmatrix}}{\psi-\varphi}\right\}+$$
$$+\frac{\Delta_\psi\varphi-\Delta_\varphi\psi}{\psi-\varphi}\left\{\Delta_\varphi\ln\sqrt{K}+\frac{\Delta_\psi\varphi-\Delta_\varphi\psi}{\psi-\varphi}-\frac{\Delta_\varphi\varphi-\begin{vmatrix}p(\varphi)&1\\q(\varphi)&\psi\end{vmatrix}}{\psi-\varphi}\right\}+$$
$$+2\,\frac{\Delta_\varphi\varphi-\begin{vmatrix}p(\varphi)&1\\q(\varphi)&\varphi\end{vmatrix}}{\psi-\varphi}\cdot 2\,\frac{\Delta_\psi\psi-\begin{vmatrix}p(\psi)&1\\q(\psi)&\psi\end{vmatrix}}{\psi-\varphi}=0;$$

$$\Phi_2\equiv\Delta_\psi\ln\left\{\frac{\Delta_\psi\psi-\begin{vmatrix}p(\psi)&1\\q(\psi)&\psi\end{vmatrix}}{K}\right\}-\frac{3\Delta_\psi\psi-\Delta_\varphi\psi-2\begin{vmatrix}p(\psi)&1\\q(\psi)&\varphi\end{vmatrix}}{\psi-\varphi}=0.$$

Здесь K есть полная кривизна линейного элемента

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2.$$

Задача об определении поверхностей, изгибающихся на главном основании и принадлежащих данному линейному элементу, приводится к установлению условий совместности системы уравнений

$$\Phi_0=0;\quad \Phi_1=0,\quad \Phi_2=0. \tag{3}$$

Несмотря на сложность этой системы, Н. Н. Лузин смог дать в опубликованных работах общее заключение о форме этих условий и о степени общности получаемых решений.

Применяя общую теорию совместности систем уравнений в частных производных, разработанную в трудах Рикье и Жане, Н. Н. Лузин показал, что самое общее решение системы уравнений (3) не может содержать больше чем 12 произвольных постоянных. Отсюда выводится, что любой линейный элемент ds^2 имеет многообразие главных оснований степени произвола не выше ∞^{12}.

Затем Н. Н. Лузин устанавливает теорему:

Необходимое и достаточное условие для существования главного основания у линейного элемента ds^2 состоит в одновременном удовлетворении конечного числа соотношений:

$$P_1\left(E,\ F,\ G,\ \frac{\partial E}{\partial u},\ \ldots\right) = 0,\ P_2 = 0,\ \ldots,\ P_\nu = 0,$$

где всякое P_i есть многочлен от E, F, G и их частных производных, имеющий коэффициентами целые числа.

Эти результаты относятся к «общей проблеме». Более законченные и определенные результаты были получены Н. Н. Лузиным для «ограниченной проблемы», состоящей в определении необходимых и достаточных условий для того, чтобы данная поверхность допускала главное основание.

Для ограниченной задачи система уравнений (3) сводится к системе двух уравнений; это вытекает из самой постановки ограниченной задачи и из тех уравнений, к которым приводится эта задача. За эти два независимых уравнения можно принять $\Phi_0 = 0$, $\Phi_2 = 0$; к этим двум уравнениям надо присоединить еще уравнение

$$\delta\varphi\psi + \delta'(\varphi + \psi) + \delta'' = 0,$$

объясняющее смысл функций φ и ψ. Все вычисления значительно упрощаются, если рассматриваемая поверхность отнесена к асимптотическим линиям. В этом случае предыдущее уравнение принимает вид: $\varphi + \psi = 0$, и из системы уравнений $\Phi_0 = 0$, $\Phi_2 = 0$ возможно исключить функцию ψ; таким путем задача об определении главных оснований данной поверхности приводится к рассмотрению двух уравнений в частных производных второго порядка с одной функцией φ:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0 &\equiv \varphi^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + 2\varphi \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} - H_1 = 0\,, \\ \Phi_2 &\equiv \varphi^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - 2\varphi \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} - H_2 = 0\,; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

H_1 и H_2 суть рациональные функции от

$$E,\ F,\ G,\ \frac{\partial E}{\partial u},\ \ldots;\ \varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial u},\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

Эти функции суть многочлены второй степени от частных производных

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u},\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

Систематическое применение к системе (4) метода Рикье — Жанэ привело Н. Н. Лузина к заключению, что коэффициенты E, F, G первой квадратичной формы должны удовлетворять двум соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} R_1\left(E,\ F,\ G,\ \frac{\partial E}{\partial u},\ \ldots\right) = 0\,, \\ R_2\left(E,\ F,\ G,\ \frac{\partial E}{\partial u},\ \ldots\right) = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

дабы на рассматриваемой поверхности были главные основания.

Как замечает Н. Н. Лузин, полученные им результаты имеют предварительный характер, и целью исследования было показать тот интерес, который представляет применение общей теории совместности уравнений в частных производных к уравнениям изгибания поверхности на главном основании.

В опубликованных работах уравнения совместности (5) не были получены Н. Н. Лузиным в явном виде, и целью его последней работы было составление этих уравнений в законченной форме.

§ 4. Уравнения $\Phi_0 = 0$, $\Phi_2 = 0$ переписываются Н. Н. Лузиным в новом виде путем выполнения ряда преобразований; мы имеем основные уравнения изгибания представленными так:

$$\left.\begin{aligned} (\Delta_\varphi\Delta_\varphi) &= \frac{1}{2}\Delta_\varphi(\Delta_\varphi - \Delta_\psi) + R_1(\varphi)\Delta_\varphi + R_2(\varphi)\Delta_\psi + R_3(\varphi); \\ (\Delta_\psi\Delta_\psi) &= \frac{1}{2}\Delta_\psi(\Delta_\psi - \Delta_\varphi) + R_1(\psi)\Delta_\psi + R_2(\psi)\Delta_\varphi + R_3(\psi). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Здесь

$$(\Delta_\varphi\Delta_\varphi) = \Delta_\varphi\Delta_\varphi \ln \varphi$$

и

$$R_1(\zeta) = \frac{P_2(\zeta) - \frac{1}{2}P_3(\zeta)}{\zeta}; \quad R_2(\zeta) = -\frac{\frac{1}{2}P_3(\zeta)}{\zeta}; \quad R_3(\zeta) = \frac{P_6(\zeta)}{\zeta^2}.$$

Функции $P_2(\zeta)$, $P_3(\zeta)$ и $P_6(\zeta)$ суть многочлены степеней 2, 3 и 6 от буквы ζ с коэффициентами, являющимися определенными функциями букв E, F и G и их частных производных по буквам u и v.

Задача об установлении условий совместности уравнений (6), к которым должно быть присоединено уравнение $\varphi + \psi = 0$, может быть решена систематическим применением правил теории Рикье — Жанэ. Общие заключения, вытекающие из условий совместности уравнений изгибания, и были получены, как мы указывали выше, с помощью правил этой теории.

Изучая уравнения изгибания, Н. Н. Лузин пришел к заключению, что указанные условия целесообразно получить не применением условий совместности систем уравнений в частных производных, а путем предварительного построения новой теории совместности уравнений в операторах $\Delta_f z$; эти операторы заменяют частные производные функции z.

В бумагах Н. Н. Лузина содержится несколько вариантов построения теории совместности уравнений в операторах $\Delta_f z$, развитой в применении к уравнениям изгибания.

В настоящем томе публикуется последний, по времени написания, вариант этой теории (начат 15 января 1950 г. и прерван смертью). Этот вариант, наиболее простой и законченный, содержит необходимый минимум формул и вычислений, нужных для решения задачи. Другие, начальные варианты работы заключают много формул, не находящих непосредственного применения при решении задачи изгибания, и содержат, по существу дела, поиски наиболее простого ответа на поставленную задачу.

Общий объем всей рукописи, содержащей различные варианты, около 350 страниц формул.

Наибольшую часть этой рукописи занимает установление некоторых тождеств дифференциального исчисления, названных Н. Н. Лузиным «резольвентами». Эти резольвенты представляют собой, в области операторов $\Delta_f z$, обобщение известного тождества:

$$\frac{\partial^{i+j} z}{\partial u^i \partial v^j} - \frac{\partial^{j+i} z}{\partial v^j \partial u^i} = 0,$$

широко используемого в теории совместности систем уравнений в частных производных.

Значение резольвент заключается в том, что они дают возможность представить разность двух операторов одного и того же порядка, симметрично составленных из функций φ и ψ, через операторы более низкого порядка.

Н. Н. Лузин нашел разнообразные резольвенты 2, 3 и 4-го порядков, но в последнем варианте работы он использовал лишь четыре резольвенты: основную резольвенту (4-го порядка), первую и вторую резольвенту (3-го порядка) и финальную резольвенту (2-го порядка).

Во всей рукописи Н. Н. Лузина последний вариант работы содержит 66 страниц формул с небольшими словесными пояснениями хода вычислений; общий план исследования приведен в статье Н. Н. Лузина. Мы воспроизводим в публикуемой статье не все вычисления Н. Н. Лузина, а лишь их главные этапы; вычисления, содержащие выполнения простых алгебраических действий, нами опущены. В таком сокращенном виде публикуемая работа Н. Н. Лузина даст возможность с большой простотой, как нам кажется, понять ход мысли автора и осуществление поставленной им цели.

ЛИТЕРАТУРА

Н. Н. Лузин. О существовании алгебраических поверхностей, не имеющих главного основания. I, II. Докл. АН СССР, 1938, 19, № 1, 2; то же, III и IV. Докл. АН СССР, 1938, 19, № 4. Доказательство одной теоремы теории изгибания. Изв. АН СССР, ОТН, 1939, № 2, 7, 10.

С. П. Фиников. Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи. ОНТИ, 1937.

С. С. Бюшгенс. Изгибание на главном основании. М., 1918.

Н. К. Бари и В. В. Голубев

БИОГРАФИЯ Н. Н. ЛУЗИНА *

Николай Николаевич Лузин родился 9 декабря (27 ноября) 1883 года в Сибири в г. Томске. Дед Николая Николаевича по отцу был крепостным крестьянином графа Строганова, отец, Николай Митрофанович Лузин, родом из села Сепыч Томской губернии, был торговым служащим; мать, Ольга Николаевна Лузина, вела происхождение от забайкальских бурят. Ольга Николаевна была женщина болезненная, что отразилось и на здоровье сына.

«Начальное образование Н. Н. Лузин получил в частной школе г. Томска, по окончании которой он был принят в Томскую губернскую гимназию еще до положенного возраста: ему едва минуло 8 лет. Среднее образование получил в гимназии г. Иркутска, куда отец Н. Н. Лузина уезжал на один год по делам службы, и затем снова в Томской гимназии». «Любимым чтением Н. Н. Лузина в эти годы были натуралисты и из романистов Жюль-Верн, влияние которого на интересы своего ума Н. Н. Лузин считал значительным. В старших классах гимназии Н. Н. Лузин читал очень много и в самых разнообразных направлениях; книги по чистой философии увлекали его, давая воображению обильную пищу. Но математику до самых последних лет гимназии Н. Н. Лузин недолюбливал и боялся, так как царившая тогда всюду система преподавания ее была построена более на механической памяти: нужно было безукоризненно заучивать наизусть формулировки теорем и в точности памятью воспроизводить доказательства, по возможности не отступая от текста книги («Геометрия» Давидова, «Алгебра» Киселева). Для Н. Н. Лузина это было трудно переносимой мукой, так как механической памятью он совершенно не обладал; по этой же причине для него были закрыты история, география и языки, требовавшие запоминания времени, места и форм. Его занятия по математике шли в гимназии хуже и хуже, так что он утратил репутацию хорошего ученика и отец вынужден был взять для него «репетитора». К счастью, это был весьма талантливый

* При составлении этой биографии была использована автобиография Н. Н. Лузина, охватывающая период его жизни до 1930 г. (в настоящее время эта автобиография находится в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР). Взятые из нее отрывки мы приводим в кавычках.

студент только что тогда открывшегося в г. Томске Политехнического института; он произвел на Н. Н. Лузина сильнейшее впечатление тем, что показал ему математику не как систему механического заучивания, а как систему рассуждений, направляемую живым воображением. С тех пор он до некоторой степени утратил неприязнь к математике, перерешал самостоятельно все имевшиеся тогда задачники по элементарной математике и, естественно, в этом отношении стал в гимназии на первое место.

Из учителей Томской гимназии Н. Н. Лузин с теплым чувством вспоминал многих, особенно словесника П. М. Вяткина, «грека» К. А. Лалетина и математика В. К. Бобова, которые сердечно относились к молодежи. Из товарищей по гимназии Николай Николаевич был дружен с С. А. Вознесенским и Г. А. Бухвостовым, которые также увлекались естествознанием, особенно химией, астрономией и физикой, бывшей любимой наукой Н. Н. Лузина.

Н. Н. Лузин обладал очень слабым здоровьем, и поэтому его почти все время переводили из класса в класс по хорошим отметкам без экзамена. По личному признанию Николая Николаевича, это для него имело в дальнейшем самые плохие последствия, так как только при подготовке к серьезному испытанию можно научиться как следует работать, развить полную работоспособность, каковую средняя школа не смогла ему дать, щадя его слабое здоровье. Гимназию Н. Н. Лузин окончил в 1901 г. и в том же году поступил на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета. Выбор этот был обусловлен желанием Николая Николаевича со временем сделаться инженером, для чего он хотел сперва заложить солидный математический фундамент, так как побаивался математики».

Московский университет переживал в эти годы период перелома. Если в 80 и 90-х годах даже такие передовые профессора, как знаменитый русский физик А. Г. Столетов, считали, что идеалом университетского преподавания является прочное и основательное усвоение утвержденных программ, если молодой и талантливый С. А. Чаплыгин ушел в середине 90-х годов из университета потому, что там нечего было читать, так как все обязательные курсы разобраны, то как раз к началу 900-х годов начала все более и более проявляться совершенно другая тенденция: идеалом университетского преподавания стало вовлечение студентов в исследовательскую, научную работу. Как раз к этим годам относится зарождение знаменитой лаборатории П. Н. Лебедева, которая через десять лет превратилась во всероссийский признанный центр физической науки, а школа Лебедева дала десятки первоклассных физиков.

Те же тенденции, пока еще в робкой форме, проявились и у математиков. Как раз к первым годам текущего столетия относится начало чтения блестящим лектором, живым и красноречивым Б. К. Млодзеевским факультативного курса по теории функций действительного переменного, по известному трактату Дини. В Московском университете впервые на лекциях Млодзеевского прозвучали такие термины, как «множества», «мощность», «счетные» (тогда говорили «счетовые») множества и т. д. Еще через год, в 1902 г., в число приват-доцентов вступил И. И. Жегалкин, и обо всех этих вещах вместе с «дедекиндовыми сечениями» услыхали уже не специалисты-математики, а все студенты-первокурсники математического отделения.

«В Московском университете Н. Н. Лузин сразу же попал под влияние блестящей плеяды профессоров, из которых прежде всего нужно указать геометров Б. К. Млодзеевского и К. А. Андреева, аналитика Н. В. Бугаева и физика Н. А. Умова.

Н. Н. Лузин сделал сначала попытку стать физиком, но в физической лаборатории Н. А. Умова тогда нехватило мест. Тем временем блестящие лекции по чистой математике стали производить на Н. Н. Лузина чарующее впечатление, и математика уже в первые же полгода ему внезапно открылась с совсем другой стороны, представ не как система заучивания сложившихся истин и решения бесчисленных задач с давно уже известными ответами, но как необъятное поле живого творчества. Николай Николаевич всегда сравнивал положение ученого, ведущего творческую жизнь, с состоянием Колумба, отправившегося искать новые страны и могущего каждый момент сделать крупное открытие. Пред ним математика открылась не как законченная наука, а как наука творческая, с далями, полными заманчивой тайны».

В Московском университете Н. Н. Лузин как одаренный студент сразу же обратил на себя внимание профессоров. Он, будучи еще студентом младших курсов, был избран секретарем студенческого Математического кружка, председателем которого был знаменитый механик Н. Е. Жуковский. В этом кружке разрабатывались вопросы, представлявшие в то время особую научную актуальность. Н. Н. Лузин и его университетский товарищ С. С. Бюшгенс были активными участниками этого кружка; у них преобладали в докладах вопросы обоснования математики, вопросы теории множеств, вопросы арифметизации математики, которые тогда привлекали внимание математиков, и начинавшие вызывать интерес вопросы аксиоматики. На заседания кружка часто приходили профессора Б. К. Млодзеевский, Д. Ф. Егоров и только что вступивший в число приват-доцентов И. И. Жегалкин. Б. К. Млодзеевский огорчался тем, что студенты в кружке вместо изучения вопросов теории уравнений с частными производными, дифференциальной геометрии и т. п. остановились на самых основных понятиях анализа и не идут дальше.

Теория функций тогда едва только начала проникать в Московский университет в виде отдельных докладов приват-доцентов, вызывая у одних глубокое изумление перед новизной идеи (учение об актуальной бесконечности), у других — чувство отвращения перед кажущимися экстравагантностями мышления.

В весеннем полугодии 1905 г., в связи с ростом революционного движения, университет забастовал; занятия прекратились. Революционные выступления рабочих и крестьян, восстания в армии и флоте, скандальные военные поражения царского правительства все более и более накаляли общественную атмосферу. Ни в какой мере не разрядили ее и половинчатые реформы правительства: булыгинская дума осени 1905 г. Университет шумел, как улей; занятия осенью 1905 г. то начинались, то прекращались. Аудитории превратились в место сходок и массовой агитации.

В первые годы университетской учебы Н. Н. Лузин снимал номер в гостинице «Кокоревское подворье», там же, где жили и его родители. Теперь же, увлеченный бурным потоком общественного подъема, он тоже пытается принимать некоторое участие в революционном движении. В таких условиях проживание у всех на виду, в большой гостинице, было явно неудобным, и по рекомендации кого-то из товарищей Н. Н. Лузин снял комнату на Арбате, в семье вдовы врача Малыгина. Семья состояла из старушки-вдовы Малыгиной и ее дочери Надежды Михайловны. Дом был тихий, внимание полиции не привлекал, и в бурные дни октября 1905 г. перед появлением виттевского манифеста «17-го октября» в комнате Н. Н. Лузина не только ночевали нелегальные лица, но под его кроватью одно время был даже склад бомб...

Как известно, манифест «17-го октября» не только не разрядил обстановку, но усилил общее недовольство. Университет, возобновивший работу с осени 1905 г., опять забастовал. В стране нарастало революционное движение и было совершенно ясно, что ожидать возобновления занятий в университете в ближайшие месяцы не приходится.

В этот период Н. Н. Лузин не прерывал занятий под руководством профессора Д. Ф. Егорова, проявлявшего большое внимание к его научной работе. При создавшейся обстановке Д. Ф. Егоров посоветовал Н. Н. Лузину поехать учиться в один из заграничных университетов; Д. Ф. Егорову удалось найти другого студента, который бывал за границей и немного владел французским и немецким разговорными языками[1], и в первых числах декабря Н. Н. Лузин и его спутник уехали в Париж.

В Париже Н. Н. Лузин пробыл до конца летнего семестра 1906 г., и все эти полгода пребывания за границей прошли в упорной и систематической работе. Лекций он слушал немного. В Сорбонне он слушал Бореля, который читал теорию целых функций, лекции знаменитого Пуанкаре по разложениям в ряды пертурбационных функций небесной механики. По словам Н. Н. Лузина, лекции Пуанкаре производили на него потрясающее впечатление вследствие живого творчества во время самого процесса лекций. Кроме того, в Collège de France Н. Н. Лузин слушал Адамара, который читал теорию распространения волн. Иногда ходил на лекции Дарбу по теории поверхностей. Но он упорнейшим образом работал над изучением математической литературы в библиотеке Сорбонны, в Национальной библиотеке и в библиотеке Св. Женевьевы.

[1] В. В. Голубев.

Изучению научных вопросов посвящалось буквально все время. В размышлениях над научными вопросами Н. Н. Лузин просиживал целые ночи; часто поздно восходящее зимнее солнце заставало его еще за работою.

Несомненно, что в это время у Н. Н. Лузина зрели те идеи, которые много спустя приобрели законченную форму в его замечательной диссертации. Вопросы теории множеств, теории функций действительного переменного занимали во всей этой работе основное место.

Жил он в это время очень скромно. Обедал в русской студенческой столовой на rue St. Jaques, на обед полагалось 40 сантимов.

В театры не ходил — было не по средствам. Единственным развлечением было посещение по праздникам замечательных парижских музеев, картинных галерей Лувра и музея современной живописи и скульптуры Франции в Люксембургском дворце. Только изредка он позволял себе под праздник пойти в «танцульку», и за 20 сантимов полюбоваться, как пляшут и веселятся французские студенты и прочее население Латинского квартала.

Н. Н. Лузин вернулся в Россию летом 1906 г. В конце того же года он сдал государственный экзамен и был оставлен Д. Ф. Егоровым при университете «для приготовления к профессорскому званию».

В 1907 г. Н. Н. Лузин женился на Надежде Михайловне Малыгиной.

За время обучения в университете Н. Н. Лузиным было прочитано и изучено много труднейших и глубоких трактатов по самым различным областям математики, так что он был хорошо подготовлен к магистерским экзаменам еще на студенческой скамье. «Время же оставления при университете он употребил на слушание лекций на медицинском факультете, куда намеревался поступить, чтобы впоследствии итти в народ, но потом был вынужден оставить этот план, так как работа в анатомическом театре оказалась ему не по силам. Тогда он перешел к слушанию лекций на философском отделении историко-филологического факультета, который через год оставил, потому что лекции по философии не давали указания на возможность творчества».

После этого Н. Н. Лузин вернулся к математике. К 1909 г. он сдал так называемые магистерские экзамены и получил существовавшее тогда звание «магистранта» вместе с правом преподавания в высшей школе по прочтении двух пробных лекций, одной по собственному выбору, второй по назначению факультета. Н. Н. Лузин прочел пробные лекции и предполагал с осени 1910 г. читать в университете курс теории функций действительного переменного, но оказалось, что такой курс уже был объявлен С. С. Бюшгенсом, который держал экзамены одновременно с Н. Н. Лузиным; тогда по совету Б. К. Млодзеевского Н. Н. Лузин объявил курс по теории интегральных уравнений. Читать этот курс ему не пришлось, так как в это время он получил от факультета заграничную командировку в Геттинген и Париж для усовершенствования в математических науках.

Осенью 1910 г. Н. Н. Лузин уехал в Геттинген.

В Геттингене Николай Николаевич работал, «отдаваясь главным образом самостоятельным изысканиям в теории тригонометрических рядов; к этому его влекли многие загадочные факты этой теории и богатейшие средства библиотеки Геттингена, дававшие ему неисчерпаемую возможность легко изучить всевозможные вопросы». Лекции профессоров он мало посещал, так как при его крайне самостоятельном мышлении они ему ничего не могли дать. Напротив, личное общение с учеными давало ему очень много, так как при этом выявлялось отношение того или другого ученого к различным математическим проблемам и выяснялся его творческий путь. Эти встречи Николай Николаевич ценил чрезвычайно высоко. «В Геттингене Н. Н. Лузин написал и по настоянию профессора Ландау опубликовал свою первую работу (в 1911 г., т. е. 28-ми лет). До сих пор он, не будучи уверен в своих силах, остерегался выступать в печати и отказался, по этой же причине, писать сочинение на медаль на предложенную тему в Москве. В 1912 г. Н. Н. Лузин переехал в Париж». Здесь он систематически работал в семинаре Адамара и завел личное знакомство с крупнейшими математиками (Пикар, Адамар, Борель, Лебег, Данжуа и др.).

Яркое представление о научных интересах Н. Н. Лузина в те годы дает следующий отрывок из отчета, представленного им в Министерство народного просвещения:

«Пробыв в заграничной командировке для научных занятий два года и получив продолжение этой командировки на третий год, сроком с 1 января 1913 по 1 января 1914 г., я в марте 1913 г. отправился в Париж к началу весеннего семестра для продолжения научных занятий.

Из лекций, прослушанных мною в этом семестре, наиболее интересными лично для меня были лекции Пикара, читавшего избранные главы из теории функций комплексного переменного. В них лектор, между прочим, изложил конформное изображение многосвязных областей, дав при этом результат А. Пуанкаре и указав на позднейшие результаты по этому вопросу.

Следующий зимний семестр 1913 г. и весенний семестр 1914 г. я также провел в Париже, слушал лекции профессора Бохера, приглашенного в Сорбонну из Америки и читавшего о новых исследованиях в теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, лекции Э. Пикара, продолжавшего излагать избранные главы из теории функций комплексного переменного и давшего некоторые интересные теоремы относительно аналитических функций двух независимых комплексных переменных, и лекции Бореля относительно обобщения понятия аналитической функции. Наиболее интересными лично для меня были лекции Бореля, в которых лектор дал новое, обобщенное определение понятия аналитической функции и в ярких и выпуклых чертах обрисовал недостатки классического определения Вейерштрасса аналитической функции, указав на известный формализм последнего.

Кроме того, посещал семинар, устроенный Адамаром в Collège de France, и заседания двух конгрессов: математически-педагогического и математически-философского, открывшихся в Париже весной.

Вместе с тем я продолжал свою личную работу в области теории функций действительного переменного».

Приведенные далее сведения о полученных Н. Н. Лузиным научных результатах заслужили самую высокую оценку в следующем заявлении профессора Д. Ф. Егорова:

«Представляя при сем отчет о заграничной командировке приват-доцента И. М. У. Н. Н. Лузина, честь имею сообщить факультету, что по моему мнению отчет этот свидетельствует о факте, который известен и из других источников, а именно, что в лице Н. Н. Лузина мы имеем уже сложившегося талантливого ученого, получившего много важных и интересных результатов по теории интегрирования, теории тригонометрических рядов, теории функций действительного переменного...

Из отчета видно, что у Н. Н. Лузина в сущности вполне готов материал и для работ, которые могли бы послужить для получения научных степеней магистра и доктора, и только увлечение новыми и новыми результатами помешало ему до сих пор написать в окончательном виде диссертацию, которую, можно надеяться, он представит в ближайшем будущем.

Среди результатов, упоминаемых автором в отчете, мое внимание останавливает последний (заметка в Comptes Rendus «Sur un problème de M. Baire»). Мне думается, что на этом пути Н. Н. Лузин внесет что-либо новое и интересное в фундаментальную задачу о мощности континуума.

Я бы полагал признать отчет и занятия Н. Н. Лузина заслуживающими самой высокой оценки.

26.II 1914 г. Орд. проф. Д. Ф. Егоров».

Статьи, напечатанные Н. Н. Лузиным уже в этот первый период его научного творчества, ярко свидетельствуют и об исключительной самостоятельности его научного творчества и об очень большом напряжении его работы. Здесь, несомненно, повторялось в еще более яркой форме то необычайное вдохновение, которое охватывало Н. Н. Лузина в периоды продуктивной творческой работы. В такие периоды работа захватывала его целиком; в работе он не различал ни дня, ни ночи, на него находил какой-то порыв творческой «одержимости», который заставлял его забывать обо всем, что выходило за круг овладевших им научных идей.

За эти годы Н. Н. Лузиным была проделана огромная работа и, в частности, было напечатано десять научных работ в лучших русских и заграничных научных журналах.

Напряженная работа по изучению математической литературы дала ему широкие научные знания, подробнейшее знакомство с научной литературой; упорное размышление над труднейшими вопросами теории функций дало ему материал для его замечательной диссертации.

К осени 1914 г. Н. Н. Лузин вернулся в Москву и приступил к преподаванию в университете на положении приват-доцента.

Десятилетие с 1914 по 1924 год было периодом блестящего расцвета научной и педагогической деятельности Н. Н. Лузина. Факультетом ему было поручено чтение общего курса аналитической геометрии, а затем высшей алгебры. Но не в этом был центр тяжести его работы. Из года в год неизменно читал он факультативный курс по теории функций действительного переменного и вел специальный исследовательский семинар. Именно этот читаемый из года в год специальный курс и сопровождающий его семинар и явились центром, из которого выросла московская школа теории функций — замечательный памятник славной научной деятельности Н. Н. Лузина.

Среди профессоров Московского университета едва ли можно указать кого-нибудь, чьи лекции пользовались бы таким исключительным успехом, как лекции Н. Н. Лузина. А ведь среди профессоров были такие блестящие лекторы, как Б. К. Млодзеевский, химик А. Н. Реформатский, астроном В. К. Церасский и ряд других. Естественно возникает вопрос: чем объяснить этот совершенно исключительный успех?

Установился обычай считать, что задачей лекций является систематическое изложение известного комплекса знаний. Чем этот комплекс больше, тем содержательнее лекции; чем в научном смысле строже изложение, тем выше уровень лекций. Согласно этому взгляду, задача книги или печатного курса и лекций одна и та же. Единственным активным действующим лицом является при этом лектор; аудитория только пассивно воспринимает изложенное.

В противовес такому взгляду можно заметить, что научная истина поражает своею строгою законченностью, но и отталкивает своею безжизненною сухостью. Ведь эти законченные на данном этапе развития формы научной истины исторически сложились из бесчисленных исканий, заблуждений, в результате споров, столкновений мнений; наука жила и продолжает жить полной и напряженной жизнью неустанного труда бесчисленных творцов и строителей научного здания.

А если так, то не правильнее ли ввести учащихся в самую лабораторию научных исканий, показать все возникающие трудности, заставить аудиторию пережить всю горечь ошибок и разочарований и познать всю радость нахождения научной истины? В своем преподавании Н. Н. Лузин и попытался добиться того, чтобы излагаемый материал давался не в законченном, законсервированном виде, а в напряжении его создания, как говорят, in statu nascendi. При таком подходе главным действующим лицом на лекции и на семинаре является вся аудитория: она переживает муки научного творчества, она испытывает радость победы. Лектор — это искусный кормчий, который умело направляет аудиторию.

Лекции Н. Н. Лузина были менее всего дидактичны, менее всего лектор преподносил в законченном виде тот или другой отдел науки, но он непрерывно открывал перед аудиторией все новые и новые горизонты, непрерывно будил мысль слушателей, непрерывно закалял аудиторию в преодолении трудностей, которыми так богато научное изыскание. Н. Н. Лузин не был одинок в своих методических идеях: таким же путем в несколько иной области, в области лабораторной, экспериментальной работы, шел и П. Н. Лебедев, тем же путем воспитывал учеников в своих лабораториях и Н. Е. Жуковский. Новым и совершенно оригинальным у Н. Н. Лузина было то, что этот метод он применил не только в своих семинарах, что было сравнительно понятно и легко, но и в своих лекциях, что было неизмеримо труднее.

Легко понять, какой успех могло иметь такое преподавание, в особенности если лектором был ученый, который сам находился в расцвете своего научного творчества. А как раз в этот период научное творчество Н. Н. Лузина достигло своего полного развития.

По возвращении из-за границы Н. Н. Лузин заканчивает, дополняет и приводит в систему огромный научный материал, который и составил содержание его капитального труда «Интеграл и тригонометрический ряд». Законченная в 1915 г. эта замечательная работа была представлена как диссертация на соискание ученой степени магистра чистой математики. Защита ее в Ученом совете Физико-математического факультета 27 апреля 1916 г. превратилась в блестящий научный триумф Н. Н. Лузина. В отзывах официальных оппонентов, профессоров Д. Ф. Егорова и Л. К. Лахтина, и в ряде других выступлений были отмечены совершенно исключительные достоинства работы. Совет единогласно постановил присудить Н. Н. Лузину степень доктора чистой математики, минуя обычную степень магистра, случай, чрезвычайно редкий в практике русских университетов [1].

Не меньшим напряжением научного творчества Н. Н. Лузина ознаменованы и последующие годы, причем наряду с большим количеством работ самого Николая Николаевича начинают все чаще и чаще появляться и работы его учеников.

---

[1] В архиве Московского университета имеются следующие сведения об этой защите:

«13 мая 1916 г. в Совете Университета:

Слушали представление физико-математического факультета от 13 мая: 27-го апреля в заседании факультета происходила публичная защита Н. Н. Лузиным диссертации на степень магистра чистой математики под заглавием «Интеграл и тригонометрический ряд».

Официальные оппоненты: проф. Д. Ф. Егоров и засл. проф. Л. К. Лахтин.

Защита была признана удовлетворительной и Н. Н. Лузин достойным степени доктора чистой математики.

Факультет ходатайствует об утверждении Н. Н. Лузина в степени доктора чистой математики.

Постановили на основании ст. 30, § 1, стр. 3. Устава Университета утвердить магистранта Н. Н. Лузина в степени доктора чистой математики ввиду того, что представленная им дисссертация отличается особенными научными достоинствами, и выдать ему надлежащий диплом».

Н. Н. Лузин обладал исключительным талантом вовлекать в научное творчество своих учеников. Как мы видели, самая форма преподавания носила у него такой характер, что, в сущности, вообще терялась грань между учением и научным исследованием. Но, кроме этого, он умел с исключительным успехом своим личным воздействием внушить учащимся мысль, что каждый из них не только может, но и должен сам творить науку.

Для самого Николая Николаевича наука была главным содержанием жизни, и этому же отношению к науке, как к самому главному, чему должны быть отданы все силы, он учил и своих учеников. Настойчиво внушал он, что занятие наукой есть трудное, тяжелое дело, требующее огромных усилий, большой настойчивости.

Лузин не мог работать «по часам»; научная идея полностью овладевала им, и эта «одержимость» чрезвычайно ярко сказывалась во всем его поведении. И своим ученикам он систематически внушал мысль, что научная работа может итти успешно только тогда, когда мысль непрерывно и упорно работает над научным вопросом, что научную работу нельзя вести «по часам», оставляя ее так, как снимают рабочий халат, уходя с работы. Лекции Николая Николаевича не кончались со звонком; научная беседа продолжалась и в перерыв между лекциями в коридоре, а весьма часто слушатели провожали его гурьбой по окончании лекций до его квартиры, продолжая напряженное обсуждение поднятых на лекции научных вопросов. Студенты, работавшие в семинарах у Н. Н. Лузина, и его ученики часто собирались у него на квартире для обсуждения научных докладов на семинарах, для бесед по проработанной научной литературе; образовалась дружная семья молодежи, охваченной горячим интересом к разработке научных вопросов. Это сплоченное товарищество начинающих ученых, группировавшихся вокруг Николая Николаевича, получило среди студентов шутливое название «Лузитания».

Из учеников Н. Н. Лузина, работавших под его руководством в первые годы его педагогической деятельности в Московском университете, многие выросли впоследствии в крупных ученых; среди них прежде всего надо указать М. Я. Суслина, Д. Е. Меньшова, А. Я. Хинчина, П. С. Александрова, П. С. Урысона, В. Н. Вениаминова, В. С. Федорова.

Параллельно с Н. Н. Лузиным, но под его непосредственным влиянием работали также его младшие товарищи: В. В. Степанов, И. И. Привалов, разрабатывавшие все новые и новые вопросы теории функций комплексного и действительного переменного.

Годы 1914—1918 были годами расцвета этого замечательного научного коллектива, быстро росшего под талантливым руководством Н. Н. Лузина.

Вызванная империалистической войной разруха, естественно, сказалась на работе Н. Н. Лузина, как и на всей жизни Московского университета. Затруднения с продовольствием и отсутствие топлива, резко проявившиеся в 1918 г., повели к тому, что занятия в университете свертывались, студенты разъезжались. При таких условиях значительная часть профессуры искала приложения своих сил в других городах. После Великой Октябрьской социалистической революции благодаря мероприятиям Советского правительства в стране быстро росла сеть высших учебных заведений. В самые тяжелые годы разрухи, вызванной последствиями войны и интервенции, Н. Н. Лузин с рядом других профессоров Московского университета работал профессором в Иванове, крупном текстильном центре, где в 1918 г. был открыт Политехнический институт. Вместе с Николаем Николаевичем там же работали и некоторые из его учеников.

Вместе с тем Н. Н. Лузин не прекращал работы и в университете в Москве, куда он приезжал на более или менее длительные сроки. Всякий раз весть о приезде Лузина в Москву с чрезвычайной быстротой распространялась среди его московских учеников, и по-прежнему бурлила жизнь в «Лузитании», работал семинар, чуть ли не каждый вечер в гостеприимной квартире Николая Николаевича собиралась московская математическая молодежь, шло оживленное обсуждение математических вопросов, кипела творческая научная мысль.

К этому же периоду относятся первые работы Н. Н. Лузина по прикладным вопросам. С. А. Чаплыгин привлек его к работе в Научно-экспериментальном институте путей сообщения.

Период с 1916 по 1920 г. был периодом первых триумфов школы Н. Н. Лузина. Были получены замечательные результаты Д. Е. Меньшовым, М. Я. Суслиным, П. С. Александровым, А. Я. Хинчиным. Москва становилась общепризнанным центром исследований в области теории функций. В диссертации И. И. Привалова методы теории функций действительного переменного прилагались к классическим вопросам теории функций комплексного переменного. Идеи Н. Н. Лузина начинали проникать и в Петроград, где привлекли внимание Н. М. Гюнтера и Г. М. Фихтенгольца. В это же время Московская математическая школа понесла и первую тяжелую утрату: умер от тифа М. Я. Суслин, который вместе с Н. Н. Лузиным и П. С. Александровым явился одним из создателей целого направления — дескриптивной теории функций.

Идеи С. Н. Лузина распространились и за рубежом, в особенности в Польше. Этому способствовал В. К. Серпинский, который провел первые годы мировой войны в Москве, работая под непосредственным и сильным влиянием Лузина. В дальнейшие годы идеи школы Лузина стали ведущими в польской математике; их влияние сильно чувствуется и сейчас.

В июне 1921 г. исполнилось 100 лет со дня рождения одного из величайших русских математиков П. Л. Чебышева. Академия наук и Петроградский университет ознаменовали эту дату научной конференцией, на которой Н. Н. Лузин сделал один из основных докладов. На эту конференцию, продолжавшуюся с 9 по 15 июня, вместе с Николаем Николаевичем выехали и его уже тогда многочисленные ученики; так началось более близкое знакомство петроградских математиков с московской математической школой, созданной Н. Н. Лузиным.

С победой на фронтах гражданской войны и с изгнанием интервентов нормальная жизнь в Москве и нормальная работа в Московском университете быстро восстановились; в 1922 г. Н. Н. Лузин оставил работу в Ивановском политехническом институте и вернулся в Москву.

С возвращением Н. Н. Лузина в Москву обычная учебная и научная жизнь созданной им школы вошла в нормальное русло; по-прежнему систематически работал его замечательный семинар по теории функций, напряженно шла творческая научная жизнь, росла талантливая молодежь.

Начало 20-х годов было периодом нового расцвета школы Н. Н. Лузина. Его учениками становятся: Л. А. Люстерник, Н. К. Бари, М. А. Лаврентьев, Л. Г. Шнирельман, П. С. Новиков, Л. В. Келдыш, А. Н. Колмогоров, В. И. Гливенко и другие. Среди них были люди с большими научными дарованиями и ярко выраженной научной индивидуальностью.

Младшие товарищи и первые из учеников Н. Н. Лузина: И. И. Привалов, В. В. Степанов, П. С. Александров, П. С. Урысон, А. Я. Хинчин, Д. Е. Меньшов в это время уже сами становятся крупными учеными и руководителями молодежи. У них появляются собственные ученики — «научные внуки» Николая Николаевича. Появляются новые школы. Истоком одной из них следует считать топологический кружок, руководимый П. С. Александровым и П. С. Урысоном, в котором работали как прямые ученики Николая Николаевича, так и его «научные внуки» (А. Н. Тихонов, В. В. Немыцкий, Н. Б. Веденисов, Л. А. Тумаркин и др.).

А. Я. Хинчин, начиная с 1922—1923 гг., стал прилагать теоретико-функциональные методы к теории чисел и получил ряд основных результатов в области так называемой метрической теории чисел. Его первые работы по теории вероятностей также носят теоретико-множественный характер. Впоследствии (в 1929 г.) Л. Г. Шнирельман перенес метрические понятия на арифметические последовательности и получил ряд глубоких результатов в теории чисел. И. И. Привалов как в совместной работе с Н. Н. Лузиным, так и независимо от него, произвел ряд важных исследований по граничным свойствам аналитических функций. Несколько позже начал систематическую работу в теории аналитических функций ученик Н. Н. Лузина М. А. Лаврентьев, вокруг которого впоследствии, в свою очередь, собрался большой коллектив молодых математиков.

Д. Е. Меньшов получил ряд фундаментальных результатов как в области действительного переменного, главным образом по теории ортогональных систем, так и в области комплексного переменного. В. В. Степанов перенес теоретико-функциональные методы в теорию почти-периодических функций.

В 20-х же годах появились работы Л. А. Люстерника, а затем И. Г. Петровского по проблеме Дирихле, которыми началась работа московской математической школы по краевым задачам уравнений в частных производных.

Интересы самого Н. Н. Лузина в начале 20-х годов лежат главным образом в области дескриптивной теории функций. Здесь он становится основоположником новой, по существу, математической дисциплины. Он не только получил в этой области фундаментальные результаты, но и затронул в предпринятых им исследованиях сущность основ теории множеств. Он впервые высказал идеи о границах теоретико-множественного мышления. Заложенные им принципы и установки являются программой, послужившей для дальнейшей плодотворной работы в области современной теории функций. Эта программа далеко еще не выполнена, но получаемые результаты целиком подтверждают глубокие предвидения Н. Н. Лузина.

В середине 20-х годов Н. Н. Лузин написал целый ряд работ по дескриптивной теории множеств и, в частности, в 1926 г. большой мемуар об аналитических и проективных множествах.

Весной 1927 г. в Москве состоялся Всероссийский съезд математиков. На этом съезде в известном смысле были подведены итоги огромной работы Н. Н. Лузина по созданию московской математической школы. Многие из учеников Н. Н. Лузина выступили здесь как крупные ученые, руководившие важными направлениями научной работы в советской математике. Сам Николай Николаевич сделал на этом съезде один из основных докладов: «О современных задачах теории функций действительного переменного». В октябре 1927 г. он участвовал на съезде польских математиков во Львове.

В августе 1928 г. на Международном математическом съезде в Болонье Н. Н. Лузин прочел доклад «О путях теории множеств», а затем до лета 1930 г. жил в Париже, где работал над своей книгой «Leçons sur les ensembles analytiques». В этой книге, вошедшей в коллекцию монографий по теории функций, включающей труды крупнейших ученых, он подытожил результаты свои и своих учеников (М. Я. Суслина, П. С. Александрова, П. С. Новикова, Л. В. Келдыш, Е. А. Селивановского) по теории аналитических и проективных множеств, составляющей одно из крупнейших достижений московской математической школы *.

В эти годы крупнейшие научные заслуги Н. Н. Лузина и руководимой им школы получили мировое признание. Н. Н. Лузин получил почетное звание действительного члена Краковской Академии наук, звание почетного члена Математического общества в Калькутте, звание почетного члена Бельгийского математического общества в Брюсселе. На конференции польских математиков во Львове в 1927 г. он играл ведущую роль; на Международном съезде математиков в Болонье в 1928 г. он был избран вице-президентом. В 1927 г. он избирается членом-корреспондентом, а в 1929 г. Н. Н. Лузин был избран действительным членом Академии наук СССР и ему было поручено заведование отделом теории функций Физико-математического института имени В. А. Стеклова при Академии наук СССР; в связи с этим он часто ездил в Ленинград. Связь с Институтом стала более прочной с 1934 г., когда Академия наук и ее

* Русский перевод этой книги был издан в Москве в 1953 г. (Н. Н. Лузин. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. М., ГТТИ, 1953 г.)

Математический институт были переведены в Москву. Н. Н. Лузин продолжал руководство отделом теории функций до конца жизни; все сотрудники этого отдела являются его ближайшими учениками.

В 30-х годах глубокие математические идеи, которые с таким успехом разрабатывались в ближайшем окружении Николая Николаевича, привели в трудах его учеников и продолжателей к замечательным результатам в самых различных областях математики, к широким научным направлениям в области качественных методов, в области теории вероятностей и ее разнообразнейших приложений, в вопросах гидродинамики и ее технических приложений. А. Я. Хинчин и А. Н. Колмогоров создали московскую школу теории вероятностей, занимающую теперь в мировой науке одно из первых мест. М. А. Лаврентьев и М. В. Келдыш свои глубокие исследования в области теории аналитических функций применили к гидродинамике и аэродинамике. В. В. Степанов вовлек группу ученых в работу по качественной теории дифференциальных уравнений. Начались блестящие работы И. Г. Петровского по теории систем уравнений в частных производных. Во всех этих исследованиях применялись и углублялись методы Н. Н. Лузина.

Продолжающаяся работа в области метрической теории функций привела к созданию большой школы функционального анализа.

Сам Н. Н. Лузин в это время имел разнообразные научные интересы. С одной стороны, он продолжал в эти годы, как и вообще до конца жизни, размышлять над глубокими и трудными проблемами дескриптивной теории множеств и обоснования математики. В это время с ним оказался особенно близок более узкий круг математиков (П. С. Новиков, Л. В. Келдыш, А. А. Ляпунов, Е. А. Селивановский), работавших по проблематике, тесно связанной с интересами Н. Н. Лузина в области дескриптивной теории функций. С другой стороны, Н. Н. Лузин, владея творческим и методами классического анализа, с успехом начал применять их к прикладным вопросам. Так, он занимался оценкой сходимости метода приближенного решения дифференциальных уравнений, предложенного С. А. Чаплыгиным; по предложению Геофизического института провел критический анализ методов предсказания погоды на основе метеорологических наблюдений за большой промежуток времени *.

В 1938 г. Н. Н. Лузин начал работать в области дифференциальной геометрии и, в частности, занялся проблемой изгибания на главном основании. В этой классической области, которой, начиная с 60-х годов прошлого века, было посвящено много работ русских и иностранных математиков, он получил решающие результаты.

В 30 и 40-х годах, кроме Института им. В. А. Стеклова, Н. Н. Лузин работал и в других институтах Академии наук: в Сейсмологическом и в Институте автоматики и телемеханики. В последнем он прилагал к прикладным темам теорию дифференциальных уравнений.

* Эта работа Н. Н. Лузина «К теоретическому обоснованию периодограмм» публикуется впервые в настоящем томе Собрания сочинений Н. Н. Лузина.

В эти годы работы в институтах Академии наук Н. Н. Лузин уже не был связан с университетом систематически. Однако иногда он возобновлял там работу, и это неизменно оказывало влияние на молодых математиков, отталкивавшихся в своих исследованиях от его лекций и семинаров. Например, последний курс Н. Н. Лузина «Избранные главы теории функций комплексного переменного», прочитанный им в 1945 г., вызвал среди студентов интерес к теории функций двух действительных переменных, и с тех пор в стенах Московского университета группа молодых математиков, среди которых в первую очередь следует назвать А. С. Кронрода, разрабатывает эту новую и увлекательную область.

Хотя, начиная с 1930 г., Н. Н. Лузин уже сам мало преподавал, он всегда интересовался вопросами преподавания и много времени уделял писанию учебников. Сначала он редактировал перевод курса дифференциального и интегрального исчисления американского математика Грэнвиля. Этот курс благодаря переработкам, которым его подверг Н. Н. Лузин, выдержал 17 изданий и был широко распространен в высших технических учебных заведениях. В последних изданиях он уже превратился в совершенно оригинальное сочинение. Эта книга, как и все написанное Н. Н. Лузиным, отличается необычайной живостью и ясностью изложения, красочностью языка; автор не только доказывает, но и в живой образной форме разъясняет содержание курса.

В 1940 г. Н. Н. Лузин написал курс теории функций действительного переменного (переизданный затем в 1949 г.). Достаточно сравнить характер изложения в этой книге с аналогичными сочинениями на русском и иностранном языках, чтобы убедиться в оригинальности и своеобразии идей Н. Н. Лузина, в проявляющемся здесь, как и ранее в его лекциях, умении увлечь читателя, показать ему не только законченные результаты, но и процесс их создания.

Н. Н. Лузин проявлял живой интерес и к истории математики. Его перу принадлежат прекрасные статьи о Ньютоне, об Эйлере, очень интересная статья, касающаяся развития понятия функции, и статья о дифференциальном исчислении *.

Излагая биографию Н. Н. Лузина, мы не можем говорить о нем только как о математике. Он много читал и размышлял над самыми разнообразными вопросами физики, естествознания, истории. Он любил и хорошо знал русскую литературу, живо интересовался архитектурой и живописью, неизменно посещал музеи и выставки, во время пребывания за границей объездил даже ряд маленьких итальянских городов, изучая произведения искусства. Николай Николаевич имел свои глубокие и оригинальные взгляды на литературу и искусство. Это был человек исключительного духовного богатства.

В последние годы жизни научной работе Н. Н. Лузина мешало его болезненное состояние: он страдал сердечными припадками. Однако он

* Все эти статьи помещены в настоящем томе.

продолжал упорно работать и, в частности, вернулся к исследованиям по дифференциальной геометрии. Смерть не дала ему возможности закончить этот труд. Среди бумаг, которые остались после его кончины, имеется большая еще не разобранная рукопись, относящаяся к этим вопросам. Последние страницы ее писались буквально в последние дни жизни Николая Николаевича *.

28 февраля 1950 года Н. Н. Лузин неожиданно скончался после острого сердечного припадка.

Образ этого замечательного ученого, учителя целого поколения математиков, глубокого мыслителя оставит неизгладимый след в советской математической культуре.

---

* См. в настоящем томе статью «О регулярном решении задачи изгибания поверхности на главном основании».

СПИСОК ПРОБЛЕМ, ПОСТАВЛЕННЫХ Н. Н. ЛУЗИНЫМ В ПЕРИОД ПОДГОТОВКИ ДИССЕРТАЦИИ

Среди рукописей Н. Н. Лузина, найденных после его смерти, имеется одна, озаглавленная «Список вопросов». Из личных бесед с Н. Н. Лузиным нам известно, что, находясь в научной командировке, сначала в Геттингене, а затем в Париже с 1911 по 1914 г., он работал над темами, из которых была потом создана его диссертация. В это время он имел обыкновение записывать те вопросы, которые ему казалось нужным разрешить. Публикуемый ниже текст и есть как раз этот список вопросов. Часть из них Н. Н. Лузин разрешил позже сам, некоторые в явной форме поставил в своей диссертации или других работах, иные предлагал для разрешения своим ученикам, указывая пути к их решению. Поскольку список он писал для себя, не предполагая его публиковать, многие вопросы высказаны в форме намека или неясно выраженной мысли. Мы публикуем сейчас этот список вопросов без всяких изменений.

После первых 42 вопросов в списке Н. Н. Лузина стояла фраза: «Много было продумано и пропущено, к сожалению, вопросов. Продолжаю снова записывать». По-видимому, первая серия вопросов написана до появления в 1912 г. в «Comptes Rendus» Парижской Академии наук заметок Данжуа, где он впервые ввел свое определение интеграла; поэтому здесь стоят вопросы, которые после этих заметок оказались решенными. В последующих вопросах Н. Н. Лузин уже пользуется понятием тотализуемой функции. К сожалению, он вскоре перестал записывать возникавшие у него вопросы.

В комментариях, сопровождающих второе издание книги «Интеграл и тригонометрический ряд» (Гостехиздат, Л.— М., 1951), Н. К. Бари и Д. Е. Меньшов дали полный разбор вопросов, поставленных в этом списке проблем, и описали современное состояние этих вопросов, выдвинутых Н. Н. Лузиным при написании им диссертации.

Комиссия по изданию трудов академика Н. Н. Лузина

СПИСОК ВОПРОСОВ

1. «Пусть $f(x)$ такова, что

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx < +\infty,$$

где $\{a_0, a_n, b_n\}$ определены по Фурье.

Может ли случиться, что для *всякого* x

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} S_n(x) = +\infty$$

и

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} S_n(x) = -\infty?»$$

2. «Может ли случиться, что

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots$$
$$\ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$$

сходится для интервала $h_1 \leqslant x \leqslant h_2$ к функции $f(x)$, голоморфной в этом интервале, не будучи рядом Фурье и даже расходясь вне $h_1 \leqslant x \leqslant h_2$?

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, и ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

определит гармоническую функцию внутри $|z| < 1$. Сопряженный ряд определит гармоническую же функцию внутри $(R = 1)$, оба вместе — аналитическую функцию $F(z)$, голоморфную *внутри* $(R = 1)$. Чрезвычайно вероятно, что $F(z)$ будет голоморфна на $(R = 1)$ в куске $h_1 \leqslant x \leqslant h_2$ и, следовательно, и сопряженный ряд будет сходящимся в этом интервале (Рисс — Фату)?»

3. «Если имеем:

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, имеем тогда

$$S_0(x),\ S_1(x), \ldots, S_n(x), \ldots;$$

можно ли выбрать такие $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$, чтобы $\lim\limits_{p\to\infty} S_{n_p}(x)$ существовал? и существовал всюду, кроме, быть может, множества меры нуль?

Если да, всегда ли это есть одна и та же функция с разными рядами

$$n'_1,\ n'_2, \ldots,\ n'_p, \ldots,$$
$$n''_1,\ n''_2, \ldots,\ n''_p, \ldots,$$

т. е. аналогия сходимости в среднем?»

4. «Пусть дается $f(x)$, измеримая, конечная и определенная в каждой точке x, кроме множества меры нуль.

Существует $F(x)$ непрерывная и такая, что

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), \text{ кроме множества меры нуль.}$$

Обозначаю

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{(по определению).}$$

Согласно этому, имею:

$$\frac{d}{dx}\Big[F(x)\sin nx\Big] = f(x)\sin nx + F(x)\,n\cos nx,$$

$$\frac{d}{dx}\Big[F(x)\sin nx\Big] - F(x)\,n\cos nx = f(x)\sin nx,$$

$$\frac{d}{dx}\Big[F(x)\sin nx\Big] - \frac{d}{dx}\int_0^x F(x)\,n\cos nx\,dx = f(x)\sin nx,$$

$$\frac{d}{dx}\Big\{F(x)\sin nx - \int_0^x F(x)\,n\cos nx\,dx\Big\} = f(x)\sin nx$$

и

$$F(b)\sin nb - F(a)\sin na - n\int_0^b F(x)\cos nx\,dx = \int_0^b f(x)\sin nx\,dx.$$

Аналогично:

$$\frac{d}{dx}\Big[F(x)\cos nx\Big] = f(x)\cos nx + F(x)\,[-n\sin nx],$$

$$\frac{d}{dx}\Big\{\Big[F(x)\cos nx\Big] + n\int_0^x F(x)\sin nx\,dx\Big\} = f(x)\cos nx\,dx,$$

т. е.

$$F(b)\cos nb - F(a)\cos na + n\int_a^b F(x)\sin nx\,dx = \int_a^b f(x)\cos nx\,dx;$$

делая $b = 2\pi$, $a = 0$, имеем:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = F(2\pi) - F(0) = \pi a_0,$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = F(2\pi) - F(0) + n\int_0^{2\pi} F(x)\sin nx\,dx = \pi a_n,$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = -n\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx = \pi b_n \quad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Нельзя ли смотреть на эти формулы, как на определяющие коэффициенты Фурье (в моем смысле) для не суммируемой и не интегрируемой ни в каком смысле функции $f(x)$, по крайней мере, если

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,\\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0\end{array}\right\}\quad \text{одновременно?»}$$

5. «Дана $f(\theta)$, непрерывная на круге $(R=1)$ и такая, что $\frac{df(\theta)}{d\theta}=0$, кроме множества меры нуль.

Делю $(R=1)$ на $2n$ равных частей. В каждой части есть для $f(\theta)$ «средняя» ордината [т. е.

$$2n\int\limits_a^{a+\frac{1}{2n}} f(\theta)\,d\theta = f(\theta_1)].$$

Нумерую как-нибудь, по порядку следования, эти части. Беру четные ординаты с $+$, нечетные с $-$ и делаю общую их сумму. Пусть это есть

$$\sigma_n.$$

Существует ли $f(\theta)$ свойств вышеуказанных и такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0$$

равномерно, при любом начале для разделения $(R=1)$ на $2n$ частей?

Ясно, что, если $f(\theta)$ с ограниченным изменением, тогда

$$|\sigma_n| < K,$$

где K — определенное число, постоянное раз навсегда!»

6. «Получить интеграл более общий, чем Лебега, регулярным процессом, указанным Д. Ф. Егоровым!

Обобщить интеграл Дюбуа — Реймона».

7. «Пусть имеем:

$$\frac{a_0(y)}{2}+\sum_1^\infty a_n(y)\cos nx + b_n(y)\sin nx,$$

где

$$\frac{a_0^2(y)}{2}+\sum_1^\infty a_n^2(y)+b_n^2(y) < K.$$

Знаем, что для y определенного имеем $f(x,y)$ и для y определенного имеем $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ такие, что

$$\lim_{p\to\infty} S_{n_p}(x,y) = f(x,y).$$

С вариацией y-ка меняется ли $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$?»

8. «Ряд Тэйлора

$$\sum_0^\infty a_n z^n,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} |\alpha_n| = 0$, изображает $f(z)$, голоморфную *внутри* $(R=1)$. Может ли случиться, что $f(z)$ *не* существует на $(R=1)$ для множества меры >0 при радиальном стремлении?»

9. «Фату доказал:

Ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0, \ \lim_{n\to\infty} nb_n = 0,$$

соответствует (по Риссу) некоторой $f(x)$, интегрируемой в (L). Пусть $\int\limits_0^x f(x)\,dx = F(x)$. Если

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

ряд $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_1^\infty a_n \cos nx + b_n \sin nx$ *сходится*».

Существуют ли такие $f(x)$, которые суть *точные* производные непрерывной $F(x)$ для $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ и для которых ряд

$$f(x) \propto \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

везде расходится, или расходится в мере >0, или если сходится, то не к $\frac{dF}{dx}$?»

10. «Пусть $F(\theta)$ — непрерывная на $(R=1)$. Какова ее функциональная природа, дабы

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha = 0$$

и одновременно

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{2\pi} F(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha = 0?»$$

11. «Пусть $f(x)$ есть функция, вполне определенная для $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$; пусть существует непрерывная на $(R=1)$ функция $F(x)$, такая, что

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

Что — имеем ли $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0?$$

$\int$ понимается как примитивная функция».

12. «Пусть имеем $F(\theta)$, определенную на $(R=1)$. Пусть

$$F(\theta)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} na_n=0,\qquad \lim_{n\to\infty} nb_n=0.$$

Ясно, что тогда $\int\limits_0^{2\pi} F^2(\alpha)\,d\alpha<+\infty$. $\left(\int\limits_0^{2\pi}\right.$ есть интеграл Лебега.$\left.\right)$

Пусть еще ряд

$$f(\theta)\sim\sum_{n=1}^{\infty}-na_n\sin n\theta+nb_n\cos n\theta=\sum_{n=1}^{\infty}n(-a_n\sin n\theta+b_n\cos n\theta)$$

таков, что гармоническая функция

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\rho^n(-a_n\sin n\theta+b_n\cos n\theta)$$

существует на $(R=1)$ на множестве меры >0, хотя бы в смысле нормального приближения к $(R=1)$.

Нельзя ли сказать в обобщенном смысле, что

$$f(\theta)=\frac{dF(\theta)}{d\theta}\ ?»$$

13. «Непрерывная функция $F(\theta)$, разлагающаяся в ряд Фурье, такой, что

$$\lim_{n\to\infty} na_n=0,\qquad \lim_{n\to\infty} nb_n=0,$$

не есть ли функция, имеющая всегда производную всюду, кроме множества меры 0?»

14. «Знаем, что рядом полиномов, сходящимся во всякой точке, изобразима всякая функция 1-го класса. Какие функции изобразимы тригонометрическим рядом, сходящимся во всякой точке? Тут еще дополнительный вопрос относительно неполного изображения, т. е. изображения, игнорируя множество меры нуль».

15. «Знаем, что, если у ряда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

ряд $\sum\limits_1^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ сходится, то существуют числа

$$n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k,\ \ldots,$$

такие, что, обозначая $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$.

имеем сходимость последовательности

$$S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots, S_{n_k}, \ldots$$

к пределу. (Я думаю, что при условии сходимости $\sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2)$ будет $n_k = k$.) Пусть, обратно, имеем ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

такой, что есть числа $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, такие, что последовательность

$$S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots, S_{n_k}, \ldots$$

сходится. Что сказать о коэффициентах и о сумме ряда?»

16. «Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, определенная в области $0 \leqslant x \leqslant 1$. Пусть ее D_+ есть всегда конечная величина, кроме, быть может, множества меры нуль. Имеется ли тогда у $f(x)$ обычная производная на множестве меры > 0?»

17. «Пусть $f(x)$ — непрерывная функция (или вообще измеримая), определенная для области $0 \leqslant x \leqslant 1$. Пусть для множества $\mathfrak{M}$, mes $\mathfrak{M} > 0$, в каждой точке ξ множества $\mathfrak{M}$ все четыре производных числа Дини: D_+, D^+, D_-, D^-, имеют конечную величину. Можно ли тогда утверждать, что $f(x)$ имеет производную, обыкновенную всюду на $\mathfrak{M}$, кроме множества точек из $\mathfrak{M}$ меры 0? *Кажется, да!*»

18. «Все тригонометрические ряды Фурье можно разделить на *два* класса: I класс — ряды, сходящиеся на 2-й категории, II класс — ряды, расходящиеся на 2-й категории. Существуют ли оба эти класса?»

19. «Непрерывные функции $f(x)$, определенные в области $0 \leqslant x \leqslant 1$, можно разделить на два класса: I — такие функции, что существует такое совершенное множество P, mes $P > 0$, на котором $f(x)$ с ограниченным изменением, и II — где этого сделать нельзя! Дать примеры обоих классов!»

20. «Изобрести алгорифм составления примеров тех или других функций, встречающихся в работе. Возможна ли основная теорема, в которую входят множества с параметрами?»

21. «Существует ли $f(x)$ свойств:

1. $f(x)$ непрерывна в $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2. Для каждого x области $0 \leqslant x \leqslant 1$ есть обыкновенная производная $\frac{df}{dx}$, причем для $x = 0$ правая и для $x = 1$ левая.

3. $\frac{df}{dx} = 0$ всюду, кроме множества меры нуль? Интересно исследовать.

именно следующее: условие, чтобы $\frac{df}{dx}=0$ всюду, кроме множества меры нуль, не налагает ли того следствия, что есть непременно такая точка ξ, где $\frac{df}{dx}$ не существует? Можно взять в первых попытках $f(x)$ растущею!

Дело в том, чтобы получить теорему Шеффера не отрицательным, а положительным путем. Это — источник вопроса. А затем еще и отношение такой $f(x)$, если она есть, к своему разложению в ряд Фурье тригонометрический и его производному ряду!»

22. «Существует ли тригонометрический ряд

$$\sum_{0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

сходящийся на множестве, мера которого >0 и $<2\pi$?

Или таких рядов вообще нет?»

23. «Пусть на круге ($R=1$) дается множество $\mathfrak{M}$ свойств:

1. $\mathfrak{M}$ есть I категории.
2. $\operatorname{mes} \mathfrak{M}=0$.

Можно ли круг повернуть так, чтобы $\mathfrak{M}$ переместилось, как твердая система в $\mathfrak{M}_1$, так, что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_1$ будут без общей точки? Или, чтобы, хотя и была общая часть $\mathfrak{M}'$, но уже $\mathfrak{M}'$ можно было повернуть без общей точки?

Или аналогично, называя $\mathfrak{M}''$ часть совпадения от поворачивания $\mathfrak{M}'$, чтобы $\mathfrak{M}''$ можно было повернуть без общей точки, и т. д.

Есть ли остановка на конечном числе таких операций?»

24. «Теорема Фату — Рисса читается так:

«Если $\sum_{0}^{\infty}\alpha_n z^n$ есть голоморфная функция на дуге ($R=1$) и $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$, то ряд на этой дуге сходится и сходится равномерно».

Если же $\sum_{0}^{\infty}\alpha_n z^n$ не будет голоморфная на дуге ($R=1$), но будет изображать функцию (определенную приближением внутренней точки к периферии круга), имеющую все производные непрерывными на этой дуге, сходится ли ряд тогда равномерно?

Заметим, что здесь отнюдь нет гипотезы о сходимости $\sum_{0}^{\infty}|\alpha_n|^2$, т. е. не только интегрируемости в квадрате функции $\sum_{0}^{\infty}\alpha_n z^n$ на окружности ($R=1$), но даже нет гипотезы ее существования на ($R=1$), кроме той дуги, где ставится вопрос о сходимости!!

Тут еще можно отказаться от массы условий и, например, допустить, что действительная и мнимая части функции $\sum_{0}^{\infty}\alpha_n z^n$ суть функции с ограниченным изменением на некоторой дуге».

25. «Если имеем $\sum\limits_{0}^{\infty}\alpha_n z^n$, где $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, существует ли функция $\sum\limits_{0}^{\infty}\alpha_n z^n$ на периферии ($R = 1$)? Может ли не существовать на множестве точек меры > 0?»

26. «Пусть $F(r, \theta)$ есть гармоническая функция, имеющая смысл на некоторой дуге круга радиуса 1; пусть там она интегрируема в квадрате. Сходится ли соответствующий тригонометрический ряд на этой дуге?»

27. «Какие свойства должны быть у непрерывной функции $f(x)$, чтобы ее сопряженная гармоническая $f_1(x)$ была также непрерывной?»

28. «Пусть $f(x)$ есть непрерывная функция; пусть $f_n(x)$ есть n-е приближение к ней. В некоторых точках, конечно, это приближение будет наиболее близким, в иных же точках это приближение будет наиболее далеким. Мера множества этих последних точек не будет ли равна 0? Разумеется, все зависит от законов приближения; наиболее интересны чебышевские или тригонометрические приближения».

29. «Построить тригонометрический ряд с убывающими до 0 коэффициентами, суммирующийся по методу Фейера и дающий в результате 0 всюду, кроме, быть может, множества меры нуль».

30. «Пусть $f(x)$ измерима и ограничена. Тогда коэффициенты Фурье для $f(x)$ стремятся с ростом n к 0. Поэтому среди этих коэффициентов есть наибольший по абсолютной величине. Существует ли формула для определения этой величины? Или, быть может, есть формула для длины того наименьшего интервала, который содержит все коэффициенты Фурье для $f(x)$, отмеченные как точки на шкале?»

31. «Если $f(x)$ с интегрируемым квадратом, тогда

$$\sum_{0}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

сходится (Парсеваль). Если $f(x)$ ограничена, каков наименьший предел таких σ, что ряд

$$\sum_{0}^{\infty}(a_n^\sigma + b_n^\sigma)$$

сходится?»

32. «Каково необходимое и достаточное условие на коэффициенты Фурье $\{a_n, b_n\}$, дабы соответствующая $f(x)$ была ограниченной?»

33. «Известно, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{0}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Какова величина

$$\int_{0}^{2\pi} f^4(x)\,dx?$$

Или, если $\Omega(y)$ есть положительная функция, целая, со всеми коэффициентами Тэйлора положительными, найти величину

$$\int_0^{2\pi} \Omega\,[f(x)]\,dx,$$

если можно, и для других функций Ω, кроме степеней переменного?

34. «Существует ли такой тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

который есть ряд Фурье от функции $f(x)$, *интегрируемой абсолютно*, тогда как сопряженный ряд тригонометрический

$$-\frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos nx + a_n \sin nx)$$

не есть ряд Фурье от функции, интегрируемой абсолютно?»

35. «Существует ли такая последовательность чисел

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots,\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

расходился, тогда как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$$

был рядом Фурье от функции, *интегрируемой абсолютно*?»

36. «Пусть $f(x)$ есть точная первая производная от непрерывной функции $F(x)$ для всех точек области

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

[для $x = 0$ $f(0)$ есть правая производная, для $x = 1$ — левая].

Пусть $f(x)$ есть *конечная* для *всякого* x области $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда $F(x)$ есть ее единственная первообразная функция. Обозначим ее через

$$\int_0^x f(x) + C, \text{ где } C \text{ — абсолютная константа.}$$

Введем далее символ

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x).$$

Если $f(x)$ абсолютно интегрируема в смысле Лебега, то имеем:

$$\int_0^x f(x) \equiv \int_0^x f(x)\,dx,$$

$$\int_0^1 f(x) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Если же $f(x)$ *не интегрируема абсолютно*, тут нужен наш символ. Ясно, что при условии $f(x)$ быть *конечной* точной производной $f(x)\cos nx$ и $f(x)\sin nx$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ суть также конечные точные производные, ибо

$$\frac{d}{dx}(F(x)\sin nx) = f(x)\sin nx + F(x)\,n\cos nx,$$

$$\frac{d}{dx}(F(x)\sin nx) = f(x)\sin nx + \frac{d}{dx}\int_0^x nF(x)\cos nx\,dx,$$

$$f(x)\sin nx = \frac{d}{dx}\left[F(x)\sin nx - n\int_0^x F(x)\cos nx\,dx\right].$$

Отсюда по введенному обозначению

$$F(x)\sin nx - n\int_0^x F(x)\cos nx\,dx = \int_0^x f(x)\sin nx.$$

В частности же,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = -n\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Аналогично:

$$\frac{d}{dx}(F(x)\cos nx) = f(x)\cos nx - F(x)\,n\sin nx,$$

$$\frac{d}{dx}(F(x)\cos nx) = f(x)\cos nx - \frac{d}{dx}\int_0^x F(x)\,n\sin nx\,dx$$

$$f(x)\cos nx = \frac{d}{dx}\left[F(x)\cos nx + n\int_0^x F(x)\sin nx\,dx\right]$$

откуда

$$F(x)\cos nx + n\int_0^x F(x)\sin nx\,dx - F(0) = \int_0^x f(x)\cos nx.$$

В частности же,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx = F(2\pi) - F(0) + n\int_0^{2\pi} F(x)\sin nx\,dx.$$

Обозначая

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx = a_n, \quad \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx = b_n,$$

имеем последовательности

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

Вопрос теперь ставится такой: При гипотезе $f(x)$ быть точной *конечной* производной, имеют ли место равенства

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Вероятно, что это и имеет место!»

37. «Если в предыдущем вопросе имеют место равенства $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то интересно изучить обобщенный интеграл Пуассона

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha-\theta)+r^2}\,d\alpha$$

и теорему Пикара для него!»

38. «Пусть $f(x)$ есть абсолютно интегрируемая функция, определенная в области $0 \leqslant x \leqslant 1$. Существует регулярный процесс, дающий $\int\limits_0^x f(x)\,dx$ в смысле Лебега.

Пусть $f(x)$ есть точная производная, конечная везде в области $0 \leqslant x \leqslant 1$. Существует ли регулярный процесс, дающий ее единственную первообразную функцию $\int\limits_0^x f(x)$?»

39. «По поводу моей теоремы относительно признака сходимости тригонометрических рядов Таубера — Юнга:

Пусть $f(x)$ есть функция свойств:

1) $f'(x)$ непрерывна в области $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$,

2) $f'(x)$ непрерывна в области $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$,

3) $\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx$ есть *конечное* число ($< +\infty$). Кладя

$$F(x) = \int_0^1 \frac{f(\alpha)}{\alpha - x}\,d\alpha,$$

должны иметь для $F(x)$ свойства:

1) $F(x)$ определена и конечна в области $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$.

2) $\int\limits_0^1 F^2(x)\,dx < +\infty$, т. е. конечное число. Как это доказать прямо?»

40. «Если $f(x)$ есть конечная функция и точная производная в области $0 \leqslant \theta < 2\pi$, то можно ли характеризовать ее свойства, исходя из одного этого? (вроде свойств Бэра), и получить регулярный процесс вопроса 38».

41. «Пусть $f(\theta)$ есть положительная функция, определенная в области $0 \leqslant \theta < 2\pi$ и не интегрируемая абсолютно.

По-видимому, *не* существует ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \rho^n,$$

который был бы ограничен снизу в области $\{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, $0 \leqslant \rho < 1$ и изображал бы $f(\theta)$ при стремлении ρ к 1 и θ, постоянном всюду, кроме, быть может, множества меры 0! При этом *главное условие* то, чтобы

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \to \infty} b_n = 0.$$

Если же отказаться от этого условия, то, быть может, и существуют такие ряды».

42. «В связи с предыдущим вопросом стоит следующий: пусть M есть множество всех измеримых функций, определенных для $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Пусть $f(\theta)$ есть один из элементов этого множества. Существует ли регулярный процесс (R), в силу которого $f(\theta)$ делается соответственной последовательности чисел

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots,$$
$$b_1, \ldots, b_n, \ldots,$$

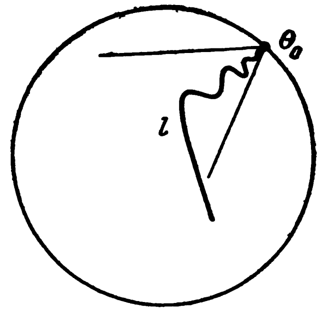
так что двум f и f_1, разнящимся на множестве точек θ меры $>$ нуля, соответствуют две *разные* последовательности $\{a_n, b_n\}$ и $\{a'_n, b'_n\}$ и чтобы, если $f(\theta)$ была интегрируемой абсолютно или в смысле Гарнака, или в моем, то чтобы $\{a_n, b_n\}$ совпали с коэффициентами Фурье».

43. «Пусть ряд $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *сходится* для всякого x $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$. Пусть его сумма есть $S(x)$; $S(x)$ — конечная для всякого x. Можно ли утверждать, что, если $S(x)$ всегда *не* отрицательна, $S(x) \geqslant 0$, то непременно $S(x)$ интегрируема в смысле Лебега?»

44. «Доказано, что не может существовать гармоническая функция $P(\rho, \theta)$, голоморфная внутри $(\rho = 1)$ и принимающая на окружности $(\rho = 1)$ во всякой точке значение 0.

Но не доказано (мне неизвестно доказательство), что не существует $P(\rho, \theta)$ условий вышеприведенных и принимающая значения 0 во всякой точке $(\rho = 1)$ по дорожкам, не касательным к окружности.

Определение. Дорожка l не касательна к окружности $(\rho = 1)$ в точке θ_0, если можно провести такие *некасающиеся* два луча к θ_0, что дорожка l лежит между ними, при достаточной близости к $(\rho = 1)$ (черт. 1).



Дорожка может сама и не иметь касательной!»

45. «Если гармоническая функция

$$P(\rho, \varphi) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

$$a_n,\ b_n \to 0,$$

такова, что на дуге $(\rho = 1)$ $\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1$ эта $P(\rho, \varphi)$ *принимает* (в абсолютном смысле) значения, голоморфные от аргумента φ, можно ли утверждать, что тригонометрический ряд

$$\int P(\rho, \varphi)\, d\varphi$$

сходится на этой дуге $\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1$ и представляет на этой дуге функцию, имеющую производную?

Тут обобщение для слова «голоморфность значений $P(\rho, \varphi)$» на дуге и замена интегрируемостью в смысле Лебега, Данжуа. Изучить, если на дуге $P(1, \varphi)$ есть точная производная!»

46. «Нельзя ли воспользоваться формулой Дюбуа — Реймона и явлением Гиббса, чтобы, представив непрерывную $f(x)$ в виде [n ступеней (параллельных оси x-ов) и построив для $f_n(x)$ ряд Фурье, именно, n первых его членов, т. е. функцию $S'_n(x)$, изучить вариацию

$$|S_n(x) - S'_n(x)|.$$

Нельзя ли этим путем построить нужный пример или построить доказательство?»

47. «Пусть ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ сходится к конечной величине для всякого x. Пусть его сумма есть $S(x)$.

Имеем

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Рассмотрим функцию

$$U(x) = C + \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \sin nx\right).$$

Ясно, что $U(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом; ясно, что вышеприведенный ряд сходится (Фату) всюду, кроме, быть может, множества меры 0. Пусть множество всех его точек сходимости есть E,

$\operatorname{mes} E = 2\pi$. E может быть и I категории. Ясно, что $U(x)$ определена только в этих точках. В остальных же точках — пустоты. Можно ли их восстановить своего рода аналитическим продолжением?

Пусть ξ_1 и ξ_2 суть две точки от E. Составим разность

$$U(\xi_2) - U(\xi_1).$$

Это есть конечное число.

Я спрашиваю, можно ли его получить непосредственно из $S(x)$, не прибегая к *тригонометрической формуле* для $U(x)$?

Ясно, что здесь кроется вся загадка *интегрирования* как регулярного процесса.

Видоизменяя $S(x)$, если можно так выразиться, можно ли *всегда* получить для разности одно и то же число

$$U(\xi_2) - U(\xi_1).$$

Вот правильная постановка проблемы интегрирования!

Может быть, придем к *инфинитной* интерпретации? Своего рода интерполяция для множества меры нуль, своего рода аналитическое продолжение. Иметь в виду, что $S(x)$ можно (и должно?) предполагать существующей только на множестве I категории меры 2π.»

48. «Пусть $f(x)$ есть производная от непрерывной функции $F(x)$ для *всякого* x, кроме счетного множества точек

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

где производная функция $F'(x)$ совсем не существует.

Можно ли утверждать, что $f(x)$ непременно тотализуема и что, следовательно, $f(x)$, будучи конечной для всякого x, кроме $x = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, где $\frac{dF}{dx}$ не существует, дает $F(x)$ через тотализацию

$$(D)\int_0^x f(\alpha)\,d\alpha?»$$

49. «Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{d}{dx}\left[(x - x_n)^2 \sin\frac{1}{(x - x_n)^2}\right]$$

там, где этот ряд сходится, при сильно убывающем асимптотическом законе $|A_n|$. По-видимому, при достаточно сильно убывающем асимптотическом законе $|A_n|$ $f(x)$ имеет смысл и не как функция *действительного* переменного x, но и как функция $f(z)$ *комплексного* переменного. А тогда ряд

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (x - x_n)^2 \sin\frac{1}{(x - x_n)^2}$$

не есть ли ряд, интимно связанный с $f(x)$ через голоморфизм?»

50. «Пусть тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

сходится всюду, кроме, быть может, множества меры нуль. Пусть $f(x)$ есть его сумма-функция там, где она существует и конечна. Пусть мера множества таких точек есть 2π.

Спрашивается, существует ли хотя бы один ряд по функциям Хаара

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\chi_n(x),$$

изображающий, сходясь, эту $f(x)$ всюду, кроме, быть может, множества точек меры нуль?

Было бы чрезвычайно интересно, если бы существовал непременно один и только один ряд по функциям Хаара, которого бы почленный интеграл сходился всюду, кроме, быть может, множества меры нуль.»

51. «Пусть C есть окружность ($R=1$). Пусть C вся распадается на множество множеств $\{\mathfrak{M}\}$, таких, что всякое $\mathfrak{M}_1$ конгруэнтно с $\mathfrak{M}_2$ при надлежащем повороте окружности. Спрашивается, какова мощность $\mathfrak{M}$? Ясно, что $\mathfrak{M}$ есть в некоторых частных случаях мощности континуума. Если $\mathfrak{M}$ есть единственная точка, $\mathfrak{M}$ есть мощности конечной ($=1$); можно построить случай, когда $\mathfrak{M}$ есть мощности счетной! Кроме того, тут дело в мощности множества $\{\mathfrak{M}\}$. Может ли это быть всякая мощность промежутка между 1 и мощностью континуума, если последние есть? Не забыть этого пути.»

52. «Дана непрерывная функция $f(x)$ с периодом 2π. Найти наибольший абсолютно коэффициент Фурье для $f(x)$!»

Ясно, что

$$f(x)\backsim a_0,\ a_n,\ b_n\quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}b_n=0.$$

Значит, есть такой a_{n_0}, что

$$|a_0|,\ |a_n|,\ |b_n|\leqslant|a_{n_0}|.$$

Найти его!

Здесь задача, аналогичная задаче Чебышева и Бернштейна.»

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ Н. Н. ЛУЗИНА

1911 г.

Über eine Potenzreihe. (Об одном степенном ряде). R. C. Circ. mat., Palermo, **32**.

1912 г.

К основной теореме интегрального исчисления. Матем. сб., **28**, вып. 2.

Об одном случае ряда Taylor'a. Там же.

К абсолютной сходимости тригонометрических рядов. Матем. сб., **28**, вып. 3.

Sur la convergence absolue des séries trigonométriques. (К абсолютной сходимости тригонометрических рядов). C. R. Acad. Sci., Paris, **155**.

Добавление к статье «К основной теореме интегрального исчисления». Матем. сб., **28**, вып. 2; **28**, вып. 4.

Sur les propriétés des fonctions mesurables. (О свойствах измеримых функций.) C. R. Acad. Sci., Paris, **154**.

Sur les propriétés de l'intégrale de M. Denjoy. (О свойствах интеграла Данжуа). C. R. Acad. Sci., Paris, **155**.

1913 г.

Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier. (О сходимости тригонометрических рядов Фурье). C. R. Acad. Sci., Paris, **156**.

1914 г.

Sur un problème de M. Baire. (Об одной проблеме Бэра.) C. R. Acad. Sci., Paris, **158**.

1915 г.

Интеграл и тригонометрический ряд. (Диссертация). М., тип. Лисснера и Собко.

1916 г.

Интеграл и тригонометрический ряд. Матем. сб., **30**, вып. 1.

Sur la recnerche des fonctions primitives. (Об отыскании примитивных функций.) C. R. Acad. Sci., Paris, **162**.

1917 г.

Sur la classification de M. Baire. (О классификации Бэра.) C. R. Acad. Sei, Paris. 164

Sur une décomposition d'un intervalle en une infinité non-dénombrable d'ensembles non-mesurables. (О разбиении интервала на несчетное множество неизмеримых множеств.) C. R. Acad. Sci., Paris, **165**. (Совместно с В. Серпинским.)

Sur une propriété du continu. (Об одном свойстве континуума.) Там же. (Совместно с В. Серпинским.)

Démonstration élémentaire du théorème fondamental sur la densité des ensembles. (Элементарное доказательство основной теоремы о плотности множеств.) R. C. Circ. mat., Palermo. **42**. (Совместно с В. Серпинским.)

Sur la notion de l'intégrale. (О понятии интеграла.) Ann. Mat. pura, appl., série 3, **26**, fasc. 2—3.

1918 г.

Sur quelques propriétés des ensembles (A). (О некоторых свойствах А-множеств.) Bull. int. Acad. Sci., Cracovie, série A, № 4—5 A. (Совместно с В. Серпинским.)

1919 г.

Sur la représentation conforme. (О конформном отображении.) Изв. Иван.-Вознес. политехн. ин-та, вып. 2.

1921 г.

Sur l'existence d'un ensemble non-dénombrable qui est de première catégorie dans tout ensemble parfait. (О существовании несчетного множества первой категории на всяком совершенном множестве.) Fundam. Math., **2**.

1922 г.

О существовании аналитических функций, равномерно бесконечных вблизи купюры. Изв. Иван.-Вознес. политехн. ин-та, вып. 5.

Sur une décomposition du continu. (О разбиении континиуума.) C. R. Acad. Sci. Paris, **175**. (Совместно с В. Серпинским.)

1923 г.

Sur un ensemble non-mesurable B. (Об одном множестве неизмеримом B.) J. Math. pures, appl., série 9, 2. 1923. (Совместно с В. Серпинским.)

1924 г.

Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques. (О единственности и множественности аналитических функций.) C. R. Acad. Sci., Paris, **178**. (Совместно с И. И. Приваловым.)

1925 г.

Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques. (О единственности и множественности аналитических функций.) Ann. sci. Ec. norm. sup., Paris, série 3, **42**, N 6. (Совместно с И. И. Приваловым).

Sur un problème de M. Émile Borel et les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue; Les ensembles analytiques. (Об одной проблеме Эмиля Бореля и проективных множествах Анри Лебега; аналитические множества.) C. R. Acad. Sci., Paris, **180**.

Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue. (О проективных множествах Анри Лебега.) Там же.

Les propriétés des ensembles projectifs. (Свойства проективных множеств.) Там же.

Sur les ensembles non-mesurables B et l'emploi de la diagonale de Cantor. (О множествах неизмеримых B и о применении диагонали Кантора.) C. R. Acad. Sci., Paris, **181**.

Sur le problème de M. Émile Borel et la méthode des résolvantes. (О проблеме Эмиля Бореля и методе резольвент.) Там же.

1926 г.

Mémoire sur les ensembles analytiques et projectifs. (Мемуар об аналитических и проективных множествах.) Матем. сб., **33**, вып. 3.

Remarques sur un lemme de Poincaré. (Замечания об одной лемме Пуанкаре.) Матем. сб., **33**, вып. 4.

Sur un exemple arithmétique d'une fonction ne faisant pas partie de la classification de M. René Baire. (Об одном арифметическом примере функции, не входящей в классификацию Рене Бэра.) C. R. Acad. Sci., Paris, **182**.

1927 г.

Sur une question concernant la propriété de M. Baire. (Об одном вопросе, касающемся свойства Бэра.) Fundam. Math., 9.

Sur les ensembles analytiques. (Об аналитических множествах.) Fundam. Math., **10**.

Remarques sur les ensembles projectifs. (Замечания о проективных множествах.) C. R. Acad. Sci., Paris, **185**.

Современное состояние теории функций действительного переменного. М., Труды Всеросс. мат. съезда.

1928 г.

Sur l'accessibilité des points. (О достижимости точек.) Fundam. Math., **12.**

Sur un ensemble non-dénombrable qui est de première catégorie sur tout ensemble parfait. (Об одном несчетном множестве первой категории на всяком совершенном множестве.) R. C. Acad. Lincei, **7,** fasc. 3. (Совместно с В. Серпинским.)

1929 г.

Sur les voies de la théorie des ensembles. (О путях теории множеств.) Atti del congresso internationale dei matematici 3—10 settembre 1928. V. 1. Bologna, Zanichelli, 1929.

Sur le problème des fonctions implicites. (О проблеме неявных функций.) C. R. Acad. Sci., Paris, **189.**

Sur la représentation paramétrique semirégulière des ensembles. (О параметрическом полурегулярном изображении множеств.) Там же.

Sur les fonctions implicites à une infinité dénombrable de valeurs. (О неявных функциях со счетным множеством значений.) Там же.

Sur un principe général de la théorie des ensembles analytiques. (Об одном общем принципе теории аналитических множеств.) Там же.

Sur les classes des constituantes d'un complémentaire analytique. (О классах конституант аналитических дополнений.) C. R. Acas. Sci., Paris, **189.** (Совместно с В. Серпинским.)

Sur les points d'unicité d'un ensemble mesurable B. (О точках единственности множеств измеримых B). C. R., Acad. Sci., Paris, **189.**

1930 г.

Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications. (Лекции об аналитических множествах и их приложениях.) Collection de monographies sur la théorie des fonctions publiée sous la direction de M. Émile Borel. Paris, Gautnier-Villars.

Analogies entre les ensembles mesurables B et les enembles analytiques. (Аналогии между множествами измеримыми B и аналитическими множествами.) Fund. Math., **16.**

Sur le problème de M. J. Hadamard d'uniformisation des ensembles. (О проблеме Адамара униформизации множеств.) C. R. Acad. Sci., Paris, **190.**

Sur le problème de M. J. Hadamard d'uniformisation des ensembles. (О проблеме Адамара униформизации множеств.) Mathematica, Cluj, **4.**

Sur une properiété des fonctions à carré sommable. (Об одном свойстве функций с интегрируемым квадратом.) Bull. Calcutta math. Soc., **20.**

1931 г.

О методе академика А. Н. Крылова составления векового уравнения. Изв. АН СССР, ОМЕН, № 7.

Sur une famille de complémentaires analytiques. (Об одном семействе аналитических дополнений.) Fund. Math. XVII, 4—7, 1931

1932 г.

О методе приближенного интегрирования академика С. А. Чаплыгина. Труды ЦАГИ, вып. 141.

О некоторых свойствах перемещающегося множителя в методе академика А. Н. Крылова, ч. 1—3. Изв. АН СССР, ОМЕН, № 5, 6 и 8.

О качественном исследовании уравнения движения поезда. Матем. сб., **39**, вып. 3.

1933 г.

Современное состояние теории функций действительного переменного. ГТТИ.

Sur les classes des constituantes des complémentaires analytiques. (О классах конституант аналитических дополнений.) Ann. Scu. norm. sup. Pisa, série 2, **2**, Tasc. 3.

Sur les ensembles toujours de première catégorie. (О множествах, которые всегда являются множествами первой категории.) Fundam. Math., **21.**

1934 г.

Sur une mode de convergence de l'intégrale de Dirichlet. (Об одном виде сходимости интеграла Дирихле.) Изв. физ.-мат. об-ва Казанск. ун-та, **6,** серия 3.

О стационарных последовательностях. Труды Физ.-мат. ин-та, отд. матем., **5**.

Несколько замечаний о кратной отделимости. Докл. АН СССР, **2**, № 5.

Sur les suites stationnaires. (О стационарных последовательностях) Paris, Hermann et C-ie, 1934. (Actualité scientifiques et industrielles. 149. Exposés mathématiques publiés à la mémoire de Jaques Herbrand. V.) (Новости науки и промышленности, 149.) Математические доклады, опубликованные в память Жака Гербранда. У.)

О последовательностях измеримых функций. — В книге: А. Лебег. Интегрирование и отыскание примитивных функций. М.—Л., ГТТИ, 1934.

О строении измеримых функций. Там же.

О построении множеств неизмеримых В. Там же.

Sur une propriété nouvelle des ensembles mesurables B. (Об одном новом свойстве множеств измеримых В.) C. R. Acad. Sci., Paris, **198**.

Sur quelques problèmes difficiles de la théorie des fonctions. (О некоторых трудных проблемах теории функций.) Там же.

Sur la décomposition des ensembles. (О разбиении множеств.) Там же.

Quelques remarques sur les courbes qui sont des complémentaires analytiques. (Некоторые замечания о кривых, которые являются аналитическими дополнениями). Mathématica, Cluj, **10**. (Bul. Soc. Sti., Cluj, **7**).

Современные проблемы теории функций действительного переменного. (Тезисы доклада.) В книге: «Бюллетень II Всес. съезда математиков в Ленинграде 24—30 июня 1934 г.» Л., Изд-во СССР, 1934.

1935 г.

О некоторых новых результатах дескриптивной теории функций. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1935.

Sur les ensembles analytiques nuls. (О пустых аналитических множествах.) Fundam. Math., **25**.

Choix effectif d'un point dans un complémentaire analytique arbitraire, donné par un crible. (Эффективный выбор точки в произвольном аналитическом дополнении, заданном решетом.) Там же. (Совместно с С. П. Новиковым.)

Sur un raisonnement nouveau dans la théorie des fonction descriptive. (Об одном новом рассуждении в дескриптивной теории функций.) C. R. Acad. Sci, Paris, **201**.

Sur un choix d'ensemble parfait distingué dans un complémentaire analytique arbitraire ayant des constituantes non dénombrables. (О выборе специального совершенного множества в произвольном аналитическом дополнении, имеющем несчетные конституанты.) C. R. Acad. Sci., Paris, **201**.

1938 г.

Об одной теореме теории уравнений с частными производными. Докл. АН СССР, **18**, № 8.

О существовании алгебраических поверхностей, не имеющих главного основания. Докл. АН СССР, **19**, № 1—2 и 4.

1939 г.

Доказательство одной теоремы теории изгибания. Изв. АН СССР, ОТН, 1939, № 2 и 10.

1940 г.

К изучению матричной теории дифференциальных уравнений. «Автоматика и телемеханика», № 5.

1941 г.

Об одном случае теоремы Janet—Riquier. Докл. АН СССР, **31**, № 1 и 5.

Реферат: изучение матричной теории дифференциальных уравнений. — В книге: Рефераты научных работ 1940 г. Отделение технических наук АН СССР. М., Изд-во АН СССР, 1941.

1943 г.

О частях натурального ряда. Докл. АН СССР, **40**, № 5.

1946 г.

К абсолютной инвариантности и инвариантности до ε в теории дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 51, № 4 и 5. (Совместно с П. И. Кузнецовым.)

1947 г.

О локализации принципа конечной площади. Докл. АН СССР, 56, № 5.

О частях натурального ряда. Изв. АН СССР, серия матем., 11, № 5.

Проблемы приближенного интегрирования академика С. А. Чаплыгина. В книге: Труды Научно-технического совещания по автоматизированному электроприводу.

1948 г.

К статье проф. Василия Никитича Депутатова «О формальной недостаточности правила Лопиталя». («Математика в школе», № 5).

СТАТЬИ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ, СТАТЬИ В БОЛЬШОЙ СОВЕТСКОЙ ЭНЦИКЛОПЕДИИ, НЕКРОЛОГИ И ДР.

1. Борель Эмиль. БСЭ, 7, 1927.
2. Поль Аппель (1885—1930). Некролог. Изв. АН СССР ОМЕН, 1931, № 3.
3. Иван Александрович Лаппо-Данилевский (1896—1931). Некролог. Изв. АН СССР ОМЕН, 1931, № 6.
4. Эйлер. По поводу 150-летия со дня смерти. «Сорена», 1933, вып. 8.
5. Функция. БСЭ, 59, 1934.
6. Дифференциальное исчисление. БСЭ, 22, 1935.
7. Ньютонова теория пределов. В книге: «Исаак Ньютон (1643—1727)». Сборник статей к трехсотлетию со дня рождения, Изд-во АН СССР, 1943.
8. Иссак Ньютон как математик и натуралист[1]. Журнал «Природа», 1943, 3—4.
9. Валле-Пуссен Шарль Жан. БСЭ, 1927, 8.
10. Бэр Ренэ (совместно с А. В. Хромым). БСЭ, 2-е издание.

РАБОТЫ Н. Н. ЛУЗИНА, ОПУБЛИКОВАННЫЕ ПОСЛЕ ЕГО СМЕРТИ

1. Об одном особом интеграле. См. «Интеграл и тригонометрический ряд.» (Диссертация). 2-е издание. Приложения. 1951, ГТТИ.
2. О методе приближенного интегрирования акад. С. А. Чаплыгина. «Успехи матем. наук», 1951, 6, вып. 6.
3. Н. Н. Лузин и П. И. Кузнецов. К абсолютной инвариантности и инвариантности до ε в теории дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1951, 80, вып. 3.
4. Интеграл и тригонометрический ряд. (Диссертация). 2-е издание. 1951, ГТТИ.
5. Работы по теории функций комплексного переменного. «Успехи матем. наук», 1952, 7, вып. 2.
6. О регулярном решении задачи изгибания поверхностей на главном основании, «Успехи матем. наук», 1953, 8, вып. 2.
7. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. М., 1953, ГТТИ.
8. К теоретическому обоснованию периодограмм. Собрание сочинений Н. Н. Лузина, т. III.

УЧЕБНИКИ

1. Элементы дифференциального и интегрального исчислений. 8-е изд., перераб. и дополн., ч. 1. М.—Л., Госиздат, 1930 (переработка курса В. Грэнвиля).
2. То же. 9-е изд., стереот., ч. I—II, М.—Л., Госиздат, 1930.
3. То же. 10-е изд., перераб. и дополн., М.—Л., Госиздат, 1930.
4. То же. 11-е изд., М.—Л., Госиздат, 1931.
5. Елементи диференцияльного та інтегрального числень. Переклад з 11-го російського вид. ч. 1, Харків, Техн. вид., 1931.
6. Курс дифференциального и интегрального исчислений. 12-е изд., перераб. и дополн., ч. 1, М.—Л., ГТТИ, 1933.
7. То же. 13-е изд., стереот., М.—Л., ГТТИ, 1933.

[1] Эта статья в несколько сокращенном виде под названием «Исаак Ньютон», была опубликована в методическом сборнике «Физика в школе». Учпедгиз, 1945, вып. 1.

8. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Ч. 1 и 2, ГТТИ, 1934 (переработка курса В. Грэнвиля).
9. То же. 2-е изд., стереот., ч. 2, М.—Л., ОНТИ, 1934.
10. То же. 3-е изд., стереот., ч. 1—2, М.—Л., ОНТИ, 1935.
11. То же 4-е изд., ч. 1—2, М.—Л., ОНТИ, 1935—1937.
12. То же 5-е изд., ч. 1, М.—Л., ОНТИ, 1937.
13. То же. 6-е изд., ч. 1—2, М.—Л., ГОНТИ, 1938.
14. Теория функций действительного переменного. Общая часть. М., Учпедгиз, 1940.
15. Курс дифференциального и интегрального исчисления. 7-е изд., ч. 1—2, М.—Л., Гостехиздат, 1942.
16. Дифференциальное исчисление. «Советская наука», 1946.
17. Интегральное исчисление. «Советская наука», 1946.
18. Теория функций действительного переменного. 2-е изд., М., Учпедгиз, 1948.
19. Дифференциальное исчисление. 2-е изд., М., «Советская наука», 1949.
20. Интегральное исчисление. 2-е изд., М., «Советская наука», 1949.
21. Дифференциальное исчисление. 3-е изд., М., «Советская наука», 1952.
22. Интегральное исчисление. 3-е изд., М., «Советская наука», 1952.
23. Differenciálszámitas. Rész 2—3, Budapest, 1952—1953.
24. Теорія функцій дійсного змінного. Загальна частина. Переклад з 2-го російского вид. Киів, «Радянська школа», 1953.
25. Дифференциальное исчисление. 4-е изд., М., «Советская наука», 1953.
26. Интегральное исчисление. 4-е изд., М., «Советская наука», 1953.
27. Диференціальне числення. Переклад з 4-го російского вид., Київ, Держтехвидав УРСР, 1954.
28. Дифференциальное исчисление. 5-е изд., М., «Советская наука», 1955.
29. Интегральное исчисление, 5-е изд., М., «Советская наука», 1955.
30. Дифференциальное исчисление. 6-е изд., М., «Советская наука», 1958.
31. Интегральное исчисление. 6-е изд., М., «Советская наука», 1958.

РЕДАКТИРОВАНИЕ

1. Грэнвиль В. Элементы дифференциального и интегрального исчисления для технических учебных заведений и самообразования. Вып. 1, 2-е изд., М., Госиздат, 1922.
2. То же, 3-е изд., исправл., ч. 1—2, Л., Госиздат 1924.
3. То же, 4-е изд., ч. 1, М.—Л., Госиздат, 1926.
4. То же, 5-е изд., исправл., ч. 1—2, М.—Л. Госиздат, 1927.
5. Дуббель Г. Справочник по математике для инженеров, техников, студентов и преподавателей математики. М., Гостехиздат, 1927.
6. Грэнвиль В. Элементы дифференциального и интегрального исчисления для технических учебных заведений и самообразования. 6-е изд., исправл., М.—Л., Госиздат, 1928.
7. То же, 7-е изд., исправл., ч. 1, М.—Л., Госиздат, 1928.
8. То же, 7-е изд., исправл., ч. 2. М.—Л., Госиздат, 1929.
9. То же. 8-е изд. с 7-го исправл., ч. 2, М.—Л., Госиздат, 1930.
10. То же, 9-е изд., стереот.
11. То же, 10-е изд., стереот.
12. Дуббель Г. Справочник по математике для инженеров, техников, студентов и преподавателей математики. 2-е изд., М., Гостехиздат, 1930.
13. Дуббель Г. Справочник по математике для инженеров, студентов и преподавателей математики. М.—Л., ГТТИ, 1933.
14. Жегалкин И. И. и Слудская М. И. Введение в анализ (курс математического анализа, ч. 1). М., Учпедгиз, 1935.
15. Жегалкин И. И. и Слудская М. И. Дифференциальное исчисление (курс математического анализа, ч. 2). М., Учпедгиз, 1935.
16. Жегалкин И. И. и Слудская М. И. Интегральное исчисление (курс математического анализа, ч. 3). М., Учпедгиз, 1936.
17. Бари Н. К. Теория рядов (курс математического анализа, ч. 4). М., Учпедгиз, 1936.

СОДЕРЖАНИЕ

От Комиссии по изданию трудов академика Н. Н. Лузина 3

I. УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Об одной теореме теории уравнений с частными производными 7
О существовании алгебраических поверхностей, не имеющих главного основания. I, II 11
О существовании алгебраических поверхностей, не имеющих главного основания. III, IV 18
Доказательство одной теоремы теории изгибания 25
Об одном случае теоремы Жанэ—Рикье. I 98
Об одном случае теоремы Жанэ — Рикье. II, III 103
О регулярном решении задачи изгибания поверхности на главном основании. . . 111

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

О качественном исследовании уравнения движения поезда 123
О методе приближенного интегрирования академика С. А. Чаплыгина 145
Добавление. О методе С. А. Чаплыгина с аналитической точки зрения 168
О методе приближенного интегрирования академика С. А. Чаплыгина 181

III. РАЗЛИЧНЫЕ СТАТЬИ ПО АНАЛИЗУ

Заметка о лемме Пуанкаре 211
К теоретическому обоснованию периодограмм 218
Дифференциальное исчисление 292
Функция 319

IV. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Поль Аппелль (некролог) 345
Иван Александрович Лаппо-Данилевский (некролог) 348
Эйлер (по поводу 150-летия со дня смерти) 351
Ньютонова теория пределов 373
Исаак Ньютон как математик и натуралист 401

V. СОПРОВОДИТЕЛЬНЫЕ СТАТЬИ

Н. Н. Лузин. Работы по теории функций комплексного переменного 418
В. С. Федоров. Труды Н. Н. Лузина по теории функций комплексного переменного 423
Д. Ф. Егоров. Отзыв о диссертации Н. Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд», представленной для получения степени магистра чистой математики 433
Н. К. Бари и Л. А. Люстерник. Работы Н. Н. Лузина по метрической теории функций 440
Л. Н. Сретенский. Замечания к посмертной работе Н. Н. Лузина об интегрировании уравнений изгибания поверхностей на главном основании 461
Н. К. Бари и В. В. Голубев. Биография Н. Н. Лузина 468
Список проблем, поставленных Н. Н. Лузиным в период подготовки диссертации 484
Список научных трудов Н. Н. Лузина 500

Николай Николаевич Лузин

Собрание сочинений, том III

*

Утверждено к печати
Отделением физико-математических наук
Академии наук СССР

Редактор издательства *А. В. Гермогенов*
Технический редактор *В. Г. Шевченко*

РИСО АН СССР. 4а-5В. Сдано в набор 18/II. 1959 г.
Подписано к печати 25/V. 1959 г.
Формат 70×108¹/₁₆. 31,75 печ. л. 43,49 усл. печ. л.
+ 1 вкл. 33,1 уч.-изд. л. Тираж 2500 экз.
Изд. 2395. Тип. зак. 1441

Цена 25 р. 25 к.

Издательство Академии наук СССР.
Москва, Б-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография Издательства АН СССР.
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ИСПРАВЛЕНО

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
249	11, 12, 14, 21 св.	2^s	2_s
453	16 сн.	$a_n \sin nx$	$b_n \sin n x$
500	13 сн.	Бэра.)	Бэра.) C. R. Acad. Sei, Paris. **164**
502	16 сн.	дополнений.)	дополнений.) Fund. Math., XVII, 4—7, 1931
506	10 св.	. . . . .	 98
	11 св.	II	II, III 103
	12 св.	. . . . .	 111
	8 сн.	. . . . .	 292

Н. Н. Лузин, том III

Н. Н. Лузин

Н. Лузин

Н. Н. ЛУЗИН

СОБРАНИЕ СОЧИНЕНИЙ